Časopis pro pěstování matematiky

Račo T. Denčev

O jedné spektrální úloze a o Dirichletově úloze pro vlnovou rovnici

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 146--157

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108385`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O JEDNÉ SPEKTRÁLNÍ ÚLOZE A O DIRICHLETOVĚ ÚLOZE PRO VLNOVOU ROVNICI

R. DENČEV, Moskva

(Došlo dne 14. května 1959)

V práci je podán přehled současného stavu bádání o Dirichletově úloze pro hyperbolickou rovnici.

Při vyšetřování úlohy o malých kmitech kapaliny v rotující nádobě dospěl S. L. SOBOLEV [1] k této úloze:

Jest nalézti funkci Φ proměnných x, y, z, t, která je řešením rovnice

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

a splňuje hraniční podmínku $\Phi|_S = 0$, kde S je hranice nějaké oblasti Ω, a počáteční podmínky

$$\Phi|_{t=0} = \Psi_0(x, y, z)\,, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi_1(x, y, z)\,.$$

Jestliže v (1) separujeme proměnné, dojdeme k této spektrální úloze:

Nalézti ty hodnoty λ, pro něž má rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda\,\Delta u = 0 \tag{2}$$

nenulová řešení, rovná nule na hranici. Jinak řečeno jest vyšetřiti spektrum operátoru

$$Lu = \Delta^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \iiint_\Omega G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\,\frac{\partial^2 u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta^2}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,. \tag{3}$$

Zde G je Greenova funkce oblasti Ω pro Laplaceův operátor. Na spektru tohoto operátoru závisí, budou-li řešení rovnice skoroperiodická nebo nikoliv. Rovnici (2) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,.$$

Je zřejmé, že tato rovnice má nenulové řešení s $u/S = 0$ pouze, je-li $1 + \frac{1}{\lambda} < 0$, tj. úloha je převedena na problém jednoznačnosti řešení Dirichletovy úlohy pro vlnovou rovnici.

Dirichletovou úlohou pro rovnici pro chvění struny se zabývali někteří autoři již dříve. Charakter úlohy, jak na to upozornil již Hadamard [2], [3], [4], [5], je zcela odlišný od příslušné úlohy v eliptickém případě. Obecně je úloha nekorektní. Příčinu toho lze objasniti takto: Zkoumejme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0 . \tag{4}$$

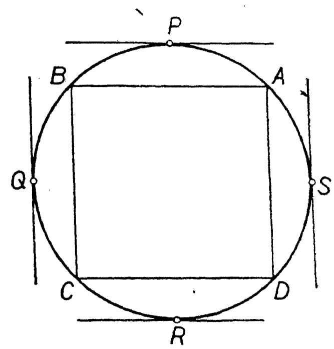
Nechť $ABCD$ je obdélník se stranami rovnoběžnými s charakteristikami této rovnice $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Pak lze snadno nahlédnout, že hodnoty funkce $u(x, y)$, splňující (4), jsou ve vrcholech rovnoběžníka svázány vztahem

$$u_A + u_C = u_B + u_D . \tag{5}$$

Odtud je vidět toto: Lze-li do vyšetřované oblasti vepsat charakteristické čtyřúhelníky, nemohou být hodnoty funkce na hranici libovolné, nýbrž musí být svázány vztahy typu (5). Např. v kruhu (obr. 1) určují hodnoty funkce u na třech obloucích PQ, QR, RS její hodnoty na čtvrtém oblouku PS.

Z toho je vidět, že Dirichletova úloha pro rovnici pro chvění struny nemusí mít vždycky řešení. Na druhé straně je snadno vidět, že řešení této úlohy, existuje-li, není vždy jednoznačné. Např. funkce $x^2 + y^2 - 1 \not\equiv 0$ splňuje (4) na kruhu $x^2 + y^2 \leqq 1$ a je rovna nule na jeho hranici.

Vyšetřujme libovolnou uzavřenou oblast, jejíž hranici protne každá přímka rovnoběžná s osou x nebo s osou y nejvýše ve dvou bodech. Body, v nichž x nebo y dosahují maxima nebo minima, nazýváme jejími vrcholy (obr. 2).



Obr. 1.

