Recense

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 207--216

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108378

RECENSE

Jan Vyšín: SOUSTAVA AXIOMŮ EUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE. Nakladatelství ČSAV, Praha 1959 (2. vydání), str. 209, cena Kčs 18,90.

V úvodu nadepsaném „O axiomatické výstavbě eukleidovské geometrie" jsou porovnána stanoviska, která zaujímají k základům geometrie EUKLEIDES a D. HILBERT. Na konkrétních příkladech je ukázán rozbor geometrických vět, který má vést k vyčlenění základních pojmů a vět. Tím je ukázáno, že klasické definice základních pojmů nejsou definicemi v pravém smyslu [nejsou, přísně vzato, vlastně žádnými definicemi] a že je nutno základní pojmy (neboli axiomatické pojmy) zavést axiomaticky. Volba geometrických axiomů je odůvodněna odkazem na zkušenost. Nakonec je objasněn pojem abstraktní geometrie, interpretace jejich základních pojmů a jejího modelu.

První kapitola nese název „Logické základy geometrie v jednorozměrném eukleidovském prostoru" a jsou v ní postupně zavedeny potřebné axiomy uspořádání, shodnosti a spojitosti. Zavádí se dvě soustavy axiomů *uspořádání*. První soustava [U] axiomatisuje pojem „souhlasnosti", což je binární relace mezi dvojicemi orientovaných úseček (tj. uspořádaných dvojic různých bodů), a druhá soustava [U′] axiomatisuje obvyklý pojem „mezi" a je zeslabenou soustavou Hilbertových axiomů uspořádání (rovinný Paschův axiom je nahrazen jenom některými důsledky na přímce). Při této příležitosti je definována ekvivalence dvou soustav axiomů. Odvozují se jenom ty věty (stejná je situace i s ostatními soustavami axiomů), kterých je třeba k důkazu ekvivalence soustav [U] a [U′].

Rovnož *shodnost* se zavádí dvojím způsobem. Soustava axiomů [S] axiomatisuje pojem „shodnosti" úseček a zase je příslušně zeslabenou a doplněnou soustavou Hilbertových axiomů shodnosti, zatím co soustava [S′] axiomatisuje pojem „přemístění", což je prosté zobrazení množiny všech bodů do sebe (tj. pohyb). Dokazuje se ekvivalence axiomatických soustav [U, S] a [U′, S′]. Dále je zaveden pojem volné úsečky jako třídy všech navzájem shodných úseček a odvozují se základní vlastnosti součtu, rozdílu a porovnávání volných úseček. Celkem na sedmi modelech přímky jsou demonstrovány dosavadní výsledky a na nich je také objasněn pojem isomorfismu modelů.

Podrobný výklad o zavedení míry volné úsečky předchází a zdůvodňuje zavedení Archimedova axiomu *spojitosti* [A]. Jeho nezávislost na axiomech [U, S] se prokazuje konstrukcí jednoduchého modelu: Z eukleidovské roviny s kartézskými souřadnicemi vybereme za M-body ty body, jejichž souřadnice jsou dyadické zlomky (tj. čísla tvaru $p/2^n$, kde $n \geqq 0$ a p jsou celá); množina M-bodů se uspořádá lexikograficky podle jejich souřadnic (tj. $[u_1, v_1]$ předchází před $[u_2, v_2]$, jestliže buď $u_1 < u_2$ nebo sice $u_1 = u_2$, ale $v_1 < v_2$); dvě úsečky jsou shodné, jestliže koncové body jedné lze převést v koncové body druhé buď středovou souměrností v dané rovině se středem v M-bodě nebo posunutím nebo identitou. Dedekindův axiom spojitosti [D] je formulován tak, aby byla ihned zřejmá souvislost s Dedekindovou konstrukcí reálných čísel (na rozdíl od 1. vydání). Obvyklým způsobem je formulován Cantorův axiom [C] a dokazuje se ekvivalence soustav [U, S, D] a [U, S, A, C]. Další ekvivalentní formou axiomu spojitosti je tzv. axiom míry: Existuje alespoň jedna míra volných úseček, která nabývá všech reálných hodnot.

V závěru první kapitoly se naznačuje, jak na základě volby jednotkové volné úsečky lze konstruovat těleso isomorfní tělesu reálných čísel, když se využije dříve zavedeného sčítání volných úseček a zvlášť formuluje axiom indukce pro množinu všech n-násobků jednotkové volné úsečky (jako přirozených čísel), která zřejmě splňuje všechny zbývající Peanovy axiomy přirozených čísel.

Druhá kapitola má název „Logické základy geometrie v dvojrozměrném eukleidovském prostoru" a shodně s Hilbertem je v ní zavedeno všech pět skupin axiomů. Hilbertovy rovinné axiomy *incidence* přepisuje autor do množinového pojetí (srv. např. K. BORSUK-W. SMIELEW: *Podstawy geometrii*, 24) a tuto soustavu axiomů označuje [J].

Soustavou axiomů *uspořádání* [U″] se axiomatisuje pojem „oddělování", což je ternární relace mezi dvojicemi bodů a přímkou (zavedená např. l. c. Borsukem) a dokazuje se, že každá přímka dvourozměrného prostoru [J, U″] je jednorozměrným prostorem [U]. Na speciálním modelu se dokazuje nezávislost Paschova axiomu na ostatních axiomech uspořádání a incidence a jeho ekvivalentnost s větou o rozdělení bodů roviny přímkou do dvou polorovin.

