David Preiss

Bemerkung zu einem Problem von V. Jarník

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 2, 146--149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108359

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

BEMERKUNG ZU EINEM PROBLEM VON V. JARNÍK

DAVID PREISS, Praha

(Eingelangt am 1. April 1968)

In diesem Artikel werden die von V. JARNÍK in der Arbeit [1] eingeführten und für diese Gelegenheit regelmässig genannten Mengen vollkommen charakterisiert. Dadurch wird das in dieser Arbeit gestellte Problem gelöst und zugleich wird auf Beispielen gezeigt, dass gewisse Sätze von [1] nicht umkehrbar sind.

In der angeführten Arbeit [1] löst V. Jarník das folgende Problem:

Es sei $F \subset E_1$ eine abgeschlossene Menge. Im Bereich F seien fünf Funktionen f, d^+, d_+, d^-, d_- mit folgenden Eigenschaften gegeben.

1. *f ist eine endliche reelle Funktion im Bereich F.*

2. *Wenn x ein Häufungspunkt in F von rechts ist, dann ist*

$$d^+(x) = \limsup_{\substack{\xi \to x+ \\ \xi \in F}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \quad d_+(x) = \liminf_{\substack{\xi \to x+ \\ \xi \in F}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x},$$

wenn $x \in F$ kein Häufungspunkt in F von rechts ist, dann ist $-\infty \leqq d_+(x) \leqq \leqq d^+(x) \leqq +\infty$ (ähnlicherweise für d^-, d_-).

Es ist eine endliche Funktion φ im Bereich E_1 zu finden, so dass für alle $x \in F$ die Beziehungen

$$\varphi(x) = f(x), \quad \limsup_{\xi \to x+} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{\xi - x} = d^+(x)$$

und ähnliche für d_+, d^-, d_- gelten.

In [1] wurde folgender Satz bewiesen:

Satz. *Es sei eine abgeschlossene Menge F gegeben. Zu jeden fünf Funktionen f, d^+, d_+, d^-, d_- existiert genau dann eine Funktion φ mit den verlangten Eigenschaften, wenn die Menge F regelmässig ist.*

Definition. Sei $F \subset E_1$ abgeschlossen. Wir schreiben $E_1 - F = \bigcup_n I_n$, wobei rechts eine punktfremde Vereinigung offener Intervalle steht. Die Menge F nennen wir *regelmässig*, wenn es eine positive Folge $\chi(n)$ gibt, so dass für jedes $x \in F$ eine Zahl n_x so existiert, dass für alle $n > n_x$ der Wert $\chi(n)$ kleiner als die Entfernung des Punktes x vom Intervall I_n ist.

In der Arbeit [1] beweist V. Jarník die folgenden Sätze:

Satz A. *Wenn F eine abgeschlossene Menge mit einer abzählbaren Grenze ist, dann ist F regelmässig.*

Satz B. *Wenn es ein offenes Intervall I gibt so, dass $\overline{F \cap I}$ nirgendsdicht und perfekt ist, dann ist F nicht regelmässig.*

Satz C. *Wenn F perfekt und regelmässig ist, dann gibt es eine Folge abgeschlossener Intervalle $\{F_n\}$ so, dass $F = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}$.*

Satz D. *Ist F eine abgeschlossene Menge, deren Grenze regelmässig ist, dann ist F auch regelmässig.*

Satz E. *Wenn F eine abgeschlossene Menge ist, $F = D \cup S$, wo D perfekt und S abzählbar ist und wenn D regelmässig ist, dann ist auch F regelmässig.*

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist der folgende Satz:

Satz 1. *Sei F abgeschlossen, $F = D \cup S$, wo D eine perfekte oder leere und S eine abzählbare Menge ist und dabei sei $D \cap S = \emptyset$.* (So eine Zerlegung ist nach dem Cantor-Bendixsonschen Satz möglich, vgl. [2], Seite 161). *Sei $E_1 - D = \bigcup_n (a_n, b_n)$, wobei rechts eine punktfremde Vereinigung ist. Sei K die Menge aller Punkte a_n, welche nicht Häufungspunkte von rechts der Menge S und aller Punkte b_n, welche nicht Häufungspunkte von links der Menge S sind. Dann ist F genau dann regelmässig, wenn jede nichtleere Untermenge der Menge K einen isolierten Punkt enthält.*