Snadno se nahlédne, jak ukázal A. Huber [6], že Dirichletova úloha není obecně řešitelná, má-li oblast pouze dva nebo tři vrcholy (obr. 2b, c), neboť hodnoty funkce na jedné části hranice určují její hodnoty na druhé části.

Detailněji je vyšetřen obdélník v [7], [8], [15], [16]. Zastavíme se u něho podrobněji pro jednoduchost a charakterističnost tohoto případu.

V [7] vyšetřují autoři rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

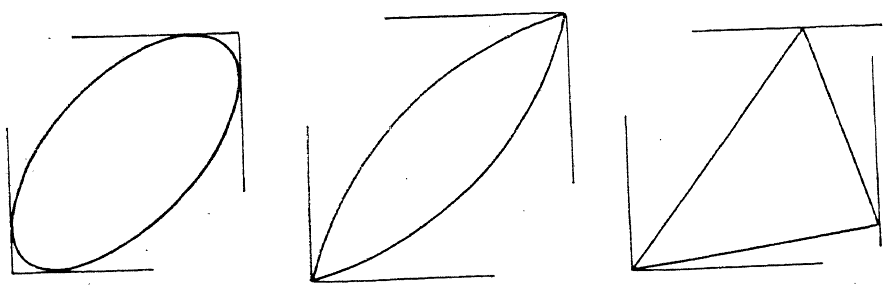
v obdélníku se stranami rovnoběžnými s osami x a y. Na stranách obdélníka jsou dány hraniční funkce rovnající se nule ve vrcholech obdélníka. Označme α

poměr stran obdélníka. Řešení Dirichletovy úlohy je jednoznačně určeno právě tehdy, je-li α iracionální. Je-li α iracionální, existuje řešení pro všechny dostatečně hladké hraniční funkce, jestliže α nelze „příliš dobře" aproximovat pomocí racionálních čísel. Přesněji řečeno platí toto tvrzení:

Existují-li konstanty A a k (k celé číslo) tak, že pro libovolná celá čísla m a n platí

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| > \frac{A}{n^{k+1}}, \tag{6*}$$

potom pro libovolné hraniční funkce třídy C^{k+4} existuje jediné řešení rovnice (6), splňující hraniční podmínky a patřící do C^2.



Obr. 2.

Přesnější výsledky pro případ obdélníka pocházejí od D. Foxe a C. PuccIho [8]. Uvedeme hlavní výsledky této práce:

Budeme vyšetřovat rovnici (6) v obdélníku R: $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \alpha\pi$ s hraničními podmínkami

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(\pi, y) = 0\,, \quad 0 \leqq y \leqq \alpha\pi\,;\\ u(x, 0) = \varphi(x)\,, \quad u(x, \alpha\pi) = \psi(x)\,, \quad 0 \leqq x \leqq \pi\,, \end{aligned} \tag{7}$$

kde $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou funkce spojité v intervalu $[0, \pi]$. Všude v dalším budeme předpokládat, že φ a ψ jsou prodlouženy na celou reálnou osu jakožto liché periodické funkce s periodou 2π. Klasickým řešením budeme nazývat funkci z C^2, která splňuje (6) a (7). Funkci, která je limitou posloupnosti klasických řešení stejnoměrně konvergující na R, budeme nazývat zobecněným řešením.

Je-li α racionální, $\alpha = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) = 1$,[1]) lze lehce ověřit, že funkce

$$\sin nqx \sin nqy\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

vyhovují (6) a jsou rovny nule na hranici. Řešení homogenní Dirichletovy úlohy budeme nazývat vlastními funkcemi. V [8] je ukázáno, že všechny zobecněné vlastní funkce homogenní Dirichletovy úlohy jsou tvaru

$$u(x, y) = \tfrac{1}{2}[E(x + y) - E(x - y)]\,,$$

[1]) $(p, q) = 1$ jako obvykle znamená, že celá čísla p, q jsou nesoudělná (pozn. překl.).

kde E je libovolná spojitá sudá funkce s periodou $\frac{2\pi}{q}$. Všechny tyto vlastní funkce jsou liché, periodické v x a y s periodou $\frac{2\pi}{q}$ a jsou rovny nule na každé přímce $x = \frac{n\pi}{q}$ a $y = \frac{n\pi}{q}$, $n = 0, 1, \ldots$ Klasické vlastní funkce homogenní Dirichletovy úlohy jsou lineárními kombinacemi funkcí (8).

