Časopis pro pěstování matematiky

František Nožička
O styku variet v afinním lineárním prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 2, 171--201

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108311`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O STYKU VARIET V AFINNÍM LINEÁRNÍM PROSTORU

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

DT: 519.55

(Došlo dne 25. března 1957)

V tomto článku je určitým způsobem zaveden pojem styku dvou variet ${}^{(1)}X_p, {}^{(2)}X_p$ dimense p v afinním lineárním prostoru E_n ($n \geqq 2$, $1 \leqq p \leqq n - 1$). Definovaný pojem styku je invariantní ve smyslu afinní geometrie. Jsou nalezeny velmi jednoduché nutné a postačující podmínky pro to, aby uvažované (spojitě diferencovatelné) variety měly ve společném bodě styk aspoň k-tého řádu ($k \geqq 1$). V části II článku se uvažuje speciální „metrická" definice styku křivek a styku nadploch v euklidovském n-rozměrném prostoru a prokazuje se jejich ekvivalence (ve smyslu v práci popsaném) s „afinní" definicí styku těchto variet, která je se svými některými důsledky uvedena v části I.

I

V lineárním afinním prostoru E_n o souřadnicích x^α ($\alpha = 1, \ldots, n$) jsou dány dvě variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ dimense p ($1 \leqq p < n$) parametrickými popisy

$$ {}^{(1)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a),\quad a = 1, \ldots, p;\ \alpha = 1, \ldots, n\,, \tag{1,1$_a$} $$

$$ {}^{(2)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a),\quad a = 1, \ldots, p;\ \alpha = 1, \ldots, n\,. \tag{1,1$_b$} $$

Budeme v dalším předpokládat:

(a) variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají společný bod $P \in E_n$, jehož souřadnice $\underset{0}{x^\alpha}$ odpovídají hodnotám ${}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}$ parametrů ${}^{(1)}\eta^a$ variety ${}^{(1)}X_p$ a hodnotám ${}^{(2)}\underset{0}{\eta^a}$ parametrů ${}^{(2)}\eta^a$ variety ${}^{(2)}X_p$;

(b) funkce ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$ mají spojité parciální derivace

$$ {}^{(1)}B^\alpha_{a_1\ldots a_l} = \frac{\partial^{l\,(1)}x^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}}\,,\quad l = 1, \ldots, k \tag{1,2$_a$} $$

v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta^1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta^p})$; funkce ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\underset{0}{\eta^a})$ mají spojité parciální derivace

$$ {}^{(2)}B^\alpha_{a_1\ldots b_l} \equiv \frac{\partial^{l\,(2)}x^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^1, \ldots, \partial^{(2)}\eta^{a_l}}\,,\quad l = 1, \ldots, k \tag{1,2$_b$} $$

v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(2)}\underset{0}{\eta^1}, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta^p})$; přitom je $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$.

(c) bod $\underset{0}{P}$ je regulárním bodem variety ${}^{(1)}X_p$ a současně regulárním bodem variety ${}^{(2)}X_p$. To znamená, že matice

$$\begin{pmatrix} {}^{(1)}B_1^1 & {}^{(1)}B_1^2 & \dots & {}^{(1)}B_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(1)}B_p^1 & {}^{(1)}B_p^2 & \dots & {}^{(1)}B_p^n \end{pmatrix}_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a}$$

a matice

$$\begin{pmatrix} {}^{(2)}B_1^1 & {}^{(2)}B_1^2 & \dots & {}^{(2)}B_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(2)}B_p^1 & {}^{(2)}B_p^2 & \dots & {}^{(2)}B_p^n \end{pmatrix}_{{}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a}$$

mají hodnost p.

Věta 1. *Nechť ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ jsou variety v E_n s vlastnostmi shora citovanými. Buďtež $\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha$ konstantní vektory v E_n s vlastnostmi*

$$\Delta_1 \equiv [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}_1^\alpha, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}_2^\alpha, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}_p^\alpha, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0 , \tag{1,3$_a$}$$

$$\Delta_2 \equiv [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}_1^\alpha, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}_2^\alpha, \dots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}_p^\alpha, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0 , \tag{1,3$_b$}$$

kde symbol $\underset{0}{B}{}_a^\alpha$ značí hodnotu veličiny B_a^α v bodě $\underset{0}{P}$ společném varietám ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Potom systémem rovnic

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n \tag{1,4}$$

je definována lokálně určitá korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, která je jednojednoznačná v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$.

Důkaz. Položme

$$F^\alpha({}^{(2)}\eta^a, {}^{(1)}\eta^a, \underset{s}{\lambda}) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha, \quad (\alpha = 1, \dots, n) .$$

Potom systém (1,4) můžeme psát stručněji ve tvaru

$$F^\alpha({}^{(2)}\eta^a, {}^{(1)}\eta^a, \underset{s}{\lambda}) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n) . \tag{1,5}$$

Vzhledem k předpokladu (a) jsou rovnice (1,5) splněny pro

$${}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a , \quad {}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a , \quad \underset{s}{\lambda} = 0 \quad (a = 1, \dots, p;\ s = 1, \dots, n-p) .$$

Z předpokladu (b) a z (1,5), (1,4) plyne dále, že funkce $F^\alpha({}^{(2)}\eta^a, {}^{(1)}\eta^a, \underset{s}{\lambda})$ $(\alpha = 1, \dots, n)$ mají v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^1, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^2, \dots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^p, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^2, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p, \underset{1}{\lambda} = 0, \underset{2}{\lambda} = 0, \dots, \underset{n-p}{\lambda} = 0)$ spojité parciální derivace podle ${}^{(2)}\eta^a$,

${}^{(1)}\eta^a$, $\underset{s}{\lambda}$ až do řádu k-tého (včetně). Z (1,5), (1,4), $(1,2)_{a,b}$, $(1,3)_{a,b}$ snadno vypočteme, že

$$\left[\frac{\partial F^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^1}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^2}, \ldots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^p}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{1}{\lambda}}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{2}{\lambda}}, \ldots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{n-p}{\lambda}}\right]_{P_0} =$$

$$= (-1)^{n-p} [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0,$$

$$\left[\frac{\partial F^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^1}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^2}, \ldots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^p}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{1}{\lambda}}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{2}{\lambda}}, \ldots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{n-p}{\lambda}}\right]_{P_0} =$$

$$= (-1)^{n} [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0.$$

Na základě známé existenční věty z teorie implicitních funkcí plyne pak tento fakt: Rovnicemi (1,5) resp. (1,4) jsou lokálně, v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^2, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$, definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b), \quad a = 1, \ldots, p, \tag{1,6$_a$}$$

$$ \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^b), \quad s = 1, \ldots, n-p, \tag{1,6$_b$}$$

které mají spojité parciální derivace podle proměnných ${}^{(1)}\eta^a$ až do řádu k-tého (včetně) v uvažovaném okolí. Právě tak jsou rovnicemi (1,4) lokálně, v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^1, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^2, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^p)$, definovány funkce

$$ {}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\eta^a({}^{(2)}\eta^b), \quad a = 1, \ldots, n-p, \tag{1,7$_a$}$$

$$ \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(2)}\eta^b), \qquad s = 1, \ldots, n-p \tag{1,7$_b$}$$

se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k-tého (včetně) v uvažovaném okolí. Zřejmě je

$$ {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b), \quad a = 1, \ldots, p, \tag{1,8$_a$}$$

$$ (\underset{s}{\lambda}) = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b) = 0, \quad s = 1, \ldots, n-p. \tag{1,8$_b$}$$

Odtud (tj. především z $(1,6)_a$, $(1,7)_a$) plyne, že relacemi $(1,6)_a$ je lokálně, v okolí bodu $\underset{0}{P}$ společného oběma varietám ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, popsána jednojednoznačná korespondence mezi parametry variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ a tedy též lokální jednojednoznačná korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Tím je věta 1 dokázána.