Beweis. 1. Sei $\emptyset \neq K_1 \subset K$ und sei K_1 dicht zerlegt. Der Einfachkeit halber beschränken wir uns nur auf den Fall, wo K_1 nur Punkte a_n enthält (im allgemeinen Fall ist der Beweis ähnlich).

Sei $\chi(n)$ eine beliebige positive Folge und legen wir $\psi(n) = \min(\chi(n), 1/n)$. Sei $a_{n_1} \in K_1$, a_{n_1} ist ein Anfangspunkt von irgendeinem I_{m_1} und legen wir $F_1 = \langle a_{n_1} - \psi(m_1), a_{n_1} \rangle$. Da K_1 dicht zerlegt ist, gibt es ein $a_{n_2} \in K_1 \cap F_1^0$ derartig, dass $\langle a_{n_2}, b_{n_2} \rangle \subset F_1$ ist; legen wir $F_2 = \langle a_{n_2} - \psi(m_2), a_{n_2} \rangle \cap F_1$ wo a_{n_2} Anfangspunkt von I_{m_2} ist. Induktiv definieren wir weiter die Folge $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann enthält $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ genau einen Punkt x, es gilt $x \in F$ und für x ist die Definition der Regelmässigkeit mit der Funktion $\chi(n)$ nicht erfüllt.

2. Jede nichtleere Untermenge der Menge K enthalte einen isolierten Punkt. Zu jeder Ordinalzahl $\alpha \leqq \Omega$. (Ω ist die erste nichtabzählbare Ordinalzahl) bestimmen wir folgenderweise eine Menge M_α reeller Zahlen:

(i) $M_0 = K$.

(ii) Wenn die Mengen M_α für alle $\alpha < \beta$ definiert sind, dann legen wir $M_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha - (\bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha)^*$ wo N^* die Menge aller isolierten Punkte der Menge N bedeutet. Für $\alpha \neq \beta$ sind M_α^*, M_β^* punktfremd, wenn $M_\alpha \neq \emptyset$ ist, ist auch $M_\alpha^* \neq \emptyset$ und ist also $M_\Omega = \emptyset$ nachdem es nur abzählbar viele nichtleere Mengen M_α^* gibt. Wenn $x \in K$ ist, existiert die kleinste Ordinalzahl β, so dass $x \notin M_\beta$ und also $x \in (\bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha)^*$ ist. Wählen wir $\delta(x) > 0$ derart, dass $(x - \delta(x), x + \delta(x)) \cap \bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha = \{x\}$ ist. Sei $E_1 - F = \bigcup_m I_m$. Nachdem $\langle a_n, b_n \rangle \cap F$ abgeschlossen und abzählbar ist, hat diese Menge eine abzählbare Grenze und ist also dem Satz A nach regelmässig; zu jedem benachbarten Intervall dieser Menge bestimmen wir, der Definition ihrer Regelmässigkeit nach, eine positive Zahl. Jedes Intervall I_m ist eine Teilmenge von irgendeinem Intervall (a_n, b_n) und ist also auch ein benachbartes Intervall der Menge $\langle a_n, b_n \rangle \cap F$. Wählen wir $\chi(m) > 0$, $\chi(m) < 1/m$ so, dass dieses kleiner als die dem Intervall I_m der Definition der Regelmässigkeit von $\langle a_n, b_n \rangle \cap F$ gemäss gehörende Zahl ist und dass die Entfernung des Punktes a_n von I_m (insofern diese positiv ist) grösser als $\chi(m)$ ist (analogisch für b_n) und dass $\chi(m) < \delta(a_n)$, $\chi(m) < \delta(b_n)$ ist, sobald eine dieser Zahlen definiert ist (d. h. insofern $a_n \in K$ bzw. $b_n \in K$ ist). Wenn F nicht regelmässig wäre, dann würde ein $x \in F$ so existieren, dass $\varrho(x, I_m) \leqq \chi(m)$ für unendlich viele m wäre. Von der Konstruktion der Funktion $\chi(m)$ (nach der Regelmässigkeit der Mengen der Form $F \cap \langle a_n, b_n \rangle$ und von der Tatsache, dass $\lim_{m\to\infty} \chi(m) = 0$ ist) folgt $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, d. h. $x \in D$. Zwischen den Intervallen I_m, für welche $\varrho(x, I_m) \leqq \chi(m)$ gilt, existieren also unendlich viele Intervalle der Form $I_m = (a_k, b)$ bzw. $I_m = (a, b_k)$ mit einem fassenden k für welche $\varrho(x, I_m) = a_k - x$ bzw. $\varrho(x, I_m) = x - b_k$ gilt. Die zugehörigen Werte a_k bzw. b_k gehören offenbar zu der Menge K. Es gibt also eine von denen gewählte monotone Teilfolge $x_k \in K$, $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Sei z. B. $x_1 > x_2 > \ldots > x$. Der Konstruktion der Funktion χ nach ist $x \in (x_n - \delta(x_n), x_n)$ also ist $x_i \in (x_j - \delta(x_j), x_j)$ für $i > j \geqq 1$. Zu jedem x_n bestimmen wir die kleinste Ordinalzahl α_n so, dass $x_n \notin M_{\alpha_n}$ ist, dann ist für $i > j \geqq 1$ notwendig $\alpha_i < \alpha_j$. Wir erhalten so eine unendliche fallende Folge von Ordinahlzahlen, was einen Widerspruch liefert. Die Menge F ist also regelmässig.