Existence vlastních funkcí pro racionální α ukazuje, že Dirichletova úloha má v tomto případě nekonečně mnoho řešení, má-li vůbec nějaké. Je však zajímavé, že všechna tato řešení jsou si rovna na přímkách $x = \frac{n\pi}{q}$, $y = \frac{n\pi}{q}$, neboť se na těchto přímkách všechny vlastní funkce rovnají nule. Tedy i pro racionální α máme jakousi jednoznačnost. Řešení je jednoznačně určeno na množině, která se pro $q \to \infty$ stává hustou v R. Existuje tedy, lze-li se tak vyjádřit, spojitý přechod od nejednoznačnosti v racionálním případě k jednoznačnosti v případě iracionálního α.

Zabývejme se otázkou existence: Pro racionální α bude řešení existovat, jak lze očekávat vzhledem k nejednoznačnosti, budou-li hraniční podmínky vyhovovat jistým vztahům, svého druhu ortogonálnosti k vlastním funkcím. Jsou-li

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx\,, \quad \psi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \tag{9}$$

Fourierovy rozvoje funkcí φ a ψ, platí věta:

Jsou-li φ a ψ funkce s konečnou variací třídy $C^{(0,\lambda)}$[2]) a jestliže koeficienty jejich Fourierových rozvojů (9) vyhovují vztahům $a_{nq} = (-1)^{np} A_{nq}$, $n = 1, 2, \ldots$, potom existuje zobecněné řešení a je dáno vzorcem

$$u(x, y) = \sum_{\substack{n=0\\ n\neq q, 2q, \ldots}}^{\infty} \frac{a_n \sin n\left(\frac{p}{q}\pi - y\right) + A_n \sin ny}{\sin \frac{np}{q}\pi} \sin nx + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kq} \cos kqt \sin kqx\,. \tag{10}$$

Za učiněných předpokladů o funkcích $\varphi(x)$, $\psi(x)$ řady $\Sigma|a_n|$, $\Sigma|A_n|$ konvergují. Viz [21], str. 136 a 131.

Pro iracionální α platí existenční věta, která je v jistém smyslu zostřením Bourgin-Duffinovy věty [7]. Nechť α je iracionální číslo typu $J_{k+\lambda}$,[3]) k celé a $0 \leqq \lambda < 1$. Jestliže hraniční funkce φ, ψ patří do $C^{(k,\lambda^*)}$, $\lambda^* > \lambda$, potom exis-

[2]) $f \in C^{(s,\lambda)}$ znamená, že f má s spojitých derivací a že $f^{(s)}$ je Hölderovská s exponentem λ.

[3]) Říkáme, že iracionální číslo α je typu J_η, je-li η supremum kladných čísel ω, pro něž $\lim\limits_{h\to\infty} h^\omega |\sin 2h\pi\alpha| = 0$ (h celé číslo).

tuje zobecněné řešení Dirichletovy úlohy.[4]) Leží-li φ, ψ v $C^{(2+k,\lambda^*)}$, potom existuje klasické řešení. V obou případech je řešení dáno vzorcem

$$(11) \qquad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin n(\alpha\pi - y) + A_n \sin ny}{\sin n\alpha\pi} \sin nx ,$$

kde a_n a A_n jsou definovány v (9). Jsou-li hraniční funkce dostatečně hladké, bude řešení existovat pro skoro všechna α (skoro všechna ve smyslu teorie míry).

Na přímkách $x = n\alpha\pi$, $y = n\alpha\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ je řešení Dirichletovy úlohy dáno vzorci

$$(12) \qquad u(x, n\alpha\pi) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi[x + (2j + 1 - n)\, \alpha\pi] - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi[x + (2j - n)\, \alpha\pi] , \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

$$u(n\alpha\pi, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi[y + (2j + 1 - n)\, \alpha\pi] - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi[y + (2j - n)\, \alpha\pi] , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vzhledem k periodičnosti $u(x, y)$ dávají vzorce (12) hodnoty u na množině husté v R.

