Václav Vodička

Poznámka o Hermiteových polynomech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 1, 106--107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108343

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O HERMITEOVÝCH POLYNOMECH

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň

Dokážeme, že posloupnost Hermiteových polynomů (1) je posloupností Turánova typu.

Hermiteovy polynomy

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

vyhovují známým vztahům

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

S pomocí rekurentních vzorců (2) vychází pro každé celé $\nu \geqq 1$ a pro kteroukoli dvojici komplexních čísel x, y snadno

$$2(x - y) H_\nu(x) H_\nu(y) = [H_{\nu+1}(x) + 2\nu H_{\nu-1}(x)] H_\nu(y) - \\ - H_\nu(x) [H_{\nu+1}(y) + 2\nu H_{\nu-1}(y)] = H_{\nu+1}(x) H_\nu(y) - H_\nu(x) H_{\nu+1}(y) - \\ - 2\nu[H_\nu(x) H_{\nu-1}(y) - H_{\nu-1}(x) H_\nu(y)].$$

Při každém přirozeném ν tedy můžeme pro jakákoli dvě komplexní čísla x, y psát

$$2(x - y) H_\nu(x) H_\nu(y) = A_\nu(x, y) - 2\nu A_{\nu-1}(x, y), \tag{4}$$

$$A_\nu(x, y) = H_{\nu+1}(x) H_\nu(y) - H_\nu(x) H_{\nu+1}(y), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

a odtud dostaneme pro všechna celá $n \geqq 1$ základní vztah

$$2(x - y) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2^{n-\nu} n!}{\nu!} H_\nu(x) H_\nu(y) = A_n(x, y) - 2^{n+1} n!(x - y);$$

dá se zřejmě psát také ve tvaru vzorců

$$2(x - y) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^\nu \nu!} H_\nu(x) H_\nu(y) = \frac{1}{2^n n!} A_n(x, y), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Derivujeme-li (5) podle y a položíme pak $y = x$, dostaneme s pomocí vztahů (3) a definičních vzorců (4.1) zajímavé formule

$$(6) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_\nu^2(x)}{2^\nu \nu!} = \frac{1}{2^n n!} \left[(n+1) H_n^2(x) - n\, H_{n-1}(x)\, H_{n+1}(x)\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots ;$$

platí pro všechna komplexní x.

Omezíme-li se na reálné hodnoty x, vedou právě získané vztahy (6) k nerovnostem

$$(7) \quad H_n^2(x) \geqq -\frac{n}{n+1} H_{n-1}(x)\, H_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Když ve vzorcích (6) píšeme $n + 1$ místo n, dostáváme snadno jejich další důsledky

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_\nu^2(x)}{2^\nu \nu!} = \frac{1}{2^{n+1} n!} \left[H_{n+1}^2(x) - H_n(x)\, H_{n+2}(x)\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots ;$$

tyto formule opět platí pro každé komplexní x.

Omezíme-li se ve vzorcích (8) na reálná x, vidíme, že platí

$$(9) \quad H_{n+1}^2(x) - H_n(x)\, H_{n+2}(x) \geqq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a že je tudíž posloupnost

$$(10) \quad H_0(x),\ H_1(x),\ H_2(x),\ \ldots$$

při každém reálném x posloupností Turánova typu.