Zum Schluss führen wir noch einige Beispiele an, welche zeigen, dass man keinen der Sätze A – E umkehren kann.

Bezeichne M das Cantorsche Diskontinuum auf $\langle 0, 1 \rangle$ und sei $E_1 - M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, wobei die Vereinigung rechts punktfremd ist.

Beispiel 1. Zu jedem beschränkten Intervall (a_n, b_n) wählen wir eine abzählbare Menge $S_n \subset (a_n, b_n)$, welche genau zwei Häufungspunkte und zwar a_n, b_n besitzt. Legen wir $F = M \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Nach dem Satz 1 ist F regelmässig, wobei

(i) F hat eine nichtabzählbare Grenze und der Satz A ist so nicht umkehrbar.

(ii) $F = M \cup S$, wo M perfekt ist, S abzählbar, wobei M nach dem Satz B nicht regelmässig ist. Den Satz E kann man also auch nicht umkehren.

Beispiel 2. Es seien $l_1, l_2, l_3, \ldots$ die der Grösse nach geordneten Längen der beschränkten Intervalle (a_n, b_n); bezeichne man G die Vereinigung aller Intervalle der Längen $l_1, l_3, l_5, \ldots$ Sei $F = M \cup G$. Vom Satz 1 folgt, dass F nicht regelmässig ist, die Voraussetzung des Satzes B ist aber offenbar nicht erfüllt und man kann also diesen Satz nicht umkehren. Zugleich ist F perfekt, es ist die Behauptung des Satzes C erfüllt, aber die Voraussetzung gilt nicht. Man kann also den Satz C nicht umkehren.

Beispiel 3. Wählen wir S_n wie im Beispiel 1, G wie im Beispiel 2. Legen wir $F = M \cup G \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Dem Satz 1 nach ist F regelmässig aber nach demselben Satz ist deren Grenze nicht regelmässig und man kann also auch den Satz D nicht umkehren.

Literatur

[1] *V. Jarník:* O rozšíření definičního oboru funkcí jedné proměnné, při němž zůstává zachována derivabilita funkce. Rozpravy akademie *32* (1923).

[2] *V. Jarník:* Diferenciální počet II, Praha 1956.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).