Poznámka 1. Dosazením z $(1,6)_a$, $(1,6)_b$ do (1,4) dostáváme lokálně platnou identitu

$$ {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a) \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha, \tag{1,9}$$

z níž plyne (ve smyslu symboliky zavedené v $(1,2)_{a,b}$):

$$ {}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\, {}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{a} - {}^{(1)}B^{\alpha}_{a} = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{a} \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \tag{1,10} $$

při čemž zavádíme pro stručnost označení

$$ {}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{a} \equiv \frac{\partial^{(2)}\eta^{b}}{\partial^{(1)}\eta^{a}}, \quad \underset{s}{\lambda}_{a} \equiv \frac{\partial}{\partial^{(1)}\eta^{a}} \underset{s}{\lambda}. $$

Jestliže symbolem [ ] budeme označovat determinant ze složek vektorů v této závorce uvedených, potom z (1,10) vyplývá

$$ [{}^{(2)}B^{\alpha}_{a}\, {}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{1}, {}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\, {}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{2}, \ldots, {}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\, {}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{p}, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \overset{(2)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}] = $$

$$ = [{}^{(2)}B^{\alpha}_{1}, {}^{(2)}B^{\alpha}_{2}, \ldots, {}^{(2)}B^{\alpha}_{p}, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \overset{(2)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}][{}^{(2)}_{(1)}A^{1}_{a}, {}^{(2)}_{(1)}A^{2}_{a}, \ldots, {}^{(2)}_{(1)}A^{p}_{a}] = $$

$$ = [{}^{(1)}B^{\alpha}_{1} - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{1} \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, {}^{(2)}B^{\alpha}_{2} - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{2} \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha} \ldots, {}^{(2)}B^{\alpha}_{p} - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{p} \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \overset{n-p}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}] = $$

$$ = [{}^{(1)}B^{\alpha}_{1}, {}^{(1)}B^{\alpha}_{2}, \ldots, {}^{(1)}B^{\alpha}_{p}, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \overset{(2)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}]. $$

Odtud a z $(1,3)_{a,b}$ dostaneme ihned

$$ [{}^{(2)}_{(1)}A^{1}_{a}, {}^{(2)}_{(1)}A^{2}_{a}, \ldots, {}^{(2)}_{(1)}A^{p}_{a}]_{P_0} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \neq 0. $$

Relace $(1,6)_a$ představují tedy lokálně (v okolí bodu $\underset{0}{P}$ na varietě ${}^{(2)}X_p$) regulární transformaci parametrů v ${}^{(2)}X_p$ (s jakobiánem od nuly různým v $\underset{0}{P}$).

Poznámka 2. Jak bylo ověřeno průběhem důkazu věty 1 jsou za předpokladů této věty rovnicemi (1,4) jednoznačně definovány v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{1}, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{2}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{p})$[1]) funkce $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^{a})$ $(s = 1, \ldots, n - p)$, které mají tyto vlastnosti:

1. $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{a}) \equiv (\underset{s}{\lambda})_0 = 0$ pro $s = 1, \ldots, n - p$,
2. mají spojité parciální derivace

$$ \underset{s}{\lambda}_{a_1 a_2 \ldots a_l} \equiv \frac{\partial^{l} \underset{s}{\lambda}}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\, \partial^{(1)}\eta^{a_2} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}} \tag{1,11} $$

pro

$$ a_1, a_2, \ldots, a_l = 1, 2, \ldots, p; \quad s = 1, \ldots, n - p; \quad 1 \leqq l \leqq k. $$

---

[1]) Tedy bodu $\underset{0}{P}$ na varietě ${}^{(1)}X_p$, při čemž $\underset{0}{P}$ je podle předpokladu společným bodem variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Pro totální diferenciály funkcí $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ řádu l-tého ($1 \leqq l \leqq k$) zavedeme obvyklé označení $\mathrm{d}^l \underset{s}{\lambda}$. Symboly

$$(\mathrm{d}^1 \underset{s}{\lambda})_0,\ (\mathrm{d}^2 \underset{s}{\lambda})_0,\ \ldots,\ (\mathrm{d}^l \underset{s}{\lambda})_0,\ \ldots$$

nechť značí v dalším pořadě prvý, druhý, ..., l-tý, ... totální diferenciál funkce $\underset{s}{\lambda}$ v bodě $\underset{0}{P}$ odpovídajícím hodnotám ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a$ parametrů ${}^{(1)}\eta^a$ variety ${}^{(1)}X_p$.

Definice 1. *Nechť pro variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ z věty 1 o společném bodě $\underset{0}{P}$ platí při korespondenci (1,4)*

$$(\mathrm{d}^l \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad pro \quad l = 1, \ldots, k;\ s = 1, \ldots, n - p\,. \tag{1,12}$$

Potom říkáme, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk nejméně k-tého řádu. Je-li aspoň pro jedno $s \in 1, \ldots, n - p$ $(\mathrm{d}^{k+1}\underset{s}{\lambda})_0 \neq 0$, potom říkáme, že uvažované variety mají v $\underset{0}{P}$ styk právě k-tého řádu.[2])

Poznámka 3. Pod výrokem „variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě styk k-tého řádu" budeme v dalším rozumět styk nejméně k-tého řádu v $\underset{0}{P}$.

Věta 2. *Nechť variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají — za předpokladů shora uvažovaných — ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk k-tého řádu ($k \geqq 1$): Potom tento fakt je nezávislý*

1. *na volbě konstantního $(n - p)$-vektoru $\overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha$ v korespondenci (1,4), vyhovujícího podmínkám $(1,3)_{a,b}$,*
2. *na volbě parametrů variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$,*
3. *na volbě systému souřadného v E_n.*

Důkaz. Mějme dva systémy

$$\overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \overset{(2)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha;\ \overset{(1)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \overset{(2)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha$$

konstantních vektorů v E_n, vyhovujících podmínkách $(1,3)_{a\,b}$, tj.

$$[{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,, \quad [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,,$$

$$[{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha] \neq 0\,, \quad [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha] \neq 0\,.$$

Uvažujme nyní dvě lokální korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$ a ${}^{(2)}X_p$ a to jednak korespondenci (1,4), tj.

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha \tag{1,13$_a$}$$

[2]) Za předpokladu, že existují totální diferenciály řádu $k + 1$ funkcí $\underset{s}{\lambda}$ v bodě $\underset{0}{P}$.

a dále korespondenci

$$ {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \bar{\underset{s}{\lambda}} \, \overset{(s)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha \, . \tag{1,13$_b$} $$

Podle věty 1 jsou relacemi $(1,13)_a$ lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ — definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^b) \, , \quad a = 1, \ldots, p \, , \tag{1,14$_a$} $$

$$ \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^b) \, , \quad s = 1, \ldots, n - p \, ; \tag{1,15$_a$} $$

podobně jsou relacemi $(1,13)_b$ definovány v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = \psi^a({}^{(1)}\eta^b) \, , \quad a = 1, \ldots, p \, , \tag{1,14$_b$} $$

$$ \bar{\underset{s}{\lambda}} = \bar{\underset{s}{\lambda}}({}^{(1)}\eta^b) \, , \quad s = 1, \ldots, n - p \, . \tag{1,15$_b$} $$

Funkce uvedené v $(1,14)_{a,b}$, $(1,15)_{a,b}$ mají v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ spojité parciální derivace až do řádu k včetně — jak vyplývá z důkazu věty 1.