V [8] je provedeno zajímavé vyšetřování závislosti řešení na hraničních podmínkách φ a ψ a na čísle α. Na jednoduchých příkladech lze ukázat, že úloha je nekorektní jak vzhledem k hraničním podmínkám φ a ψ, tak i vzhledem k α. Libovolně malou změnou hraničních podmínek lze docílit libovolně velké změny řešení a úlohu, která má řešení, lze libovolně malou změnou α převést v úlohu, která řešení nemá.

Tato situace připomíná, jak bylo ukázáno Hadamardem, úlohu Cauchyho pro eliptickou rovnici.

Avšak v našem případě platí jisté specifické skutečnosti: Jakmile řešení existuje, i když není jednoznačné, existuje podmnožina obdélníka R, na níž

[4]) Tato formulace není správná. Správné znění je:
Nechť α je iracionální číslo, které **není** typu $J_{k+\lambda}$, k celé, atd. Snadno se zjistí, že číslo α je typu J_η právě tehdy, existuje-li posloupnost celých p_n, q_n tak, že $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sigma(q_n^{-1-\eta})$ (srovnej nerovnost (6*)).

K omylu došlo v práci [8] tím, že autoři se opírají o nesprávné znění jednoho výsledku Hardy a Littlewooda, které uvádí Koksma v *Diophantische Approximationen*, Springer 1916, Berlin, kap. 9, § 2, str. 108: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\eta+\varepsilon}|\sin \pi n\alpha|}$ konverguje pro každé α typu J_η, $\varepsilon > 0$, $\eta \geqq 1$.

Hardy a Littlewood (Abh. math. Semin. Hamburg, Univ. *1* (1922)), dokázali, že uvedená řada konverguje, jestliže α není typu J_η.

Poznamenejme, že podle známé Chinčinovy věty (viz Koksma, kap. III, § 5, věta 37, nebo kap. V, § 3, věta 17) platí: Je-li $\eta > 1$, pak skoro všechna čísla nejsou typu J_η. (*Pozn. red.*)

je řešení definováno jednoznačně, a na této množině platí spojitá závislost na okrajových podmínkách.

Budiž α pevně zvoleno a označme $R_{\alpha,N}$ množinu bodů z R ležících na přímkách $x = n\alpha\pi$, $y = n\alpha\pi$, $n = 1, 2, \ldots, N$ a na přímkách, jež z nich vzniknou posunutím o celistvý násobek 2π. Budiž $R_\alpha = \bigcup_{N=1}^{\infty} R_{\alpha,N}$. Na každé přímce z R_α je řešení dáno výrazy (12) jakožto konečná lineární kombinace funkcí φ a ψ a závisí tedy na nich spojitě v každém bodě množiny R_α, která je hustá v R, je-li α iracionální. Závislost je však stejnoměrná pouze na každém $R_{\alpha,N}$, tj. existuje konstanta C_N tak, že

$$|u| \leqq C_N(\max|\varphi| + \max|\psi|) \ \text{ v } \ R_{\alpha,N}\,.$$

Pro pevně zvolené okrajové podmínky φ a ψ závisí řešení, existuje-li, v $R_{\alpha,N}$ spojitě na α v tomto smyslu:

Nechť α_1 a α_2 jsou dvě hodnoty α a u_1 a u_2 příslušná jim řešení. Potom

$$|u_1(x, n\alpha_1\pi) - u_2(x, n\alpha_2\pi)| < D_N|\alpha_1 - \alpha_2|\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

a

$$|u_1(n\alpha_1\pi, y) - u_2(n\alpha_2\pi, t)| < D_N|\alpha_1 - \alpha_2|\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

kde D_N je konstanta, závisící na N a na modulech spojitosti φ a ψ.

Z těchto výsledků plyne, že řešení závisí spojitě na okrajových podmínkách a na α na jisté podmnožině R, a známe-li tedy přibližně φ, ψ, α, můžeme řešení vypočítat s danou přesností na libovolně jemné síti v R.

Je-li à priori známo, že řešení má první derivace, omezené konstantou L, dostaneme v jistém smyslu korektnost v celém obdélníku R. Přesněji, označme Γ_L třídu řešení, jež mají skoro všude první derivace omezené v absolutní hodnotě konstantou L. Označme dále

$$\|f\| = \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)|\,,$$

kde $f(x)$ je funkce spojitá v $[0, \pi]$.