Shodnost se zavádí dvojím způsobem podobně jako v kapitole první. V soustavě axiomů [S″] se axiomatisuje jenom pojem „shodnosti" úseček (jako již v 1. vydání) a nikoli ještě pojem shodnosti úhlů, jak to činí Hilbert (shodnost dutých úhlů se definuje). Analogicky k pojmu volné úsečky se zavádí pojem volného úhlu, součtu a rozdílu volných úhlů, jejich porovnávání apod. Zase se dokazuje, že přímka geometrie [J, U″, S″] je jednorozměrným prostorem [U′, S]. Druhá soustava [S*] axiomatisuje pojem „přemístění" a dokazují se příslušné ekvivalence. Podrobně se popisuje reálný analytický model roviny, při čemž k representaci bodů se používá místo uspořádaných dvojic reálných čísel jediného čísla komplexního. Dále se popisuje model Beltrami-Kleinův a model v Möbiově rovině.

Spojitost se zavádí axiomem [D′] žádajícím, aby existovala alespoň jedna úsečka splňující axiom [D]. Ukazuje se, že míra úsečky je metrikou, a zavádí se pojem tzv. geometrické metriky prostoru [J, U″, D′], tj. metriky ϱ splňující podmínky: 1) supremum $\varrho(X, Y)$ pro vnitřní body X, Y libovolné polopřímky je $+\infty$, 2) $\varrho(X, Y) = \varrho(X, Z) + \varrho(Y, Z)$, kde $X \neq Y$ platí právě tehdy, když Z leží mezi X a Y, 3) jsou-li X, Y, Z nekolineární a leží-li T mezi X a Y, pak $\varrho(Z, T)$ závisí jen na vzdálenostech $\varrho(X, Y)$, $\varrho(Y, Z)$, $\varrho(Z, X)$, $\varrho(X,T)$ a nikoli na volbě bodů X, Y, Z, T. Existence geometrické metriky v prostoru [J, U″D′] stačí, aby tento prostor byl modelem prostoru [J, U″, S″, D′], když za shodné považujeme ty úsečky, které mají stejné délky.

Axiom *rovnoběžnosti* [R] se zavádí obvyklým způsobem. Studuje se převážně absolutní geometrie (dokazují se např. obě Legendreovy věty) a uvádí se celkem deset vět ekvivalentních axiomu [R]. Většina těchto ekvivalencí je dokázána na základě názorného a autorem výslovně formulovaného principu: Ukáže se, že daná věta je větou eukleidovské geometrie (což je obvykle známo) a pak se udá protipříklad této věty např. v Beltrami-Kleinově modelu Lobačevského geometrie.

Třetí a poslední kapitola nese název „Logické základy geometrie v trojrozměrném eukleidovském prostoru". Soustava axiomů *incidence* [J′] je zase množinovým přepisem axiomů Hilbertových. Druhá soustava axiomů incidence [J″] axiomatisuje kvaternární relaci „závislosti" (tj. komplanárnosti) čtyř bodů. Podrobně se dokazuje ekvivalence soustav [J′] a [J″].

Soustava axiomů *uspořádání* [U″] se přenáší z rovinného případu a kromě toho se uvádí další soustava [U**] axiomatisující pojem „oddělování" dvou bodů rovinou (tento pojem je zaveden např. l. c. Borsukem). Dokazuje se ekvivalence obou soustav a dále, že rovina třírozměrného prostoru [J′, U″] je dvourozměrným prostorem [J, U″] a také, že jeho přímka je přímkou v [J, U″]. Analytický reálný model se konstruuje pro soustavu [J″, U**].

Rovněž soustava axiomů *shodnosti* [S″] se přenáší z roviny a soustava [S*] se doplňuje pro prostorový případ na soustavu [S**]. Dokazuje se ekvivalence soustav [J′, U″, S″] a [J′, U″, S**].

Pomocí Hilbertova modelu analytické geometrie v prostoru nad tzv. kvadratickým tělesem se dokazuje nezávislost Cantorova axiomu na axiomech [J′, U″, S″, A]. V závěru kapitoly se popisují Poincaréovy modely jednak eukleidovského jednak Lobačevského prostoru.

V závěru, který je nadepsán „O soustavách axiomů a jejich vlastnostech" jsou velmi stručně probrány a na modelech demonstrovány vlastnost bezespornosti, nezávislosti, která je zavedena jenom pro uspořádanou soustavu axiomů, a úplnosti (tj. kategoričnosti).

Vzhledem k prvnímu vydání této knihy je třeba zdůraznit, že druhé vydání se od něho značně odchyluje a to již v celkovém rozvržení látky. Volba kapitol umožnila autorovi rozdělit celkem stejnoměrně (s ohledem na čtenáře) probírání jednotlivých základních pojmů.

