Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

REFERÁTY

POJEM ZÁVISLOSTI V ALGEBŘE

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA, konané 21. května 1962 na matematicko-fyzikální fakultě KU)[1])

Problému axiomatizace pojmu závislosti v matematice byla zasvěcena řada prací. Metody řešení této otázky — často dané účelem, pro který je příslušný axiomatický systém konstruován — liší se mnohdy již volbou primitivního nedefinovaného objektu (i když systémy jsou někdy ekvivalentní). Binární relace „prvek (či množina) závisí na množině“[2]) je primitivním objektem jednoho z prvních axiomatických systémů, systému B. L. VAN DER WAERDENA (Moderne Algebra I, 1937) a velmi příbuzných systémů O. TEICHMÜLLERA (1939), G. PICKERTA (1951), A. KERTÉSZE (1960), M. N. BLEICHERA a G. B. PRESTONA (1961) a K. G. JOHNSONA (1961); axiomatické systémy založené na pojmu nezávislé (či závislé) množiny studoval H. WHITNEY (1935), T. NAKASAWA (1935—1936), O. HAUPT, G. NÖBELING a CHR. PAUC (1939) a R. RADO (1943) a systémy založené na pojmu „hodnostní“ funkce H. Whitney (1935) a R. Rado (1949); axiomatizaci závislosti pomocí uspořádání (svazů) podal S. MAC LANE (1938), pomocí operace uzávěru N. BOURBAKI (1950) a J. SCHMIDT (1956) a pomocí algebraických operací E. MARCZEWSKI (1958—1960). Přednášející zhodnotil jednotlivé axiomatické systémy a osvětlil hlavně důležitost „tranzitivního axiomu“ (uvedeného často v různých implicitních formách) při studiu závislosti a odvození základního invariantu — hodnosti (dimense, stupně).

Kromě jiných otázek zahrnuje problém axiomatizace závislosti následující dva důležité body:

(a) zahrnutí různých speciálních pojmů závislosti (lineární závislosti ve vektorových prostorech, algebraické závislosti v teorii těles, závislosti v Abelových grupách apod.) a

(b) možnost vybudování obecného invariantu — hodnosti či dimense uvažované struktury.

K porovnání různých axiomatických systémů se tudíž nabízí toto hrubé kritérium: S jakým úspěchem splňuje daný axiomatický systém požadavky (a) a (b). Z tohoto

[1]) Přednášku s obdobným tématem proslovil autor za svého pobytu v NDR dne 20. června 1962 v I. Matematickém institutu university Martina Luthera, Halle-Wittenberg.

[2]) Často je užito ve formulaci místo množin, posloupností.

hlediska mají shora uvedené systémy společný rys: systémy, umožňující splnění podmínky (b), jsou až na jisté modifikace (zahrnující rozšíření na nekonečné množiny) ekvivalentní van der Waerdenovu axiomatickému systému. Žádný z nich tudíž nepokrývá důležitý pojem závislosti v Abelových grupách, studovaný nezávisle T. SZELEM a autorem.

Jádrem přednášky bylo zavedení relace závislosti, která je zobecněním dosavadních pojmů a zahrnuje též grupovou závislost. Jde o řešení problému položeného T. Szele v J. reine angew. Math., *188* (1950), 167–192. Primitivním objektem je relace „prvek závisí na množině", tj. binární relace mezi danou množinou a její potenční množinou. Tato relace určuje jednoznačně třídu všech nezávislých množin, avšak opak neplatí. V tomto smyslu je zvolený postup a priori obecnější než při jiné volbě primitivního objektu.