Potom platí věty:

Je-li $\alpha = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, potom pro funkce $u(x, y)$ z Γ_L, příslušné hraničním podmínkám φ, ψ, α, platí

$$|u(x, t)| \leqq q(\|\varphi\| + \|\psi\|) + \frac{\pi L}{q}\,.$$

Je-li α iracionální, existuje funkce $F_\alpha(\delta)$, definovaná pro $\delta > 0$, tak, že

$$\lim_{\delta\to 0} F_\alpha(\delta) = F(0) = 0\,, \quad 0 \leqq F_\alpha(\delta) < L\pi$$

a že každá funkce u z Γ_L, příslušející hraničním podmínkám φ, ψ, α, splňuje v R nerovnost

$$|u(x, t)| \leqq F_\alpha(\|\varphi\| + \|\psi\|)\,.$$

V třídě Γ_L závisí řešení v jistém smyslu spojitě i na α. Platí tyto věty:

Nechť $u_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ jsou dvě funkce z Γ_L příslušející $\varphi_i, \psi_i, \alpha_i$ $(i = 1, 2)$. Je-li $\alpha_1 = \frac{p}{q}$, platí nerovnost

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leqq q(\|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\| + L|\alpha_1 - \alpha_2|) + \frac{L\pi}{q}\,.$$

Nechť ε, τ, α^* jsou kladná čísla a $\varphi^*(x)$, $\psi^*(x)$ funkce spojité na $[0, \pi]$. Nechť Γ^* je podmnožina Γ_L, sestávající z řešení Dirichletovy úlohy pro daná α, φ, ψ, vyhovující nerovnostem

$$|\alpha - \alpha^*| \leqq \tau\,, \quad \|\varphi - \varphi^*\| \leqq \varepsilon\,, \quad \|\psi - \psi^*\| \leqq \varepsilon\,.$$

Existuje-li v intervalu $[\alpha^* - \tau, \alpha^* + \tau]$ racionální číslo $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, $q = 1 + \left[\sqrt{\frac{L\pi}{4\varepsilon + 2L\tau}}\right]$,[5]) potom pro každé dvě funkce u_1, u_2, v Γ^* platí

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqq 3\sqrt{L\pi(2L\tau + 4\varepsilon)}\,.$$

Tím končíme vyšetřování Dirichletovy úlohy pro obdélník.

Případ libovolné oblasti ohraničené uzavřenou křivkou C, kterou každá rovnoběžka s osou x nebo y protne nejvýše ve dvou bodech, vyšetřoval pro rovnici (4) F. John [9]. Základním rysem jeho vyšetřování je těsná souvislost mezi Dirichletovou úlohou pro rovnici (4) a topologickými vlastnostmi některých transformací C do sebe. Vyšetřuje se tato transformace T (obr. 3):

Z libovolného bodu P křivky veďme jednu z charakteristik. Její průsečík s C budiž AP. Z AP veďme druhou z charakteristik a její průsečík s C budiž TP.

Vyšetřujeme posloupnost bodů P, TP, T^2P, ... Chování Dirichletovy úlohy závisí na tom, jak jsou tyto body rozloženy na křivce C.

Jak známo, je řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici v dané oblasti těsně svázáno s teorií konformního zobrazení. Poněvadž je Laplaceova rovnice invariantní vůči konformnímu zobrazení, lze Dirichletovu úlohu pro danou oblast převést pomocí konformního zobrazení na touž úlohu pro kruh. Pro kruh lze již úlohu řešit pomocí Fourierových řad nebo Poissonovým vzorcem. Podobně je Dirichletova úloha pro rovnici pro chvění struny těsně svázána se zobrazeními neměnícími rovnici (4), což jsou zobrazení tvaru

$$x' = f(x)\,, \quad y' = g(y)\,. \tag{13}$$

K tomu, aby bylo možno na sebe zobrazit dvě křivky takovou transformací, je nutno, aby jim příslušné T-transformace byly topologicky ekvivalentní.