Hlavní důraz při sepsání celé knihy byl kladen na studium jednotlivých ekvivalentních soustav axiomů. Proto se také rozsah knihy proti 1. vydání zdvojnásobil a jde vlastně o zcela novou knihu. Ve všech případech dodržuje autor zásadu podat vždy alespoň dvě různé ekvivalentní soustavy axiomů. V mnoha případech přináší autor nová pojetí nebo alespoň nově podaná, upravená a doplněná pojetí již známá. Při této příležitosti je nutno litovat, že kniha není opatřena seznamem ani použité ani doporučené literatury a že ani autor sám (kromě povšechného odkazu v úvodu na Hilberta) nikde neodkazuje na žádné prameny. Druhý znak, který knihu odlišuje od jiných monografií o základech geometrie, je skutečnost, že se autor vůbec nesnaží odvodit alespoň základní geometrické věty.

Kniha je napsána stručným a při tom jasným slohem. Také důkazy jsou sestavovány pokud možno přístupně a názorně. Ve většině z nich se vystačí pouze s elementárními znalostmi. Zdá se, že autor usiluje o co největší přístupnost a elementárnost záměrně, jakoby chtěl na čtenáře klást co nejmenší požadavky (zde se asi nejvíce projevuje, že jde o přepracování 1. vydání, které bylo takto pojato). Není potom jasné, proč na jedné straně používá úvah o kvadratických formách (str. 113), zatím co na druhé straně se vyhýbá používat termínu grupy (pohybové grupy na str. 39, 104, 173) a spojit jej se jménem Kleinovým nebo proč výslovně uvádí věty o třídách prvků určených ekvivalencí na dané množině (věta 28 na str. 30 a věta 26 na str. 95).

Některé formulace nejsou příliš výstižné (věta 29 na str. 31, definice suprema funkce na str. 127 a výše uvedená podmínka 3 v definici geometrické metriky). V podmínce d) na str. 128 je požadavek, aby infimum bylo 0, zbytečný. Vztah „býti menší nebo rovný" mezi volnými úsečkami a úhly (věta 32 na str. 32 a věta 30 na str. 97) je reflexivní (v textu je „není reflexivní"). Z tiskových chyb: na str. 57, 14. řádek zdola má být EA′ (v textu EA) a na str. 56, 11. řádek zdola má být „neexistuje žádná volná úsečka b..." (v textu chybí b), v obr. 10 na str. 118 má být vyměněno označení bodů U a V.

Karel Čulík, Brno

G. Doetsch: EINFÜHRUNG IN THEORIE UND ANWENDUNG DER LAPLACE-TRANSFORMATION. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1958, str. 301, obr. 40, cena Fr./DM 39,40.

Jak autor sám uvádí, má být kniha učebnicí Laplaceovy transformace pro vysokoškolské studenty se zvláštním přihlédnutím k aplikacím a má tak vyplňovat mezeru mezi čistě teoretickými monografiemi o Laplaceově transformaci na jedné straně a úzce prakticky pojatými knihami na straně druhé.

Možno říci, že tento „Úvod" tuto mezeru skutečně vyplňuje.

Prof. G. Doetsch je zastánce pojetí, jež tzv. operátorový počet zakládá na teorii Laplaceovy transformace dnes již klasické. Naše čtenářská obec byla s tímto pojetím seznámena do češtiny přeloženou knihou sovětských autorů V. A. Ditkina a P. I. Kuzněcova: Příručka operátorového počtu. Výhodou tohoto pohledu je možnost využití holomorfnosti i jiných vlastností obrazu.

Kniha je psána brilantním způsobem a výsledky jsou ilustrovány příklady, které jsou vybrány, jak říká autor, aby zdůraznily užitelnost a elegantnost metody. Výběr látky je proveden velmi promyšleně a účelně a obráží se zde mnohaletá zkušenost autora v Laplaceově transformaci.

Kniha je rozdělena do 28 paragrafů. V prvních 11-ti je definována Laplaceova transformace a jsou vyšetřeny základní vlastnosti obrazu a probrány základní vztahy z gramatiky operátorového počtu.

Paragrafy 12—14 jsou věnovány řešení obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, paragraf následující rovnicím diferenčním.

V paragrafu 16—25 jsou studovány hlubší otázky teorie, paragraf 26 je věnován obyčejným diferenciálním rovnicím s koeficienty ve tvaru polynomu; paragraf 27 projednává parciální diferenciální rovnice a v paragrafu 28 jsou studovány rovnice integrální.

Je třeba vyzdvihnout některé partie knihy, které přinášejí důležitý a nekonvenční materiál. Tak diskuse anormálních systémů obyčejných diferenciálních rovnic přináší nový pohled i do samé teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Velmi důležité jsou otázky deformace integrační cesty v inversní formuli, které hrají zásadní roli při zkoumání asymptotických vlastností originálů a při řešení obyčejných diferenciálních rovnic, jejichž koeficienty jsou polynomy.

Myslím, že je možno polemisovat s poněkud konservativním postojem autora při studiu některých otázek. Užívání Riemannova integrálu někdy důkazy komplikuje a dělá nepřirozenými, ačkoli autor Lebesgueova integrálu jinde užívá. Je též na škodu, že se autor vyhýbá pojmu distribuce. Zavedení Diracovy funkce se tím stává těžkopádné a nemoderní a pro další zavedení Laplaceova obrazu distribuce by mnohé otázky spíše zjednodušilo než zkomplikovalo, např. studium integrálních rovnic 1. druhu. Parsevalova rovnost je odvozena za předpokladu pro ni zbytečně silných. Studiu otázek existence a unicity řešení v paragrafu o parciálních diferenciálních rovnicích je věnována dosti malá pozornost, ačkoli právě tyto otázky u rovnic, jež autor probírá, se dají metodou Laplaceovy transformace velmi dobře a jednoduše řešit.