Tyto funkce vyhovují dále podmínkám

$$ \left. \begin{aligned} & {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b) \, , \quad a = 1, \ldots, p \, ; \\ & (\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \, , \quad s = 1, \ldots, n - p \, ; \end{aligned} \right\} \tag{1,16$_a$} $$

$$ \left. \begin{aligned} & {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = \psi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b) \, , \quad a = 1, \ldots, p \, ; \\ & (\bar{\underset{s}{\lambda}})_0 = 0 \, , \quad s = 1, \ldots, n - p \, , \end{aligned} \right\} \tag{1,16$_b$} $$

jak víme z důkazu věty 1.

V dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ platí tedy identity:

$$ {}^{(2)}x^\alpha(\varphi^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a) \, \overset{s}{\underset{0}{v}}{}^\alpha \, , \tag{1,17$_a$} $$

$$ {}^{(2)}x^\alpha(\psi^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \bar{\underset{s}{\lambda}}({}^{(1)}\eta^a) \, \overset{s}{\underset{0}{w}}{}^\alpha \, . \tag{1,17$_b$} $$

Zaveďme v dalším označení

$$ \begin{aligned} \varphi^a_{b_1 \ldots b_l} &\equiv \frac{\partial^l \varphi^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}} \, , & \psi^a_{b_1 \ldots b_l} &\equiv \frac{\partial^l \psi^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}} \, , \\ \underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_l} &\equiv \frac{\partial^l \underset{s}{\lambda}}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}} \, , & \bar{\underset{s}{\lambda}}_{a_1 \ldots a_l} &\equiv \frac{\partial^l \bar{\underset{s}{\lambda}}}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}} \, , \end{aligned} \tag{1,18} $$

kde $a, a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$; $l = 1, \ldots, k$; $s = 1, \ldots, n - p$. Nechť symboly ${}^{(1)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l}$ a ${}^{(2)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l}$ mají význam z (1,2).

Poznámka 4. Uveďme nyní známý pojem, který bude pro průběh našeho důkazu užitečným.

Každý nenulový vektor ${}^{(1)}t_\alpha$ v E_n, pro který patí

$$ {}^{(1)}B_a^\alpha\,{}^{(1)}t_\alpha = 0\,, \quad a = 1, \ldots, p\,, \tag{1,19$_a$} $$

nazývá se tečným vektorem variety ${}^{(1)}X_p$. Podobně každý nenulový vektor ${}^{(2)}t_\alpha$ v E_n, vyhovující rovnicím

$$ {}^{(2)}B_a^\alpha\,{}^{(2)}t_\alpha = 0\,, \quad a = 1, \ldots, p\,, \tag{1,19$_b$} $$

je tečným vektorem variety ${}^{(2)}X_p$.

Je nyní dobře známo, že za našich předpokladů o varietě ${}^{(1)}X_p$ (resp. ${}^{(2)}X_p$), učiněných na počátku práce, můžeme vždy najít $n - p$ lineárně nezávislých vektorů ${}^{(1)}\underset{s}{t}_\alpha$, $s = 1, \ldots, n - p$ (resp. ${}^{(2)}\underset{s}{t}_\alpha$, $s = 1, \ldots, n - p$), vyhovujících rovnicím $(1,19)_a$ (resp. $(1,19)_b$), při čemž každé řešení rovnic $(1,19)_a$ (resp. $(1,19)_b$) je lineární kombinací vektorů ${}^{(1)}\underset{s}{t}_\alpha$, $s = 1, \ldots, n - p$ (resp. ${}^{(2)}\underset{s}{t}_\alpha$, $s = 1, \ldots, n - p$). Definujme speciálně:

$$ {}^{(1)}\underset{s}{t}_\alpha \equiv e_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+s-1} \alpha\, \alpha_{p+s+1} \ldots \alpha_n}\,{}^{(1)}B_\alpha^{\alpha_1} \ldots B_p^{\alpha_p} \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \overset{(s-1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s-1}} \overset{(s+1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s+1}} \ldots \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_n} \tag{1,20$_a$} $$

pro $s = 1, \ldots, n - p$, kde

$$ e_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \equiv \begin{cases} 0, & \text{jsou-li aspoň dva indexy stejné,} \\ 1, & \text{jsou-li indexy vesměs různé a permutace } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ čísel } 1, \ldots, n \text{ je sudá,} \\ -1, & \text{jsou-li indexy vesměs různé a permutace } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ čísel } 1, \ldots, n \text{ je lichá.} \end{cases} \tag{1,21} $$

Vektory ${}^{(1)}\underset{s}{t}_\alpha$ definované v $(1,20)_a$ vyhovují zřejmě rovnicím $(1,19)_a$. Tyto vektory splňují podmínky

$$ \left.\begin{aligned} &\overset{(l)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}\,{}^{(1)}\underset{s}{t}_\alpha = 0 \quad \text{pro} \quad s \neq l \quad (s, l = 1, \ldots, n - p)\,, \\ &|\overset{(l)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}\,{}^{(1)}\underset{s}{t}_\alpha| = |\Delta_1| \neq 0 \quad \text{pro} \quad s = l \end{aligned}\right\} \tag{1,22} $$

v bodě $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$, jak plyne z $(1,3)_a$ a $(1,20)_a$. Ten fakt, že vektory ${}^{(1)}\underset{s}{t}_\alpha$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ jsou v bodě $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ lineárně nezávislé, plyne snadno z podmínek (1,22). Analogicky můžeme definovat systém tečných vektorů ${}^{(2)}\underset{s}{t}_\alpha$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ variety ${}^{(2)}X_p$, tj.

$$ {}^{(2)}\underset{s}{t}_\alpha \equiv e_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+s-1} \alpha\, \alpha_{p+s+1} \ldots \alpha_n}\,{}^{(2)}B_1^\alpha \ldots {}^{(2)}B_p^\alpha \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \overset{(s-1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s-1}} \overset{(s+1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s+1}} \ldots \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_n}\,, \tag{1,20$_b$} $$

nezávislých v bodě $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^p)$.

Pomocná věta 1. *Nechť*

$$\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha} \quad \text{a} \quad \underset{0}{\overset{(1)}{w}}{}^{\alpha}, \underset{0}{\overset{(2)}{w}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{w}}{}^{\alpha}$$

jsou dva systémy konstantních vektorů v E_n s vlastnostmi

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{p}, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}] \neq 0\,, \\ \overline{\Delta}_1 &\equiv [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{p}, \underset{0}{\overset{(1)}{w}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{w}}{}^{\alpha}] \neq 0\,. \end{aligned} \tag{1,23}$$

Nechť ${}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha}$ *$(s = 1, \ldots, n-p)$ jsou vektory definované v $(1{,}20)_a$ a nechť symboly* $({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0$ *představují hodnoty veličin* ${}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha}$ *v bodě* $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{1} \ldots {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{p})$.

Jestliže $\underset{(l)}{\mu}$ *$(l = 1, \ldots, n-p)$ jsou reálná čísla, pro která platí*

$$\underset{(l)}{\mu}\underset{0}{\overset{(l)}{w}}{}^{\alpha}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p, \text{[3]}$$

potom

$$\underset{(l)}{\mu} = 0 \quad \text{pro} \quad l = 1, \ldots, n-p\,.$$

Důkaz. Vzhledem k první z podmínek (1,23) můžeme každý z vektorů $\underset{0}{\overset{(l)}{w}}{}^{\alpha}$ (pro $l = 1, \ldots, n-p$) psát jako lineární kombinaci vektorů ${}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{p}$, $\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}$, tj.

$$\underset{0}{\overset{(l)}{w}}{}^{\alpha} = {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{a}\overset{(l)}{C}{}^{a} + \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha}D^{l}_{s} \quad \text{[4]} \tag{1,24}$$

Pro determinant $\overline{\Delta}_1$ z (1,23) dostaneme s přihlédnutím k (1,21), (1,24)