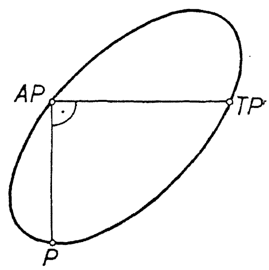
[5]) $[r]$ jako obvykle znamená největší celé číslo, jež není větší než reálné číslo r. (Pozn. překl.)

Hlavní výsledek F. JOHNA je tento:

Každá Jordanova křivka konvexní vzhledem k x a y[6]) patří do jedné ze dvou tříd, jež jsou charakterisovány takto:

Křivka C patří do první třídy, lze-li ji rozdělit na dva oblouky C_1 a C_2 tak, že hodnoty u na křivce C_2 určují již jednoznačně hodnoty na C_1. Množina hraničních podmínek, pro něž má Dirichletova úloha řešení, není ani „hustá".

Křivky C druhé třídy jsou ty křivky, pro něž je posloupnost P, TP, T^2P, ... hustá na C pro všechny body P křivky C. Každou takovou křivku C lze spojitým zobrazením tvaru (13) převést na obdélník s iracionálním poměrem stran α, při čemž strany svírají s osou x úhel 45° resp. 135°. V tomto případě přejde Dirichletova úloha pro vnitřek C v touž úlohu pro obdélník. Poměr α je jednoznačně určen C. α je invariant C při zobrazení tvaru (13).



Obr. 3.

Křivky druhé třídy s týmž α lze na sebe zobrazit homeomorfním zobrazením tvaru (13). Pro skoro všechna α je Dirichletova úloha řešitelná pro dostatečně hladké okrajové podmínky. Existují však speciální hodnoty α, pro něž není zaručena existence řešení ani pro analytické okrajové podmínky.

Studium Dirichletovy úlohy pro rovnici pro chvění struny je tedy v rovinném případě těsně spojeno s topologickými vlastnostmi jistých transformací křivky na sebe. Je zajímavé, že ke studiu takových transformací vedou i jiné matematické problémy, např. vyšetřování diferenciálních rovnic na toru a jiné. V souvislosti s tím studovali takové transformace POINCARÉ a DENJOY [10], [11].

Vraťme se k úloze S. L. Soboleva. Jak jsme viděli, jde o vyšetřování spektra operátoru (3).

Rovinný případ byl studován P. A. ALEXANDRJANEM [12], [13], [14], který ukázal, že charakter spektra tohoto operátoru závisí na oblasti Ω a sestrojil oblast, pro niž je spektrum spojité.

Vyšetřování spektra tohoto operátoru lze převést na vyšetřování jednoznačnosti Dirichletovy úlohy pro vlnovou rovnici. Obráceně, známe-li spektrum tohoto operátoru, získáme jisté poznatky o Dirichletově úloze, takže vyšetřování spektra tohoto operátoru dává určitý přístup k vyšetřování Dirichletovy úlohy.

Vícerozměrný případ vyšetřoval autor [17], [18], který dokázal diskretnost spektra v těchto dvou případech:

1. Ω je libovolný elipsoid,

2. Ω je válec s površkami rovnoběžnými s osou z, jehož podstavou je libovolná oblast v rovině x, y.

[6]) Jordanova křivka je konvexní vzhledem k x a y, jestliže ji každá přímka, rovnoběžná s osou x resp. y, protíná nejvýše ve dvou bodech. (Pozn. překl.)

Označme $W_2^{(1)}$ prostor funkcí, které mají zobecněné derivace integrovatelné s kvadrátem. Zaveďme v něm skalární součin

$$(u, v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \mathrm{d}\Omega + \int_S u \,\mathrm{d}S \int_S v \,\mathrm{d}S\,.$$

Platí věta:

Pro oblasti 1 *a* 2 *existuje spočetná množina čísel* λ_k *a odpovídajících jim funkcí* $\sigma_k(x, y, z)$, *vyhovujících podmínkám*

$$\frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial z^2} - \lambda_k \Delta\sigma_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)\,, \quad \sigma_k/S = 0\,.$$

Systém funkcí Ξ, *sestávající ze všech* σ_k *a z* $c(x) \equiv 1$, *je úplný a ortogonální ve* $W_2^{(1)}$.