V knize jsou též velmi řídce drobné nedostatky, které si čtenář snadno opraví sám. Tak např. na str. 207 místo $\sup\limits_{-\infty<y<\infty} \varphi(x+iy) = M(x)$ má být $\sup\limits_{-\infty<y<\infty} |\varphi(x+iy)| = M(x)$.

Vcelku, jak již bylo shora řečeno, je tato kniha znamenitým úvodem do Laplaceovy transformace a těm, kdož se chtějí s touto disciplinou seznámit, nemůže být doporučeno dílo vhodnější.

Jindřich Nečas, Praha

Maurice Parodi: LA LOCALISATION DES VALEURS CARACTÉRISTIQUES DES MATRICES ET SES APPLICATIONS. Paris, Gauthier-Villars, 1959, str. X, 172.

Kniha se zabývá ohraničením charakteristických hodnot čtvercových matic s komplexními prvky. Je rozdělena v šest kapitol.

V první kapitole jsou definovány základní pojmy (regulární matice, transponovaná matice, inversní matice, charakteristická hodnota atd.). Jsou odvozeny základní věty o charakteristických hodnotách hermiteovských a čtvercových matic a dále klasické výsledky o ohraničení charakteristických hodnot matic (Bendixsonův, Frobeniův a Brownův).

Druhá kapitola má název „Kriteria regularity čtvercových matic". Je v ní odvozeno kriterium Hadamardovo a jsou připojeny jeho aplikace v geometrii a fysice (pro řešení elektrických obvodů). Dále je dokázáno kriterium Müllerovo z r. 1948 a kriteria Ostrowského z r. 1951. Např. první kriterium Ostrowského má následující znění: Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice, jejíž prvky jsou komplexní čísla. Nechť $P_i = \sum_{i \neq j, j=1}^{n} |a_{ij}|$, $Q_i = \sum_{j \neq i, j=1}^{n} |a_{ji}|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Potom podmínkou dostatečnou k tomu, aby A byla regulární matice, je existence reálného čísla α, pro něž platí $0 \leqq \alpha \leqq 1$ a pro $i = 1, \ldots, n$ $|a_{ii}| > P_i^{\alpha} Q_i^{1-\alpha}$. Pro $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 1$ dostáváme Hadamardovo kriterium. Několik dalších vět se pak zabývá otázkou regulárnosti matice A, jejíž prvky jsou v jistých vztazích k prvkům regulární matice B.

Kapitola třetí je věnována ohraničení oblastí v komplexní rovině, v níž leží charakteristické hodnoty dané matice $A = (a_{ij})$ s komplexními prvky. Metoda Geršgorinova je založena na kriteriu Hadamardově (charakteristické hodnoty jsou obsaženy ve sjednocení kruhů s hraničními kružnicemi o rovnicích $|a_{ii} - \lambda| = \sum_{j \neq i, j=1}^{n} |a_{ij}|$ $(i = 1, \ldots, n)$. Podobným způsobem je využito ostatních kriterií uvedených v kapitole 2. Na mnoha příkladech je ukázáno, jak kombinováním různých metod je možno získat poměrně velmi dobré ohraničení.

Kapitola čtvrtá se zabývá aplikacemi výsledků z předcházející kapitoly na problémy stability analogových počítacích strojů. Jedná se o řešení systému rovnic $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, při čemž je nutno zajistit, aby $A = (a_{ij})$ měla za reálné části svých charakteristických hodnot kladná čísla.

V kapitole páté jsou výsledky aplikovány na ohraničení kořenů polynomu $f(x)$ s komplexními koeficienty, při čemž se věty z kapitoly 3 aplikují na matici A, jejíž charakteristický polynom $|A - Ex|$ je roven $f(x)$.

V kapitole šesté se autor zabývá maticemi, jejichž prvky jsou polynomy.

Výklad je v knize srozumitelný a je doplněn množstvím numerických příkladů. Je však nutno upozornit, že ve větách na str. 45, 49 a 94 podmínky jsou pouze podmínkami dostatečnými pro uvedená tvrzení, nikoli i nutnými, jak se tvrdí, což si čtenář na nejjednodušších příkladech dokáže sám. Tvrzení, že podmínky jsou nutné, není v knize dále užito. Na tiskové chyby (je jich v knize poměrně dosti) není nutno zvlášť upozorňovat, poněvadž jsou většinou patrny při prvním pohledu na vzorec či tvrzení, v nichž se vyskytují.

Kniha podává dobrý, byť ne vyčerpávající přehled o probíraném thematu, zvláště o výsledcích dosažených v poslední době, mezi nimiž zaujímají čelné místo vlastní výsledky autorovy.

Milan Sekanina, Brno

K. Strubecker: VORLESUNGEN ÜBER DARSTELLENDE GEOMETRIE. Vyšlo jako XII. svazek sbírky „Studia mathematica" Výzkumného matematického ústavu v Oberwolfach; nakladatelství Vandenhoeck a Rupprecht, Göttingen, NSR, 1958, str. 324, obr. 202.