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_1 &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_1}_{1} \ldots {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_p}_{p}\underset{0}{\overset{(1)}{w}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \underset{0}{\overset{(n-p)}{w}}{}^{\alpha_n} = \\ &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1} \ldots {}^{(1)}B^{\alpha_p}_{p}({}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_{p+1}}_{a_1}\overset{(1)}{C}{}^{a_1} + \underset{0}{\overset{(s_1)}{v}}{}^{\alpha}D^{1}_{s_1}) \ldots ({}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_p}_{a_{n-p}} \ldots \overset{(n-p)}{C}{}^{a_{n-p}} + \underset{0}{\overset{(s_{n-p})}{v}}{}^{\alpha_p} D^{n-p}_{s_{n-p}}) = \\ &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_1}_{1} \ldots {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_p}_{p}\underset{0}{\overset{(s_1)}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \underset{0}{\overset{(s_{n-p})}{v}}{}^{\alpha_n}D^{1}_{s_1} \ldots D^{n-p}_{s_{n-p}} = \\ &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_1}_{1} \ldots {}^{(1)}B^{\alpha_p}_{0}\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha_n} \,.\, e^{s_1\ldots s_{n-p}}D^{1}_{s_1} \ldots D^{n-p}_{s_{n-p}}\,, \end{aligned}$$

---

[3]) Zde sčítáme přes $l = 1, \ldots, n-p$.

[4]) Zde sčítáme přes $a = 1, \ldots, p$; $s = 1, \ldots, n-p$.

kde

$$e^{s_1 \dots s_{n-p}} \equiv \begin{cases} 0, & \text{jsou-li aspoň dva indexy v permutaci } s_1, \dots, s_{n-p} \text{ čísel } 1, \dots, n-p \text{ stejné;} \\ 1, & \text{jsou-li v permutaci } s_1, \dots, s_{n-p} \text{ indexy vesměs různé a permutace sudá;} \\ -1, & \text{jsou-li v permutaci } s_1, \dots, s_{n-p} \text{ indexy vesměs různé a permutace lichá.} \end{cases}$$

Z předchozího a z (1,23) dostaneme

$$\overline{\Delta_1} = \Delta_1 \,.\, [D] \neq 0\,, \tag{1,25)$_a$}$$

kde

$$[D] \equiv \begin{vmatrix} D^1_1 & D^1_2 & \dots D^1_{n-p} \\ D^2_1 & D^2_2 & \dots D^2_{n-p} \\ \dots & \dots & \dots \\ D^{n-p}_1 & D^{n-p}_2 & \dots D^{n-p}_{n-p} \end{vmatrix} . \tag{1,25)$_b$}$$

Z (1,24), (1,19)$_a$, (1,22), (1,23) plyne nyní

$$\begin{aligned} |\underset{(l)}{\mu}\,\underset{0}{\overset{(l)}{w}}{}^{\alpha}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0| &= |\underset{(l)}{\mu}({}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{a}\overset{(l)}{C}{}^{\alpha} + \underset{0}{\overset{(k)}{v}}{}^{\alpha}D^l_k)\,({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0| = \\ &= |\underset{(l)}{\mu}D^l_k\,\underset{0}{\overset{(k)}{v}}{}^{\alpha}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0| = |\Delta_1\underset{(l)}{\mu}D^l_s|\,. \end{aligned} \tag{1,26}$$

Z předpokladu

$$\underset{(l)}{\mu}\,\underset{0}{w}{}^{\alpha}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \dots, n-p$$

a z (1,26) plyne dále

$$\Delta_1\underset{(l)}{\mu}D^l_s = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \dots, n-p$$

a tedy, vzhledem k (1,23),

$$\underset{(l)}{\mu}D^l_s = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \dots, n-p\,. \tag{1,27}$$

Pro systém (1,27) $n-p$ lineárních homogenních rovnic v $n-p$ neznámých $\underset{(l)}{\mu}$ plyne pak na základě (1,25)$_a$ jednoznačné řešení $\underset{(l)}{\mu} = 0$ pro $l = 1, \dots, n-p$. Tím je pomocná věta dokázána.

Nyní přistoupíme k důkazu tvrzení (1) naší věty, který provedeme metodou úplné indukce.

Předpokládejme tedy nejdříve, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk prvého řádu ve smyslu naší definice při volbě $\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha}$ $(s = 1, \dots, n-p)$ konstantních vektorů v E_n, vyhovujících podmínce (1,3)$_a$. Z lokálních identit (1,17)$_{a,b}$ plyne (ve smyslu symboliky (1,18), (1,2)$_{a,b}$)

$${}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\varphi^{b}_{a} - {}^{(1)}B^{\alpha}_{a} = \sum_{s=1}^{n-p}\underset{s}{\lambda}_{a}\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha}\,, \tag{1,28)$_a$}$$

$$ {}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\psi^{b}_{a} - {}^{(1)}B^{\alpha}_{a} = \sum_{s=1}^{n-p} \bar{\lambda}_{a} \overset{(s)}{\underset{0}{w}}{}^{\alpha} . \qquad (1,28)_b $$

Dle našeho předpokladu je (podle definice 1 a podle (1,12))

$$ (\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p . $$

Je tedy též (podle symboliky v (1,18))

$$ (\underset{s}{\lambda_a})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p;\ a = 1, \ldots, p . \qquad (1,29) $$

Z $(1,28)_a$, (1,29) plyne pak

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{b}(\varphi^{b}_{a})_0 - {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{a} = 0 . \qquad (1,30) $$

Násobením předchozích rovnic tečným vektorem $({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0$ (a sečtením přes $\alpha = 1, \ldots, n$) dostaneme vzhledem k $(1,19)_a$

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{b}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0(\varphi^{b}_{a})_0 = 0 $$

pro $s = 1, \ldots, n-p$; $b = 1, \ldots, p$. Podle výsledku uvedeného v poznámce 1 plyne z předchozích rovnic

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{b}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p \qquad (1,30) $$

a pro $b = 1, \ldots, p$. Z (1,30), $(1,28)_b$ plyne pak ihned

$$ \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\bar{\lambda}_a})_0 \overset{(s)}{\underset{0}{w}}{}^{\alpha}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p . $$

Odtud plyne pak podle tvrzení předchozí pomocné věty ihned

$$ (\underset{s}{\bar{\lambda}_a})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p \quad \text{a pro} \quad a = 1, \ldots, p . $$

Je tedy též

$$ (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0 \quad (s = 1, \ldots, n-p) . $$

Odtud a z (1,29), $(1,28)_{a,b}$ dostaneme

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{b}((\varphi^{b}_{a})_0 - (\psi^{b}_{a})_0) = 0 \quad (a = 1, \ldots, p;\ \alpha = 1, \ldots, n) , $$

z čehož vyplývá — vzhledem k lineární nezávislosti vektorů ${}^{(2)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{b}$ — že $(\varphi^{b}_{a})_0 = (\psi^{b}_{a})_0$. Ověřili jsme si tedy implikaci

$$ (\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} {}^{(1)}(\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0 , \\ {}^{(2)}(\varphi^{b}_{a})_0 = (\psi^{b}_{a})_0 , \end{cases} \qquad (1,31) $$

platnou pro $s = 1, \ldots, n-p$; $a, b = 1, \ldots, p$. Podmínky $(\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0$ $(s = 1, \ldots, n-p)$ znamenají, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$

styk prvého řádu též při výchozí korespondenci $(1,13)_b$. Tím je tvrzení (1) naší věty dokázáno pro $k = 1$.