Je-li Ω *elipsoid, jsou* σ_k *polynomy. Je-li oblast kvádr s hranami* a, b, c, *lze vlastní hodnoty i vlastní funkce explicitně vypočíst; platí*

$$\lambda_{klm} = \frac{\dfrac{m^2}{c^2}}{\dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{l^2}{b^2} + \dfrac{m^2}{c^2}} \tag{14}$$

a

$$\sigma_{klm} = \sin\frac{k\pi}{a}x \sin\frac{l\pi}{b}y \sin\frac{m\pi}{c}z\,. \tag{15}$$

V tomto případě je systém vlastních funkcí ortogonální i v L_2 a spektrum se skládá z husté množiny vlastních hodnot, z nichž každá má nekonečnou násobnost.

Pro oblasti 1 a 2 lze dostat výsledky, týkající se jednoznačnosti a existence Dirichletovy úlohy.

Vyšetřujme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, z) \tag{16}$$

s okrajovými podmínkami

$$u/S = 0\,. \tag{17}$$

Potom pro jednoznačnost řešení rovnice (16) s okrajovou podmínkou (17) je nutné a stačí, aby bylo $\lambda_k \neq \frac{1}{2}$.

Pokud jde o existenci řešení, předpokládejme, že $f \in W_2^{(1)}$, a označme

$$F(x, y, z) = \int_0^z (z - t)\, f(x, y, t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Potom $F \in W_2^{(1)}$ a F lze rozvést ve Fourierovu řadu příslušnou k funkcím systému Ξ, konvergující v $W_2^{(1)}$

$$F = F_0 + \Sigma F_k \sigma_k \,.$$

Konverguje-li řada $\sum \frac{F_k^2}{\left(2 - \frac{1}{\lambda_k}\right)^2}$, má rovnice (16) řešení v $W_2^{(1)}$, splňující (17).

Je-li Ω kvádr, dostaneme tyto věty:

Nutná a postačující podmínka, aby existovala funkce z $W_2^{(1)}$, *splňující* (16) *a* (17) *v kvádru o hranách a, b, c, je, aby rovnice* $\frac{m^2}{c^2} - \frac{k^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2} = 0$ *neměla řešení v celých číslech.*

V tomto případě jsou vlastní funkce ortogonální i v L_2. Funkci $f(x, y, z)$ můžeme rozvinout v řadu v L_2 a dostaneme:

Nechť $f \in L_2$ *a* $\sum_{klm} f_{klm}\sigma_{klm}$ *je její Fourierova řada příslušná k funkcím* (15). *Jestliže řada*

$$\sum_{klm} \frac{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2}}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{c^2} - \frac{k^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2}\right)} f_{klm}^2$$

konverguje, má rovnice (16) *řešení v* $W_2^{(1)}$, *splňující* (17).

Speciálně dostaneme, že úloha je řešitelná, je-li $f(x, y, t)$ $(p + 2)$*-kráte spojitě diferencovatelná funkce a existuje-li konstanta A tak, že pro všechna dostatečně velká k, l, m platí*

$$\left|\frac{m^2}{c^2} - \frac{k^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2}\right| > \frac{A}{N^p}\,, \tag{18}$$

kde $N = \max(k, l, m)$ *a p je celé číslo.*

Je-li $p \geqq 4$, *platí* (18) *pro skoro všechna a, b, c, takže pro* $f \in C^{p+2}$ *má rovnice* (16) *řešení pro skoro všechny kvádry.*

Podobnými úvahami lze vyšetřovat i jiné ultrahyperbolické rovnice v příslušných oblastech.

Nakonec poznamenejme, že pro rovnici pro chvění struny byly vyšetřovány i jiné okrajové úlohy [19], [20].

Literatura

[1] *С. Л. Соболев:* Об одной новой задаче математической физики. ИАН, *18* (1954), 1, 3—50.

[2] *J. Hadamard*: On some topics connected with linear partial differential equations. Proc. Benar. Math. Soc., *3* (1921) 39—48.

