Časopis pro pěstování matematiky

David Preiss; Jaromír Uher

Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 4, 345--347

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108338`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

POZNÁMKA K VĚTĚ O SUBSTITUCI PRO RIEMANNŮV INTEGRÁL

DAVID PREISS, JAROMÍR UHER, Praha

(Došlo dne 18. března 1968)

V článku [5] je uveden elementární důkaz (pocházející od ROY O. DAVIESE [1]) následující věty o substituci pro Riemannův integrál, kterou dokázal H. KESTELMAN v práci [3]:

Věta 1. *Nechť funkce g má Riemannův integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme $s \in \langle a, b\rangle$ pevně a položme $G(t) = \int_s^t g(w)\,\mathrm{d}w$ pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$. Nechť funkce f má v intervalu $G(\langle a, b\rangle) = \mathsf{E}[G(t);\ t \in \langle a, b\rangle]$ Riemannův integrál. Potom existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t$ a rovná se $\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Tím byla také řešena úloha J. MAŘÍKA (Časopis pro pěstování matematiky *81* (1956), str. 247, úloha č. 2). Tuto úlohu jsme řešili nezávisle poněkud jiným postupem touto větou:

Věta 2. *Nechť funkce g má Riemannův integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme $s \in \langle a, b\rangle$ pevně a položme $G(t) = \int_s^t g(w)\,\mathrm{d}w$ pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$. Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle c, d\rangle = G(\langle a, b\rangle)$. Potom platí:*

Existuje-li jeden z integrálů (Riemannových) $\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$, existuje i druhý a platí rovnost

$$\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Větu 2 dostaneme z věty 1 a z následujícího tvrzení:

Tvrzení: *Buďte splněny předpoklady věty 2 a nechť existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t$. Potom také existuje Riemannův integrál $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Analogicky jako v [5] zachováváme následující úmluvy a označení: Je-li v funkce omezená na intervalu I, pak oscilací funkce v na intervalu I nazveme číslo $\operatorname{osc}[v, I] = \sup_{t\in I} v(t) - \inf_{t\in I} v(t)$. Je-li $I = \langle a, b\rangle$ uzavřený interval, klademe $d(I) = b - a$.

Místo slov „Riemannův integrál" hovoříme krátce o integrálu atp. Při důkazu tvrzení použijeme podstatným způsobem následujícího kriteria (viz [4], str. 217–8, nebo [5], věta B):

Lemma. *Budiž v funkce omezená v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom v má integrál od α do β, právě když k libovolným číslům $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ existuje rozdělení D intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že součet délek $d(I)$ všech intervalů I rozdělení D, pro něž platí $\operatorname{osc}[v, I] > \eta_1$, je menší než η_2.*

Důkaz tvrzení. V důkazu se můžeme zřejmě omezit na případ, kdy f je kladná funkce.

Buďte splněny předpoklady věty 2 a nechť existuje $\int_a^b f(G(t))\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Buď M takové číslo, $M > 1$, $M > b - a$, že platí $|g(t)| < M$, $|f(G(t))\, g(t)| < M$ pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$.

a) Buďte ε, δ daná kladná čísla, $\varepsilon < 1$, $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$. Podle lemmatu existuje rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že součet délek všech intervalů $I \in D$, pro něž platí buď $\operatorname{osc}[g, I] \geqq \delta$ nebo $\operatorname{osc}[f(G)\, g, I] \geqq \delta$, je menší než ε. Buď D_0 systém všech intervalů rozdělení D, na nichž G není konstantní. Položme

$$D_1 = \{I \in D_0; \operatorname{osc}[g, I] < \delta, \operatorname{osc}[f(G)\, g, I] < \delta\}\,,$$
$$D_2 = \{I \in D_1; \inf_{t \in I} |g(t)| > \tfrac{1}{2}\varepsilon\},\ D_3 = D_1 - D_2,\ D_4 = D_0 - D_1\,.$$