Předpokládejme nyní, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk řádu l-tého, kde $l > 1$, při výchozí korespondenci (1,4). Předpokládáme tedy, že pro funkce $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ $(s = 1, \ldots, n - 1)$ v (1,4) platí

$$(\mathrm{d}^j \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, l\,. \tag{1,32}$$

Předpokládáme dále (jako vlastní indukční krok), že tvrzení (1) naší věty je správné pro styk řádu $l - 1$. My budeme — vedeni implikací (1,31) — předpokládat navíc, že platí

$$(\mathrm{d}^j \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, l - 1 \Rightarrow \begin{cases} 1) \ (\mathrm{d}^j \underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0 \ \text{pro}\ j = 0, 1, \ldots, l - 1, \\ 2) \ (\varphi^b_{a_1 \ldots a_j})_0 = (\psi^b_{a_1 \ldots a_j})_0 \end{cases} \tag{1,33}$$

pro $j = 1, 2, \ldots, l - 1$; $b, a_1, \ldots, a_{l-1} = 1, \ldots, p$. Předpoklad (1,32) je zřejmě ekvivalentní předpokladu

$$(\underset{s}{\lambda})_0 = (\underset{s}{\lambda}_{a_1})_0 = (\underset{s}{\lambda}_{a_1 a_2})_0 = \ldots = (\underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_l})_0 = 0 \tag{1,34}$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$.

Parciálním, $(l - 1)$-krát iterovaným derivováním identit $(1,28)_{a,b}$ podle ${}^{(1)}\eta^a$, dostaneme identity tvaru

$$\begin{aligned} {}^{(2)}B^\alpha_{b_1} \varphi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l} + \sum_{1 < j \leq l} {}^{(2)}B^\alpha_{b_1 \ldots b_j} \Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l} + {}^{(1)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l} &= \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_l} \underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,, \\ {}^{(2)}B^\alpha_{b_1} \psi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l} \sum_{1 < j \leq l} {}^{(2)}B^\alpha_{b_1 \ldots b_j} \Psi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l} + {}^{(1)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l} &= \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1 \ldots a_s} \underset{0}{\overset{(s)}{w^\alpha}}\,, \end{aligned} \tag{1,35$_{a,b}$}$$

kde $\Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l}$ jsou součiny, v nichž až na číselný faktor vystupují pouze elementy $\varphi^b_{a_1 \ldots a_m}$ $(m \in 1, \ldots, j)$. Veličiny $\Psi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l}$ jsou veličiny téhož typu jako $\Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l}$ a dostaneme je z předchozích záměnou symbolu ψ za φ. Odtud a z indukčního předpokladu (1,33) plyne

$$(\Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l})_0 = (\Psi^{b_1 \ldots b_t}_{a_1 \ldots a_l})_0 \quad \text{pro} \quad 1 < j \leq l\,. \tag{1,36}$$

Z $(1,35)_{a,b}$ plyne s ohledem na (1,36), (1,34)

$$\underset{0}{{}^{(2)}B^\alpha_{b_1}}((\varphi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0 - (\psi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0) = -\sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1 \ldots a_l})_0 \underset{0}{\overset{(s)}{w^\alpha}}\,.$$

Násobením předchozích relací vektorem $({}^{(1)}\underset{l}{t}_\alpha)_0$ $(l \in 1, \ldots, n - p)$ a sečtením přes α dostaneme vzhledem k (1,30)

$$\sum_{s+1}^{n-p} (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1 \ldots a_l})_0 \underset{0}{\overset{s}{w^\alpha}} ({}^{(1)}\underset{l}{t}_\alpha)_0 = 0$$

pro $l = 1, \ldots, n - p$ a pro $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$. Z předchozích relací však vyplývá ihned v důsledku dříve uvedené pomocné věty $(\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1 \ldots a_l})_0 = 0$ pro $s = 1, \ldots, n - p$ a pro $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$. Dosazením odtud do (1,31) dostaneme

$$\underset{0}{{}^{(2)}B^\alpha_{b_1}}((\varphi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0 - (\psi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0) = 0$$

a tedy — vzhledem k lineární nezávislosti vektorů ${}^{(2)}B^\alpha_{b_1}$ —

$$(\varphi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0 = (\psi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0 \,.$$

Tím jsme ověřili implikaci (1,33) pro $j = l$. Tím je však tvrzení (1) naší věty metodou úplné indukce dokázáno. Poznatek citovaný sub 2) v implikaci (1,33) jest vedlejším výsledkem, o němž se zmíníme v poznámce za důkazem této věty.

Abychom dokázali tvrzení (2) naší věty, budeme předpokládat, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ s parametrickými popisy $(1,1)_a$, $(1,1)_b$ mají ve společném bodě styk k-tého řádu. Potom, ve smyslu naší definice styku, splňují funkce $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ (které jsou lokálně jednoznačně definovány korespondencí (1,4)) podmínky (1,12), které jsou ekvivalentní podmínkám (1,34).

Nechť

$${}^{(1)}\tilde{\eta}^a = {}^{(1)}\tilde{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b) \qquad (1,37)_a$$

je libovolná transformace parametrů variety ${}^{(1)}X_p$ a to regulární v nějakém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^p)$ [5].

Rovnice

$${}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\bar{\eta}({}^{(2)}\eta^b) \qquad (1,37)_b$$

nechť popisují lokálně — v nějakém okolí bodu $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}^1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}^p)$ — regulární transformaci parametrů variety ${}^{(2)}X_p$. Předpokládejme dále, že existují v uvažovaných okolích variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ spojité parciální derivace

$${}^{(1)}\tilde{A}^a_{b_1 \ldots b_l} \equiv \frac{\partial^{l(1)}\tilde{\eta}^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}}\,, \quad l = 1, \ldots, k\,, \qquad (1,38)_a$$

$${}^{(2)}\bar{A}^a_{b_1 \ldots b_l} \equiv \frac{\partial^{l(2)}\bar{\eta}^a}{\partial^{(2)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(2)}\eta^{b_l}}\,, \quad l = 1, \ldots, k\,. \qquad (1,38)_b$$

Podle věty 1 definují relace (1,4) lokálně jednoznačně funkce $\underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$, $s = 1, \ldots, n - p$, které představují určité skaláry variety ${}^{(1)}X_p$. Důsledek téže věty 1 je, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ lze vztáhnout k jednomu a témuž systému ${}^{(1)}\eta^a$ parametrů variety ${}^{(1)}X_p$. Skaláry $\underset{s}{\lambda}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ jsou tedy zřejmě nezávislé na transformaci $(1,37)_b$ parametrů variety ${}^{(2)}X_p$.

[5]) Tedy bodu $\underset{0}{P}$ na varietě ${}^{(1)}X_p$, který je společný oběma varietám ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Definujme

$$\underset{s}{\tilde{\lambda}} \equiv \underset{s}{\tilde{\lambda}}({}^{(1)}\tilde{\eta}^a) \equiv \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a({}^{(1)}\tilde{\eta}^b))\,, \tag{1,39$_a$}$$

$$\underset{s}{\tilde{\lambda}}_{b_1\ldots b_l} \equiv \frac{\partial^l \underset{s}{\tilde{\lambda}}}{\partial{}^{(1)}\tilde{\eta}^{b_1}\ldots\partial{}^{(1)}\tilde{\eta}^{b_l}}\; l = 1, \ldots, k\,, \tag{1,39$_b$}$$

$${}^{(1)}C^a_{b_1\ldots b_l} \equiv \frac{\partial^l{}^{(1)}\eta^a}{\partial{}^{(1)}\tilde{\eta}^{b_1}\ldots\partial{}^{(1)}\tilde{\eta}^{b_l}}\,,\; l = 1, \ldots, k \tag{1,39$_c$}$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$; $a, b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$. Z $(1{,}39)_a$ plyne pak s přihlédnutím k $(1{,}39)_{b\,c}$, (1,34):