[3] *J. Hadamard*: Équations aux dérivées partielles. Les conditions definies en général. — Le cas hyperbolique. Enseignement Math., *35* (1936), 5—42.
[4] *J. Hadamard*: Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques. J. Chinese Math. Soc., *2* (1937), 6—20.
[5] *J. Hadamard*: On the Dirichlet problem for the hyperbolic case. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *28* (1942), 258—263.
[6] *A. Huber*: Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y)$. Monatsh. Math. Phys., *39* (1932), 79—100.
[7] *D. G. Bourgin, R. Duffin*: The Dirichlet problem for the vibrating string equation. Bull. Amer. Math. Soc., *45* (1939), 851—858.
[8] *D. Fox, C. Pucci*: The Dirichlet Problem for the wawe equation. Annali Mat. Puro Appl., serie IV, t. *XLVI* (1958), 155—182.
[9] *F. John*: The Dirichlet problem for a hyperbolic equation. Amer. J. Math., *63* (1941), 141—154.
[10] *H. Poincaré*: Sur les courbes définies par les équations différentielles. Journ. de Math. pures et appliquées, 4e série, *1*, 167—244, chap. XV. (Oeuvres de Henri Poincaré, Tome *1*, 137—158.)
[11] *A. Denjoy*: Courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. Journ. de Math. pures et appl., *11* (1932), 4, 333—375.
[12] *Р. Александрян:* Диссертация, МГУ, Москва, 1949.
[13] *Р. Александрян:* Об одной задаче Соболева для специального уравнения с частными производными четвертого порядка. ДАН СССР, *73*, (1950), 4, 631—634.
[14] *Р. Александрян:* О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге. ДАН СССР, *73* (1950), 5, 869—872.
[15] *Н. Н. Вахания:* Диссертация МГУ, Москва 1958.
[16] *Н. Н. Вахания:* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны. Сообщ. Акад. наук Груз. ССР, *21* (1958), 2, 131—138.
[17] *Р. Денчев:* О спектре одного оператора. ДАН СССР, *126* (1959), 2, 259—262.
[18] *Р. Денчев:* О задаче Дирихле для волнового уравнения. ДАН СССР *127* (1959), 3, 501—504.
[19] *С. Л. Соболев:* Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе. ДАН СССР, *109* (1956), 4, 707—709.
[20] *Н. Н. Вахания:* Об одной краевой задаче с заданием на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны. ДАН СССР, *116* (1957), 6, 906—909.
[21] *A. Zygmund:* Trigonometrical series, Warszawa 1935.

Резюме

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ И ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Р. ДЕНЧЕВ, Москва

В работе дается обзор сведений о задаче Дирихле для гиперболического уравнения. Как известно, постановка этой задачи не является корректной. Тем не менее, для частных случаев был доказан ряд очень

интересных теорем о существовании, однозначности и непрерывной зависимости от краевых условий. Следует обратить внимание на то, что в случае плоской задачи эти вопросы связаны с различными разделами математики, напр., с вопросами диофантовских приближений иррациональных чисел, с изучением некоторых топологических отображений плоских кривых на себя, к которым приводит исследование дифференциальных уравнений на торе и т. п.

Собственные результаты автора касаются пространственных областей специального типа. При помощи методов функционального анализа атвором исследуется здесь спектр некоторого оператора, по свойствам которого можно судить о свойствах данной краевой задачи.

Résumé

SUR UN PROBLÈME SPECTRAL ET SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR L'ÉQUATION DES ONDES

R. Denčev, Moscou

L'article contient une revue du problème de Dirichlet pour l'équation hyperbolique. Ce problème n'a pas été posé correctement, on a cependant démontré toute une série de théorèmes intéressants sur l'existence, l'unicité de la solution et sur sa dépendence continue des conditions aux limites. Il est remarquable que dans le cas du plan ces questions-là sont en connexion avec de diverses disciplines mathématiques, p. ex. avec les problèmes des approximations diophantines des nombres irrationnels, avec l'étude de certaines applications topologiques de courbes planes sur elles-mêmes, à laquelle on est conduit par la considération des équations différentielles sur le tore, etc.

Les résultats originaux de l'auteur cocernent des domaines dans l'espace, assez spéciaux, bien entendu. Il envisage, à l'aide des méthodes de l'analyse fonctionnelle, le spectre d'un certain opérateur, dont les propriétés permettent alors de juger sur les propriétés du problème aux limites donné.