Látka je zpracována podle přednášek konaných během jednoho semestru na Vysoké škole technické v Karlsruhe. Toto hledisko je patrné z výběru látky i z jejího podání; často se např. opakují popisy konstrukcí téhož typu, třeba v kapitolách jednajících o průnicích ploch. To sice umožňuje čtenáři snadno sledovat konstrukci až do jejího úplného provedení, ale skrývá nebezpečí mechanického přejímání. V knize, která je určena pro posluchače všech směrů technického studia i pro posluchače matematiky a fysiky, postrádá se výklad látky „kolmá axonometrie“, „středové promítání“, „lineární perspektiva“, nutné pro posluchače směrů stavebních, právě tak jako úvod do „teorie zborcených ploch a ploch stavebně technické praxe“, jak se tradičně již přednáší na našich technických fakultách stavebního směru. Je tedy publikace zaměřena spíše pro posluchače směru strojního, jak o tom svědčí důkladněji zpracovaná látka o průnicích ploch a o plochách šroubových, tedy částí důležitých pro strojní praxi. Celý výklad je podložen při zobrazování objektů jen užitím Mongeovy projekce, až na vloženou kapitolu o kosoúhlém zobrazení.

Velkou předností knihy je jasný a přesný výklad uváděných pojmů a metod, což svědčí o pedagogické zkušenosti autorově i o jeho velké péči, kterou věnoval stylisaci textů a volbě ilustrací. Tento vzorný výklad by mohl posloužit mnohým mladším učitelům při přípravě lekcí. Autor zakládá převážně své výklady na metodách syntetické geometrie, které jsou vhodné pro posluchače technických směrů, nezapomíná však ani na užití analytických metod u mnohých k tomu vhodných částí látky a stále zdůrazňuje souvislost obou těchto metod a výhodné spojení jejich používání. Obrazce, ilustrující výklad, jsou velmi přehledné a instruktivní. Konečně velmi vhodné jsou literárně-historické poznámky o vývoji deskriptivní geometrie i o autorech, které doprovázejí výklad o zavádění nových pojmů a metod.

Látka je zpracována v sedmnácti kapitolách, které by bylo možno spojit asi v šest částí.

1. Z úvodních dvou kapitol se prvá zabývá objasněním úlohy deskriptivní geometrie a jejím historickým vývojem částečně zdůvodněným hospodářsko-praktickými hledisky.

Druhá osvětluje vlastnosti rovnoběžného promítání, incidenci útvarů, invarianci dělicího poměru, rovnoběžnost, Desarguesovu větu a zejména pojednává o perspektivní afinitě dvou rovinných útvarů a to analyticky pomocí velmi výhodných transformačních rovnic pro šikmou a kolmou osovou afinitu i pro elaci (Scherung). Poukazuje i na obecnou afinitu dvou polí (taktéž analyticky). Odvozených pojmů pak vhodně využívá v pojednání o elipse jako afinním obrazu kružnice, pro niž vysvětluje průměrové vlastnosti, příčkovou konstrukci, konstrukci Rytzovu a jiné. Je ukončena konstrukcemi oskulačních kružnic elipsy, které — až na konstrukci hyperoskulační kružnice — jsou podány bez důkazů. Je to jedna z nejhezčích kapitol knihy.

2. Další logický celek tvoří kapitoly III až V, které jsou věnovány vysvětlení metody Mongeovy projekce a nejjednodušším aplikacím. Je škoda, že autor metodu Mongeovy projekce tradičně váže na dvě sdružené průmětny podle základnice, ač moderní deskriptivní geometrie se přiklání k technické praxi, která tohoto způsobu užívá jen zcela výjimečně. Je však vhodné, že při volbě pravoúhlého souřadnicového systému označuje rovinu (yz) jako průmětnu druhou a osu y jako základnici x_{12}, čímž dociluje shody se souřadnicovým systémem užívaným v analytické geometrii prostoru.

Třetí kapitola je věnována základním pojmům o zobrazení bodu, přímky, roviny; zavádí pojem roviny souměrnosti a totožnosti a ukazuje, že půdorys a nárys téhož rovinného obrazce jsou afinně sdruženy ve směru ordinál s osou afinity v průsečnici roviny obrazce s rovinou totožnosti. Zavádí zde pro perspektivní afinitu pojem charakteristického dělicího poměru. Kapitola končí úvahou o rovnoběžném posunutí základnice v rovině totožnosti (i analyticky).

V kapitole čtvrté jsou zavedeny pojmy duálních útvarů v prostoru a v rovině, projektivního prostoru a roviny a vyřešeny tři základní úlohy polohy (rovina určená třemi body, průsečnice dvou rovin, průsečík přímky s rovinou), které spolu se šesti základními úlohami metrickými (délka úsečky, vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost bodu od přímky, velikost úhlu dvou přímek, velikost rovinného obrazce, úhel dvou rovin) tvoří autorovi podklad pro řešení úloh deskriptivní geometrie. Kromě zavedení pomocné průmětny a jejího použití a kolmého průmětu kružnice ukazuje autor souvislost a užití skoro všech dosud zavedených pojmů při řešení úlohy: Sestrojiti nárys trojúhelníka daného tvaru, je-li znám jeho půdorys.

V kapitole V jsou vysvětleny základní vlastnosti perspektivní kolineace mezi dvěma rovinami a užití při řezu na jehlanu. Ukázán postup sestrojení sítě jehlanu a hranolu i metody k určení průniků hranolů a jehlanů.