Přednášející zavedl pojem OA-závislostní struktury, jakožto množiny $\bar{S}$ s OA-závislostí, tj. binární relací $\delta \subseteq \bar{S} \times \mathfrak{P}\bar{S}$ mezi $\bar{S}$ a potenční množinou $\mathfrak{P}\bar{S}$, která splňuje jistých 6 axiomů (I)–(VI). Kromě prvních dvou podmínek, určujících chování tzv. neutrálních a singulárních prvků a vyjadřujících finitní charakter závislosti (a zaručujících existenci maximálních nezávislých množin), odpovídají zbývající podmínky axiomům van der Waerdena. Tak (III) spolu s (VI) odpovídá prvnímu a (IV) je zobecněním druhého van der Waerdenova postulátu. Nejtypičtějším rysem zavedeného axiomatického systému je vynechání „tranzitivního axiomu"; nicméně (V) je oslabenou náhražkou tohoto požadavku. V důsledku toho není operace $X \to \mathrm{cl}(X)$, kdež $\mathrm{cl}(X)$ je množina všech (regulárních) prvků závislých na X, idempotentní; odpovídající nejmenší idempotentní operace uzávěru podává obecně velmi hrubé informace a je při studiu (i v případě grupové závislosti) téměř bez užitku.

V přednášce byl též uveden ekvivalentní systém axiomů (1)–(6) formálně silnější a ukázána logická nezávislost axiomů obou systémů. Poslední axiom (VI) zaručující, že prvek závisí na množině, jejímž je členem, není pro další studium podstatný; platí totiž věta:

Ke každé relaci $\varrho \subseteq \bar{S} \times \mathfrak{P}\bar{S}$ *s vlastnostmi* (I)–(V) existuje *OA-závislost δ na $\bar{S}$ taková, že příslušné třídy ϱ-nezávislých a δ-nezávislých množin jsou identické.*

Přednášející pak uvedl některé vlastnosti nezávislých množin, zavedl pojem hodnosti (jakožto mohutnost jistých maximálních nezávislých množin, tzv. kanonických) a naznačil důkaz invariance tohoto pojmu. Následující dvě lemmata potřebná k důkazu možno interpretovat jakožto zobecnění Steinitzovy věty o výměně:

Je-li I nezávislá a C kanonická množina taková, že $I \subseteq \mathrm{cl}(C)$, *potom pro každou podmnožinu* $I' \subseteq I$ *platí* $C \nsubseteq \mathrm{cl}(I')$.

Nechť I_1 a I_2 jsou dvě nezávislé množiny a $I_2 \subseteq \mathrm{cl}(I_1)$. *Potom existuje podmnožina $I_0 \subseteq I_1$ taková, že $I_2 \cup I_0$ je nezávislá množina a (kromě* $I_2 \cup I_0 \subseteq \mathrm{cl}(I_1)$) *je* $I_1 \subseteq \mathrm{cl}(I_2 \cup I_0)$.

Základní vlastnosti hodnosti $r(\bar{S})$ OA-závislostní struktury $\bar{S}$ mohou být pak formulovány větou takto:

a) *Jestliže I^* je maximální nezávislá množina, potom*

$$\operatorname{card}(I^*) \leqq r(\bar{S}).$$

b) *Jestliže C^* je maximální kanonická množina, je*

$$\operatorname{card}(C^*) = r(\bar{S}).$$

Stručně bylo též pojednáno o rozkladech a spojeních OA-závislostních struktur, zachovávajících „linearitu“ hodnostní funkce, a ukázány aplikace získaných výsledků, hlavně v teorii Abelových grup.

Nakonec uvedl přednášející tři bezprostřední problémy, které studium přináší:

1. Nalézt ekvivalentní axiomatický systém, který by užíval primitivního pojmu nezávislé množiny.

2. Podat reprezentaci OA-závislostní struktury pomocí podmnožin jisté množiny (s operací inkluse).

3. Doplnit systém vhodnými podmínkami, aby rozšířený axiomatický systém charakterizoval grupovou závislost (na tento problém upozornil autora prof. R. RADO).

Plné znění tvrzení a důkazů bude publikováno v časopise Publicationes Mathematicae, Debrecen.

Vlastimil Dlab, Chartúm (Súdán)