Je-li I uzavřený interval, $I \subset \langle a, b\rangle$, a je-li N takové číslo, že pro všechna $t \in I$ je $|g(t)| \leqq N$, pak pro libovolná $t_1, t_2 \in I$ je $|G(t_1) - G(t_2)| \leqq N|t_1 - t_2|$ a tedy $d(G(I)) \leqq N\, d(I)$. Z definice systému D_3, D_4 a odtud snadno plyne, že

$$\sum_{I \in D_3 \cup D_4} d(G(I)) \leqq \varepsilon(b - a) + M\varepsilon < 2M\varepsilon\,. \tag{1}$$

b) Zvolme pevné $I \in D_2$ a buď $h = \inf_{t \in I} f(G(t))\, g(t)$, $H = \sup_{t \in I} f(G(t))\, g(t)$. Podle definice systému D_2 je $\inf_{t \in I} |g(t)| > \frac{1}{2}\varepsilon$, $\operatorname{osc}[g, I] < \delta$, $\operatorname{osc}[f(G)\, g, I] < \delta$, tj. $H - h < \delta$. Kdyby funkce g nabývala na intervalu I kladných i záporných hodnot, bylo by $\operatorname{osc}[g, I] > \varepsilon$, což není možné, neboť $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že g je kladná na intervalu I, a tedy pro vhodné $z > \frac{1}{2}\varepsilon$ je $g(I) \subset (z, z + \delta)$. Pro libovolné $t \in I$ je proto $h/(z + \delta) < f(G(t)) < H/z$, a tedy

$$\operatorname{osc}[f, G(I)] \leqq \frac{H}{z} - \frac{h}{z + \delta} = \frac{H - h}{z + \delta} + \frac{\delta H}{z(z + \delta)} \leqq \tag{2}$$
$$\leqq \delta\left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{4M}{\varepsilon^2}\right) < \delta\, \frac{6M}{\varepsilon^2}\,.$$

c) Lemma lze formulovat také takto: Budiž v funkce omezená v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom v má integrál od α do β právě tehdy, když k libovolným číslům $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ existují takové uzavřené intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_n, J_1, J_2, \ldots, J_m$, že $\langle\alpha, \beta\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} J_j$, $\sum_{j=1}^{m} d(J_j) < \eta_2$ a že $\operatorname{osc}[v, I_i] < \eta_1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Označme $I_1, I_2, \ldots, I_n$ všechny intervaly $G(I), I \in D_2$, a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ všechny intervaly $G(I)$, $I \in D_3 \cup D_4$. Podle definice systému D_2, D_3, D_4 je $\langle c, d\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} J_j$. Jsou-li η_1, η_2 kladná čísla a volíme-li např. $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2}, \eta_2/2M\right)$, $\delta = \min(\varepsilon/4, \varepsilon^2\eta_1/6M)$, plyne z (1) a (2) $\sum_{j=1}^{m} d(J_j) < \eta_2$, $\operatorname{osc}[f, I_i] < \eta_1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Podle lemmatu tedy integrál $\int_c^d f(x)\,dx$ existuje.

Literatura

[1] *Roy O. Davies:* An Elementary Proof of the Theorem on Change of Variable in Riemann Integration, Math. Gazette *45* (1961), 23—25.

[2] *V. Jarník:* Integrální počet I, Praha 1956.

[3] *H. Kestelman:* Change of Variable in Riemann Integration, Math. Gazette *45* (1961), 17—23.

[4] *K. Petr:* Počet integrální, Praha 1931.

[5] *F. Štěpánek:* Řešení úlohy č. 2, Časopis pro pěstování matematiky *92* (1967), 356—359.

Adresa autorů: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university).

Summary

NOTE ON THE THEOREM ON CHANGE OF VARIABLE IN RIEMANN INTEGRAL

DAVID PREISS, JAROMÍR UHER, Praha

In the paper an elementary proof of the following theorem is introduced:

Let g be Riemann integrable function on $\langle a, b\rangle$. Let $s \in \langle a, b\rangle$, $G(t) = \int_s^t g(w)\,dw$ for all $t \in \langle a, b\rangle$. Let f be a function bounded on $\langle c, d\rangle = G(\langle a, b\rangle)$. Then, if either of Riemann integrals $\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,dt$, $\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx$ exists, there exists also the latter and these integrals are equal.

The proof is based on Davies theorem of [1].