$$\underset{s}{\tilde{\lambda}}_{b_1\ldots b_l} = \underset{s}{\lambda}_{a_1}U^{a_1}_{b_1\ldots b_l} + \underset{s}{\lambda}_{a_1a_2}U^{a_1a_2}_{b_1\ldots b_l} + \ldots + \underset{s}{\lambda}_{a_1\ldots a_l}U^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_l} \tag{1,40}$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$, $l = 1, \ldots, k$, kde $U^{a_1}_{b_1\ldots b_l}$, $U^{a_1a_2}_{b_1\ldots b_l}$, $\ldots$, $U^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_l}$ závisí pouze na parciálních derivacích ${}^{(1)}C^a_{b_1}$, ${}^{(1)}C^a_{b_1b_2}$, $\ldots$, ${}^{(1)}C^a_{b_1\ldots b_l}$. Toto tvrzení se dá snadno ověřit metodou úplné indukce. Z (1,34), (1,39) a (1,40) pak vyplývá ihned implikace

$$(\underset{s}{\lambda})_0 = (\underset{s}{\lambda}_{a_1})_0 = \ldots = (\underset{s}{\lambda}_{a_1\ldots a_k})_0 = 0 \Rightarrow (\underset{s}{\tilde{\lambda}})_0 = (\underset{s}{\tilde{\lambda}}_{a_1}) = \ldots = (\underset{s}{\tilde{\lambda}}_{a_1\ldots a_l})_0 = 0$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$. Platí tedy též

$$(\mathrm{d}^l \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n - p;\; l = 0, 1, \ldots, k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{d}^l \underset{s}{\tilde{\lambda}})_0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n - p;\; l = 0, 1, \ldots, k\,.$$

Odtud a z definice styku je správnost tvrzení (2) naší věty evidentní.

Tvrzení (3) naší věty je evidentní. Skaláry $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ a jejich parciální derivace $\underset{s}{\lambda}_{a_1\ldots a_l}$ $(l = 1, \ldots, k)$ jsou vnitřními geometrickými objekty variety ${}^{(1)}X_p$ a jsou tedy nezávislé na volbě souřadnic v E_n, v němž variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ leží.

Poznámka 5. V důkazu tvrzení (1) předchozí věty jsme navíc ukázali, že při korespondencích $(1{,}17)_a$, $(1{,}17)_b$, popsaných lokálně (v uvedeném pořadí) korespondencemi $(1{,}14)_a$, $(1{,}14)_b$ mezi parametry ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, platí vedle podmínek $(\varphi^a)_0 = (\psi^a)_0$ $(a = 1, \ldots, p)$[6]) též podmínky $(\varphi^a_{a_1\ldots a_l})_0 = (\psi^a_{a_1\ldots a_l})_0$ pro $a, a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$, jak je naznačeno v (1,33). Tyto podmínky naznačují vzájemnou souvislost mezi dvěma korespondencemi typu $(1{,}17)_a$, $(1{,}17)_b$.

Věta 3. *Nechť variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají — za uvažovaných předpokladů — ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk k-tého řádu ($k \geqq 1$). Potom lze — a to nekonečně mnoha způsoby — vztáhnout variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ k témuž systému parametrů η^a tak, že platí: Jsou-li*

$$x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha(\eta^a) \quad (\alpha = 1, \ldots, n;\; a = 1, \ldots, p) \tag{1,41}$$

a

$$x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a) \quad (\alpha = 1, \ldots, n;\; a = 1, \ldots, p)$$

[6]) Plynoucích z $(1{,}16)_a$, $(1{,}16_b)$.

parametrické popisy variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, vztažených lokálně — v okolí jejich společného bodu $\underset{0}{P}$, odpovídajícímu hodnotám parametrů $\underset{0}{\eta}^a$ — k témuž systému parametrů, pak je

$$\left(\frac{\partial^{l(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{l(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 \tag{1,42}$$

pro $l = 0, 1, \dots, k$; $a_1, \dots, a_l = 1, \dots, p$.

Důkaz je velmi snadný. Nechť $\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha$ $(s = 1, \dots, n - p)$ je libovolný systém konstantních vektorů v E_n s vlastností $(1,3)_{a,b}$. Položíme-li v identitě (1,9)

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) &\equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \\ {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) &\equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1}(\eta^b))\,, \end{aligned} \tag{1,43}$$

potom lokální identitu (1,9) můžeme psát ve tvaru

$${}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{0}{\overset{s}{v}}{}^\alpha\,. \tag{1,44}$$

Podle předpokladu mají variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ve společném bodě styk k-tého řádu $(k \geqq 1)$. Podle definice styku platí pak (1,12), kteréžto podmínky jsou ekvivalentní podmínkám (1,34). Z (1,34) a (1,44) plynou pak bezprostředně podmínky (1,42), kde klademe $\eta^a = {}^{(1)}\eta^a$.

Dokážeme nyní ještě, že lze variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ vztáhnout nekonečně mnoha způsoby k témuž systému parametrů (lokálně, v nějakém okolí jejich společného bodu $\underset{0}{P}$) tak, že platí (1,42). Víme již, že za předpokladů naší věty lze při korespondenci (1,4) vztáhnout variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ k témuž systému parametrů η^a a že při označení (1,43) a při popisu (1,41) variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ platí (1,42). Buďtež nyní

$$\bar\eta^a({}^{(1)}\eta^b)\,, \quad a = 1, \dots, p \tag{1,45$_a$}$$

libovolné funkce proměnných ${}^{(1)}\eta^b$ $(b = 1, \dots, p)$ těchto vlastností:

(a)

$$\bar\eta^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b) = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a \quad (a = 1, \dots, p)\,, \tag{1,45$_b$}$$

(b) v nějakém dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ existují spojité parciální derivace

$${}^{(1)}\bar A^a_{b_1\dots b_l} \equiv \frac{\partial^l\bar\eta^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\dots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\,, \quad l = 2, \dots, k \tag{1,45$_c$}$$

pro $a, b_1, \dots, b_l = 1, \dots, p$,

(c) je

$$({}^{(1)}\bar A^a_{b_1})_0 = \delta^a_{b_1},\ ({}^{(1)}\bar A^a_{b_1\dots b_l})_0 = 0, \ l = 2, \dots, k \tag{1,45$_d$}$$

pro $a, b_1, \dots, b_l = 1, \dots, p$.

Je především nyní z (1,44) a z věty 1 evidentní, že rovnicemi

$$ {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\, \overset{(s)}{\underset{0}{v^\alpha}} $$

je — za předpokladů naší věty — popsána lokální korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, při čemž tato korespondence je popsána korespondencí $\eta^a = {}^{(1)}\eta^a$ $(a = 1, \ldots, p)$ mezi parametry obou uvažovaných variet. Tato korespondence je pak přímo obsažena v popisu (1,41) obou variet. Omezme se nyní na dostatečně malé okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^p)$ a v popisu $x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a)$ variety ${}^{(2)}X_p$ položme $\eta^a = \bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b)$. Zvolíme-li pak pro varietu ${}^{(2)}X_p$ parametrický popis

$$ x^\alpha = {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(2)}\xi^\alpha(\bar{\eta}^b({}^{(1)}\eta^a)) \tag{1,46$_b$} $$

a pro varietu ${}^{(1)}X_p$ popis

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^b)\,, \tag{1,46$_c$} $$

potom pevně zvoleným hodnotám parametrů ${}^{(1)}\eta^b$(dostatečně blízkým hodnotám ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a$) odpovídá jednoznačně určitý bod na varietě ${}^{(1)}X_p$ a určitý bod na varietě ${}^{(2)}X_p$. Při popisu

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a) $$

variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ je tedy relacemi

$$ \eta^a = \bar{\eta}^a({}^{(1}\eta^b) \tag{1,46} $$

definována zcela určitá korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ a to lokálně jednojednoznačná v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^p)$. To platí pro každé funkce $\bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b)$ s vlastnostmi (a), (b), (c) shora uvedenými. Z $(1,45)_{a,b,c,d}$, (1,43), $(1,46)_{a,b}$ plyne

$$ \begin{aligned} {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^b) &= {}^{(2)}\xi^\alpha(\bar{\eta}^b({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)) = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^b) = \\ &= {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^b)) = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a) = \underset{0}{x}^\alpha = \\ &= {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a) = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a) = {}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)\,, \end{aligned} $$

tedy stručně

$$ ({}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha)_0 = ({}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha)_0\,. $$

Z $(1,46)_b$, $(1,45)_e$, plyne

$$ \frac{\partial^{(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^b} = \frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\bar{\eta}^a}\, {}^{(1)}\bar{A}^a_b\,. $$

Odtud a z $(1,45)_{b,d}$ plyne

$$ \left(\frac{\partial^{(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^b}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0 \delta^a_b = \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^b}\right)_0 $$

a tedy vzhledem k (1,42), (1,46)$_a$

$$\left(\frac{\partial^{(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta_b}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{(1)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^b}\right)_0 .$$

Metodou úplné indukce bychom nyní snadno ověřili, že platí

$$\left(\frac{\partial^{l(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{l(1)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0$$

pro $l = 2, \ldots, k$; $b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$.