3. Základy kosoúhlé projekce podává autor v kapitole VI, kde zdůvodňuje dosud mlčky užívané znázorňující obrázky v předešlých kapitolách. Schwarzovým postupem dokazuje větu Pohlkeovu, krátce vysvětlí souvislost šikmé projekce s kosoúhlou axonometrií a kapitolu končí pojednáním o zářezové metodě, kde provádí důkaz linearity tohoto zobrazení.

4. Do další části možno shrnout kapitoly VII až X. V kapitole VII je pojednáno o rovinných řezech na rotační ploše válcové. Je upozorněno na komplexní rozšíření prostoru. V odstavci o rektifikaci kružnice je uvedena konstrukce Cusanova z r. 1450, která je v naší literatuře obvykle nazývána Sobotkova. Bez důkazu je tu zařazena věta Meusnierova a ukázáno její užití při komplanaci rovinných řezů na válci právě tak jako v následující kapitole VIII, kde jsou celkem tradičním způsobem vysvětleny vlastnosti rovinných řezů na rotační kuželové ploše. Že rovinným řezem na kosém kruhovém kuželi jsou kuželosečky, ukazuje v kapitole IX autor tak, že kosý kužel převádí elací na kužel rotační.

V kapitole X je pojednáno o ploše kulové, některých jejích polárních vlastnostech a zejména upozorněno, že její rovinný řez promítací rovinou, ať je reálný či imaginární, promítá se do dvojnásobně počítané přímky ve stopě roviny, což je pak vhodně využito při konstrukci průniků rotačních ploch s různoběžnými osami kulovou metodou.

5. Následující kapitoly — vyjma poslední — tvoří část náplně lekcí obvykle přednášených ve druhém semestru. V kapitole XI jsou podány v přehledu základní pojmy a věty z algebraické geometrie křivek a ploch, které jsou pak příležitostně podle potřeby doplňovány v dalších kapitolách. Zejména je zaveden pojem stupně algebraických útvarů (křivky a plochy) a stupeň jejich průniku. V kapitole XII je pojednáno o rotačních plochách obecných i kvadrikách a jejich tečných rovinách. Podrobněji je podán výklad o jednodílném hyperboloidu a poukázáno i na jeho přímkové reguly. V kapitole XIII jsou odvozeny rovinné řezy na rotačních plochách a konstrukce jejich tečen důsledným užitím metody normál nebo jako průsečnic roviny řezu s rovinou tečnou.

Další dvě kapitoly jsou věnovány průnikům ploch. V prvé z nich jsou probrány průniky rotačních kvadrik, a to zejména kuželů, válců a koule, jejich typy a konstrukce tečen pomocí metody tečných rovin či normál. Kapitola XV jedná o průniku obecných ploch a o určení obrysu rotačních ploch, speciálně anuloidu. Jak již bylo na počátku upozorněno, jsou v těchto kapitolách důsledně popisovány konstrukce bodů průnikových křivek a jejich tečen až do úplného provedení.

Nejobsáhlejší a nejsystematičtěji zpracovaná je kapitola XVI, jednající o šroubovici a šroubových plochách přímkových a cyklických. K určení tečny a tečných rovin resp. dotykových bodů je důsledně užíváno konstruktivně výhodného pólu resp. poláry a otočného pólu či poláry. Takto podložené teorie o šroubových plochách lze s výhodou užít při vyšetřování mezí vlastního stínu či obrysu šroubových ploch. Mnohé konstrukce jsou zdůvodněny i analyticky jako např. určení poloměrů oskulačních kružnic ve vrcholech normálních řezů.

6. Závěrečná kapitola o křivosti čar na ploše tvoří diferenciálně-geometrické rozšíření a doplnění předcházející látky, kterou obvykle pro nedostatek času nelze přednést v běžných kursech deskriptivní geometrie na technických fakultách. Jedná se hlavně o větách

Meusnierově a Eulerově a jejich aplikacích. Zavedením pojmu geodetická křivost, která je invariantní při deformaci ploch, nemusí pak autor uvažovat větu Catalanovu pro odvození poloměru oskulačních kružnic křivek při komplanaci rozvinutelných ploch. Kapitola končí vysvětlením pojmu Dupinovy indikatrice v regulárním bodě plochy a jejím použití při konstrukci asymptotických tečen v hyperbolickém bodě plochy i tečen ve dvojném bodě průnikové křivky dvou dotýkajících se ploch, nemají-li v bodě dotyku splývající oskulační paraboloidy, což by vedlo na styk vyššího řádu a k řešení rovnic nejméně třetího stupně.

R. Piska, Brno

SAMMELBAND DER ZU EHREN DES 250. GEBURTSTAGES LEONHARD EULERS DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN VORGELEGTEN ABHANDLUNGEN (Sborník pojednání předložených německé Akademii věd v Berlíně na počest 250. výročí dne narození Leonharda Eulera), Berlín, nakl. Akademie, 1959, X + 336 str., cena váz. 58,— něm. marek.

Tento sborník je druhým svazkem oslavného spisu k 250. výročí Eulerova narození. O prvém svazku, který vydala sovětská Akademie věd v Moskvě, jsem podal zprávu v tomto časopise, roč. 85, str. 117—120. Redaktorem německého svazku je prof. dr. Kurt Schröder, předseda Eulerovy komise berlínské Akademie věd. Stručná předmluva, podepsaná prof. Schröderem a prof. M. A. Lavrentjevem, předsedou Eulerovy komise sovětské Akademie věd, je překladem ruské předmluvy z I. svazku sborníku.

