

Václav Vodička

Poznámka o Hermiteových polynomech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 1, 106--107

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108343>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

R Ů Z N Ě

POZNÁMKA O HERMITEOVÝCH POLYNOMECH

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň

Dokážeme, že posloupnost Hermiteových polynomů (1) je posloupností Turánova typu.

Hermiteovy polynomy

$$(1) \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

vyhovují známým vztahům

$$(2) \quad H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(3) \quad \frac{dH_n(x)}{dx} = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

S pomocí rekurentních vzorců (2) vychází pro každé celé $v \geq 1$ a pro kteroukoli dvojici komplexních čísel x, y snadno

$$\begin{aligned} 2(x-y) H_v(x) H_v(y) &= [H_{v+1}(x) + 2v H_{v-1}(x)] H_v(y) - \\ &- H_v(x) [H_{v+1}(y) + 2v H_{v-1}(y)] = H_{v+1}(x) H_v(y) - H_v(x) H_{v+1}(y) - \\ &- 2v[H_v(x) H_{v-1}(y) - H_{v-1}(x) H_v(y)]. \end{aligned}$$

Při každém přirozeném v tedy můžeme pro jakákoli dvě komplexní čísla x, y psát

$$(4) \quad 2(x-y) H_v(x) H_v(y) = A_v(x, y) - 2v A_{v-1}(x, y),$$

$$(4.1) \quad A_v(x, y) = H_{v+1}(x) H_v(y) - H_v(x) H_{v+1}(y), \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

a odtud dostaneme pro všechna celá $n \geq 1$ základní vztah

$$2(x-y) \sum_{v=1}^n \frac{2^{n-v} n!}{v!} H_v(x) H_v(y) = A_n(x, y) - 2^{n+1} n!(x-y);$$

dá se zřejmě psát také ve tvaru vzorců

$$(5) \quad 2(x-y) \sum_{v=0}^n \frac{1}{2^v v!} H_v(x) H_v(y) = \frac{1}{2^n n!} A_n(x, y), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Derivujeme-li (5) podle y a položíme pak $y = x$, dostaneme s pomocí vztahů (3) a definičních vzorců (4.1) zajímavé formule

$$(6) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{H_{\nu}^2(x)}{2^{\nu}\nu!} = \frac{1}{2^n n!} [(n+1)H_n^2(x) - nH_{n-1}(x)H_{n+1}(x)], \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

platí pro všechna komplexní x .

Omezíme-li se na reálné hodnoty x , vedou právě získané vztahy (6) k nerovnostem

$$(7) \quad H_n^2(x) \geq -\frac{n}{n+1} H_{n-1}(x) H_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Když ve vzorcích (6) píšeme $n+1$ místo n , dostáváme snadno jejich další důsledky

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{H_{\nu}^2(x)}{2^{\nu}\nu!} = \frac{1}{2^{n+1}n!} [H_{n+1}^2(x) - H_n(x)H_{n+2}(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

tyto formule opět platí pro každé komplexní x .

Omezíme-li se ve vzorcích (8) na reálná x , vidíme, že platí

$$(9) \quad H_{n+1}^2(x) - H_n(x)H_{n+2}(x) \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a že je tudíž posloupnost

$$(10) \quad H_0(x), H_1(x), H_2(x), \dots$$

při každém reálném x posloupností Turánova typu.