Korespondencí tvaru (1,46)$_c$ s vlastnostmi (1,45)$_b$, (1,45)$_d$ je však nekonečně mnoho[7]) (zřejmě též nekonečně mnoho v oboru analytických korespondencí uvažovaného typu). Tím je věta 3 dokázána.

Poznámka 6. Z důkazu předchozí věty plyne tento výsledek: Nechť variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ s popisem

$${}^{(1)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad {}^{(2)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}\eta^a)$$

mají společný bod $\underset{0}{P}$ odpovídající hodnotám ${}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a \equiv \underset{0}{\eta}{}^a$ parametrů. Nechť při korespondenci ${}^{(2)}\eta^a = {}^{(1)}\eta^a \equiv \eta^a$ platí (za dříve uvažovaných předpokladů o varietách ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$) podmínky (1,42). Je-li ${}^{(2)}\eta^a = \bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b)$ libovolná korespondence mezi parametry ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ s vlastnostmi (a), (b), (c)[8]) a jestliže pro variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ píšeme lokální popis

$${}^{(1)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^b)\,,$$

$${}^{(2)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(2)}\xi^\alpha(\bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b))\,,$$

potom platí

$$\left(\frac{\partial^{l(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{l(1)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0$$

pro $l = 0, 1, \ldots, k$; $b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$.

Věta 4. *Nechť ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ jsou variety dimense p v E_n ($1 \leqq p \leqq n - 1$, $n \geqq 2$) s parametrickým popisem*

$$\begin{aligned} {}^{(1)}X_p\colon\quad & x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha(\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p\,, \\ {}^{(2)}X_p\colon\quad & x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n\,;\ a = 1, \ldots, p \end{aligned} \quad [9]) \tag{1,47}$$

a nechť jsou splněny tyto předpoklady:

(1) *variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají bod $\underset{0}{P}$ o souřadnicích $\underset{0}{x}{}^\alpha$ v E_n společný, při čemž*

$$\underset{0}{x}{}^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha(\underset{0}{\eta}{}^a) = {}^{(2)}\xi^\alpha(\underset{0}{\eta}{}^a)\,; \tag{1,48}$$

---

[7]) Vzájemně různých.

[8]) Citovanými za (1,45)$_a$.

[9]) Tedy ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ jsou vztaženy k jednomu a témuž systému parametrů η^a.

(2) *funkce* ${}^{(1)}\xi^\alpha(\eta^a)$, ${}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a)$ *mají v určitém okolí bodu* $(\underset{0}{\eta^1}, \ldots, \underset{0}{\eta^p})$ *spojité parciální derivace*

$$\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1}\ldots\partial\eta^{b_l}}, \quad \frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1}\ldots\partial\eta^{b_l}} \quad \textit{pro } l = 1, \ldots, k;\ b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p;$$

(3) *matice*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{(1)}\xi^1}{\partial\eta^1} & \dfrac{\partial^{(1)}\xi^2}{\partial\eta^1} & \ldots & \dfrac{\partial^{(1)}\xi^n}{\partial\eta^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^{(1)}\xi^1}{\partial\eta^p} & \dfrac{\partial^{(1)}\xi^2}{\partial\eta^p} & \ldots & \dfrac{\partial^{(1)}\xi^n}{\partial\eta^p} \end{pmatrix}_{\eta^a=\underset{0}{\eta^a}}$$

a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{(2)}\xi^1}{\partial\eta^1} & \dfrac{\partial^{(2)}\xi^2}{\partial\eta^1} & \ldots & \dfrac{\partial^{(2)}\xi^n}{\partial\eta^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^{(2)}\xi^1}{\partial\eta^p} & \dfrac{\partial^{(2)}\xi^2}{\partial\eta^p} & \ldots & \dfrac{\partial^{(2)}\xi^n}{\partial\eta^p} \end{pmatrix}_{\eta^a=\underset{0}{\eta^a}}$$

mají hodnost p.

Platí-li

$$\left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1}\ldots\partial\eta^{b_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1}\ldots\partial\eta^{b_l}}\right)_0 \tag{1,49}$$

pro $l = 1, \ldots, k;\ b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$, *potom mají variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *ve společném bodě* $\underset{0}{P}$ *styk aspoň k-tého řádu ve smyslu naší definice.*

Důkaz. Pro dané variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ pišme

$$ {}^{(1)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \tag{1,50$_a$}$$

$$ {}^{(2)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}\eta^a)\,, \tag{1,50$_b$}$$

Vztažení variet ${}^{(2)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ k témuž systému parametrů η^a je popsáno jednoduše korespondencí ${}^{(2)}\eta^a = {}^{(1)}\eta^a$ ($\equiv \eta^a$) mezi parametry ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ variet (1,50)$_a$, (1,50)$_b$. Systémem rovnic

$$ {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,, \tag{1,51}$$

kde $\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}$ ($s = 1, \ldots, n - p$) jsou konstantní vektory v E_n s vlastností (1,3)$_{a,b}$,[10]) je potom — podle věty 1 — definována lokálně jednojednoznačná korespondence (v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$) mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Podle

[10]) Kde

$$ {}^{(1)}\underset{0}{B^\alpha_a} \equiv \left(\frac{\partial^{(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0, \qquad {}^{(2)}\underset{0}{B^\alpha_a} \equiv \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right).$$

věty 1 jsou rovnicemi (1,51) v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ jednoznačně definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad s = 1, \dots, n-p;\ a = 1, \dots, p \qquad (1{,}52)_a $$

těchto vlastností:

(A)

$$ {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a) = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a = \underset{0}{\eta}{}^a\,;^{11)} $$
$$ (\underset{s}{\lambda})_0 = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a) = 0\,, \quad s = 1, \dots, n-p\,; \qquad (1{,}52)_b $$

(B) funkce $\varphi^a({}^{(1)}\eta^a)$, $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ mají v uvažovaném okolí spojité parciální derivace

$$ \varphi^a_{b_1 \dots b_l} \equiv \frac{\partial^l \varphi^a}{\partial{}^{(1)}\eta^{b_1} \dots \partial{}^{(1)}\eta^{b_l}}\,, \quad \underset{s}{\lambda}{}_{b_1 \dots b_l} \equiv \frac{\partial^l \underset{s}{\lambda}}{\partial{}^{(1)}\eta^{b_1} \dots \partial{}^{(1)}\eta^{b_l}} \qquad (1{,}52)_c $$

pro $l = 1, \dots, k$; $s = 1, \dots, n-p$; $a, b_1, \dots, b_l = 1, \dots, p$.