Jednotlivá pojednání jsou psána německy mimo italskou práci Bompianiovu a francouzskou práci Denjoyovu. Všechna pojednání jsou provázena ruským výtahem.

Jako ruský díl tak i tento německý díl Eulerova sborníku se zakládá na studiu archivního materiálu, ale v menší míře, což lze vysvětlit tím, že berlínský pobyt Eulerův byl o osm let kratší než jeho pobyt v Petrohradě, kde zemřel a kde jeho písemná pozůstalost přešla do archivu petrohradské Akademie věd. Zato podávají mnohé práce tohoto druhého dílu výsledky dnešního bádání, které se opírá o myšlenky Eulerovy a z nich vychází.

Stať bukureštského profesora *D. Barbiliana* „Analogon poučky o diskriminantu v neseparabilních rozšířeních“ (str. 1—20) je rozdělena do čtyř kapitol: I. Vytvoření pojmů. II. První věta o diskriminantu. III. Druhá věta o diskriminantu. IV. Úplná věta o diskriminantu. Autor se opírá o vzornou práci Emmy Nötherové z. r. 1927 a o metody Dedekindovy, uveřejněné r. 1882. Barbilian věnuje svou práci také památce tohoto významného německého matematika, od jehož smrti uplynulo r. 1956 čtyřicet let.

Cenné a dosud neznámé dokumenty z archivu berlínské Akademie věd uveřejňuje *Kurt R. Biermann* z Berlína v článku „Některá Euleriana z archivu německé Akademie věd v Berlíně“ (str. 21—34). Jsou to tři svazky rukopisů s opisy Eulerových prací, listiny týkající se Eulerovy činnosti ve službách Akademie, zvláště při vydávání kalendáře, listiny týkající se hvězdárny a dobrozdání, sepsané Eulerem o Schröderových modelech mlýnských strojů s omezeným třením hřídelů. Třístránkové faksimile Eulerova rukopisu vhodně doplňuje výklad.

Ve stati „Euler a kinematika“ (str. 35—41) ukazuje *W. Blaschke* z Hamburku, že Euler již v dopise ze 4. května 1748 uvedl pojem kvaternionu, s čímž souvisí Eulerovo parametrické zobrazení Eukleidova prostoru. Autor poukazuje na vztahy ke geometrii eliptické a k výzkumům W. K. Clifforda, A. P. Kotelnikova, J. Hjelmsleva a E. Studyho.

V další stati „O afinní kinematice“ (str. 42—48) týž autor přenáší v hlavních rysech na afinní rovinu to, co bylo vyšetřeno pro kinematiku v rovině Eukleidově od dob Eulerových.

Eulerův teorém o křivosti normálných řezů v bodě křivé plochy je jedním ze základních výsledků diferenciální geometrie. Římský profesor *E. Bompiani* podává ve stati „Geometrie diferenciálních prvků“ (str. 49—76) výsledky, jichž se dopracoval on a jeho spolupracovníci, vycházejíce z Eulerova teorému. Stať se skládá z těchto kapitol: Eulerův teorém a počátek geometrie diferenciálních elementů. Projektivní zevšeobecnění teorémů Eulerova a Meusnierova. Zobrazení diferenciálních elementů. Nepravidelné diferenciální elementy. Použití předchozích výsledků: a) Projektivní diferenciální geometrie ploch. b) Diferenciální prvky ve studiu algebraických útvarů. c) Diferenciální rovnice. d) Bodové transformace a neholonomní varieta. Zobrazení diferenciálních prvků v projektivní rovině. Pojednání Bompianiho je zakončeno obšírným seznamem literatury, vykazujícím 128 položek.

Českého čtenáře potěší, že se mezi vynikajícími autory tohoto sborníku setká také se zástupcem české vědy. Je jím brněnský profesor *O. Borůvka.* Jeho stať je nadepsána „Matyáš Lerch jakožto pokračovatel klasiků nauky o gamafunkci“ (str. 78—86). Po stručném životopisném nástinu a všeobecném přehledu Lerchovy vědecké činnosti obrací se autor k Lerchovým pracím o gamafunkci, pokračujícím na základech, položených Eulerem, Legendrem, Gaussem, Binetem, Cauchym, Kummerem a Weierstrassem. Asi 50 Lerchových prací je věnováno gamafunkci a s ní souvisícím teoriím. Připojený seznam literatury vykazuje 19 položek.

Viggo Brun z Oslo nadepsal svůj článek „Vícerozměrné algoritmy, které zobecňují Eulerův rozvoj čísla *e* v řetězový zlomek“ (str. 87—100). Autor tu vykládá pojem a užití vícerozměrných algoritmů, opíraje se o 8 literárních dokladů.

Moskevští profesoři *B. Delone* a *A. Vinogradov* píší „O souvislosti mezi Lagrangeovými třídami iracionalit s omezenými částečnými jmenovateli a třídami extrémních forem A. A. Markova“ (str. 101—108). Tento článek pojednává o vyjádření iracionalit řetězovými zlomky.

Poznámka „Souměrné první derivace“ (str. 109—111), kterou napsal *A. Denjoy,* hovoří o těchto derivacích a jejich integrálech.

„Zobecnění Abelových integrálů“ (str. 112—115) je obsahem článku *M. Eichlera* z Marburku. Vycházeje z algebraické korespondence Riemannovy konečné plochy vyvozuje autor několik vzorců, jichž důkazy spočívají na zobecnění Abelových integrálů.

P. Erdös z Birmingham-Haify píše „O některých problémech additivní číselné teorie“ (str. 116—119), jejichž konečné rozřešení a důkazy se dosud nepodařilo podat.

„O některých postupech aproximace funkcí“ (str. 120—129) pojednává *A. O. Gelfond* z Moskvy, používaje postupu S. N. Bernsteina.

Práce *H. Grella* z Berlína je nadepsána „Všeobecné prstence kvocientů a prstence kvocientů elementů v algebraických tělesech čísel“ (str. 130—138). Autor se tu opírá o své starší práce a o práci Dedekindovu a Kryllovovu.

Obšírná, bohatě doložená, důkladná a z hlediska historického velmi zajímavá je stať „Okolo prvých Eulerových studií o řadách“ (str. 139—208) od *I. E. Hofmanna* z Ichenhausenu. Po krátkém úvodě, literárních poukazech a přehledu Eulerových pramenů probírá známý německý historik matematiky: I. dějiny nauky o řadách před Eulerem a II. Eulerův přínos k této nauce. Svou práci končí autor seznamem jmen, zabírajícím tři a půl stránky, seznamem uvedených časopisů a sedm stran dlouhým chronologickým výčtem použitých dopisů a článků.

„Eulerovy výzkumy v jeho úvodu k algebře z hlediska moderní teorie čísel“ (str. 209 až 223) je nazvána stať *L. Holzera* z Rostocku. Autor tu rozšířil a doplnil některé Eulerovy výsledky a to elementárními prostředky, pokud to bylo možné.

Předmětem stati *A. P. Juškeviče* z Moskvy je „Euler a Lagrange o základech analysy“ (str. 224—244). Myšlenky Eulerovy jsou uloženy v neotištěném rukopise „Diferenciální počet" (kol r. 1738) a v jeho „Základech diferenciálního počtu" (z r. 1756). Na názory Eulerovy měla vliv kritika Berkleyho o infinitesimálním počtu. Autor ukazuje, že názory Eulerovy ovlivnily další vývoj diferenciálního počtu, což je zvláště patrno v Lagrangeově „Teorii analytických funkcí" (1797).

Přednáška *K. Kuratowského* z Varšavy „O konvergenci množin" (str. 245) je tu uvedena jen v německém a ruském výtahu. Přednáška se zabývala zpřesněním podmínky Hausdorffovy o konvergenci množin.

„Zetafunkce vyjádřené součinovými zobrazeními" (str. 246—255) je název článku *E. Lamprechta* z Würzburku. Autor rozdělil svůj výklad do tří paragrafů: Součinové zobrazení a invariantní funkce. Srovnání s Kählerovými zetafunkcemi. Poznámky k obecnému případu. Článek končí seznamem jedenácti literárních pramenů.

G. K. Michajlov z Moskvy uveřejňuje „Poznámky o neuveřejněných rukopisech Leonharda Eulera" (str. 256—280 a 20 faksimile uvedených rukopisů). Z dosud neznámých Eulerových rukopisů Michajlov pojednává o několika pracích z Eulerova mládí, podává celkový přehled tří rukopisných konvolutů (celkem 4000 stránek), probírá Eulerovy zápisníky a podává historicko-biografické dokumenty.

V článku „Analogon Tarryova problému pro exponenciální funkce" (str. 281—283) uvádí *A. G. Postnikov* z Moskvy řešení jisté diofantické rovnice.

„O volných soustavách tvořících útvarů grupy dráhy souvislého grafu" (str. 284—292) pojednávají *K. Reidemeister* a *A. Brandis* z Götingen.

„Eulerova čísla" (str. 293—310) si zvolil za látku své práce *H. Salé* z Lipska. Mluví se zde o Eulerových číslech a Eulerových mnohočlenech a o jejich významu v teorii čísel.

„O symetrických algebraických integrálních rovnicích" (str. 311—314) pojednává *W. Schmeidler* z Berlína-Frohnau. K nejdůležitějším výkonům Eulerovým patří formulace úlohy variačního počtu a poznatek, že pro extremální funkci platí tzv. Eulerova rovnice. Autor se zabývá použitím Eulerovy rovnice na řešení integrálních rovnic.

C. L. Siegel z Götingen přináší příspěvek „K prehistorii Eulerova addičního teorému" (str. 315—318).

„Poznámky o analytických funkcích definovaných celistvými relacemi" (str. 319—321) je obsah článku *S. Stoilova* z Bukurešti.

P. Turán z Budapešti podává příspěvek „K nauce Dirichletových řad" (str. 322—326), vycházeje z jisté Riemannem tušené poučky z aritmetiky.

Z tohoto stručného přehledu obsahu 2. svazku jubilejního sborníku Eulerova je zřejmo, že tento svazek upoutá zájem nejen historiků matematiky, nýbrž i čtenářů, jejichž pozornost se obrací k výsledkům moderního bádání a kteří v něm naleznou mnoho zajímavého.

Quido Vetter, Praha