Z lokální identity

$$ {}^{(2)}\xi^\alpha(\varphi^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha \qquad (1{,}52)_d $$

plyne pak — na základě symboliky zavedené v $(1{,}52)_c$ —

$$ \varphi^a_b \left(\frac{\partial{}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial{}^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^b)} - \frac{\partial{}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial{}^{(1)}\eta^b} = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}{}_b \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha $$

a tedy

$$ (\varphi^a_b)_0 \left(\frac{\partial{}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial{}^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b)} - \left(\frac{\partial{}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial{}^{(1)}\eta^b}\right)_0 = \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\lambda}{}_b)_0 \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha\,. \qquad (1{,}53) $$

Je však, jak plyne z (1,47), $(1{,}50)_{a,b}$, $(1{,}52)_b$,

$$ \left(\frac{\partial{}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial{}^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b)} = \left(\frac{\partial{}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_{{}^{(1)}\eta_0^a = \eta_0^a} = \left(\frac{\partial{}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0\,, $$

$$ \left(\frac{\partial{}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial{}^{(1)}\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial{}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0. $$

Odtud a z předpokladu (1,49) plyne pak následující přepis relací (1,53):

$$ {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a((\varphi^a_b)_0 - \delta^a_b) = \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\lambda}{}_b)_0 \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha\,, \qquad (1{,}54) $$

kde

$$ {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial{}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0. $$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů

$$ {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \ (a = 1, \dots, p)\,, \quad \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha \ (s = 1, \dots, n-p) $$

---

[11]) To plyne z věty 1 a z předpokladu (1) naší věty 4.

plyne z (1,54) jednak

$$(\underset{s}{\lambda_b})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p;\ b = 1, \ldots, p\,, \tag{1,55$_a$}$$

jednak

$$(\varphi_b^a)_0 = \delta_b^a \quad \text{pro} \quad a, b = 1, \ldots, p\,. \tag{1,55$_b$}$$

Dvojnásobným derivováním identity $(1{,}52)_d$ obdržíme:

$$\varphi_{b_1}^{a_1}\varphi_{b_2}^{a_2}\left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}\,\partial^{(2)}\eta^{a_2}}\right)_{^{(2)}\eta^a=\varphi^a(^{(1)}\eta^b)} + \varphi_{b_1b_2}^{a_1}\left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}}\right)_{^{(2)}\eta^a=\varphi(^{(1)}\eta^b)} - \\ - \frac{\partial^{2(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\,\partial^{(1)}\eta^{b_2}} = \sum_{s=1}^{n-p}\underset{s}{\lambda_{b_1b_2}}\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,. \tag{1,56}$$

Je nyní, jak plyne z $(1{,}52)_b$, $(1{,}50)_{a,b}$, (1,47):

$$\left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}\,\partial^{(2)}\eta^{a_2}}\right)_{\underset{0}{^{(2)}\eta^a}=\varphi^a(\underset{0}{^{(1)}\eta^b})} = \left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\partial\eta^{a_2}}\right)_{\underset{0}{\eta^a}=\underset{0}{^{(1)}\eta^a}=\underset{0}{^{(2)}\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\partial\eta^{a_2}}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\partial^{2(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\partial^{(1)}\eta^{a_2}}\right)_{\underset{0}{^{(1)}\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{2(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\partial\eta^{a_2}}\right)_0.$$

Odtud a z $(1{,}55)_b$, (1,49) plyne následující přepis relací (1,56):

$$\left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}}\right)_{\underset{0}{^{(2)}\eta^a}=\varphi^a(\underset{0}{^{(1)}\eta^b})}(\varphi_{b_1b_2}^{a_1})_0 = \sum_{s=1}^{n-p}(\underset{s}{\lambda_{b_1b_2}})_0\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,,$$

což můžeme vzhledem k předchozím úvahám a k zavedené symolice psát ve tvaru

$$\underset{0}{^{(1)}B_{a_1}^\alpha}(\varphi_{b_1b_2}^{a_1})_0 = \sum_{s=1}^{n-p}(\underset{s}{\lambda_{b_1b_2}})_0\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,.$$

Odtud plyne, vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\underset{0}{^{(1)}B_a^\alpha}$ $(a = 1, \ldots, p)$, $\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \ldots, n)$, jednak

$$(\underset{s}{\lambda_{b_1b_2}})_0 = 0 \quad (b_1, b_2 = 1, \ldots, p)\,, \tag{1,56$_a$}$$

jednak

$$(\varphi_{b_1b_2}^{a_1})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad a_1, b_1, b_2 = 1, \ldots, p\,. \tag{1,56$_b$}$$

Metodou úplné indukce snadno pak ověříme, že platí

$$(\underset{s}{\lambda_{b_1\ldots b_l}})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad 2 \leqq l \leqq k \tag{1,57$_a$}$$

a pro $b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$ a dále, že je

$$(\varphi_{b_1\ldots b_l}^{a_1})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad 2 \leqq l \leqq k \tag{1,57$_b$}$$

a pro $a_1, b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$.

Z definice a z $(1{,}55)_a$, $(1{,}56)_a$, $(1{,}57)_a$ pak plyne ihned, že variety $^{(1)}X_p$, $^{(2)}X_p$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk k-tého řádu, což jsme měli dokázat.

Poznámka 7. Z předchozích vět vyplývají bezprostředně dva důsledky. Především lze tvrzení z vět 3, 4 spojit a výsledek formulovat stručně takto:

K tomu, aby variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *měly – za předpokladů uvedených na počátku – v bodě* $\underset{0}{P}$ *styk k-tého řádu, je nutné a stačí toto: Variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *můžeme lokálně v nějakém okolí bodu* $\underset{0}{P}$ *vzáhnout k jednomu a témuž systému parametrů* η^a *tak, že při odpovídajícím parametrickém popisu tvaru* (1,47) *variet* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *jsou splněny podmínky* (1,49).

Z unicity Taylorova rozvoje analytické funkce a z věty 3 plyne bezprostředně:

Nechť funkce ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$ *v* $(1,1)_{a,b}$ *jsou analytickými funkcemi v nějakém okolí bodu* $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ *a podobně* ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)$ *jsou analytickými funkcemi v nějakém okolí bodu* $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ *a nechť platí dále:*

(I) *jsou splněny předpoklady* (a), (b) *na str.* 171 *o varietách* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *(s popisem* $(1,1_{a,b})$*);*

(II) *variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *s popisem* $(1,1)_{a,b}$ *mají ve společném bodě styk libovolně vysokého řádu.*

Potom variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *splývají v celém (dostatečně malém) okolí bodu* $\underset{0}{P}$.

V následující části II tohoto článku budeme se zabývat dvěma speciálními definicemi styku: První bude známá metrická definice styku regulárních křivek, druhá pak jinou metrickou definicí styku nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ v E_n. Prokážeme určitou „ekvivalenci" těchto definic styku s definicí styku vyslovenou v této části I.

II

Nechť E_n značí v dalším n-rozměrný euklidovský prostor o pravoúhlých (kartézských) souřadnicích x^α.

Nechť bod $\underset{0}{P}$ o souřadnicích $\underset{0}{x}{}^\alpha$ je bodem společným dvěma křivkám ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$, které mají parametrický popis

$$ {}^{(1)}C: \quad x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}t) \,, \qquad (2,1)_a $$

$$ {}^{(2)}C: \quad x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}t) \,, \qquad (2,1)_b $$

při čemž předpokládáme:

(a) pro hodnotu ${}^{(1)}\underset{0}{t}$ parametru ${}^{(1)}t$ křivky ${}^{(1)}C$ a pro hodnotu ${}^{(2)}\underset{0}{t}$ parametru ${}^{(2)}t$ křivky ${}^{(2)}C$ je

$$ \underset{0}{x}{}^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{t}) = {}^{(2)}x({}^{(2)}\underset{0}{t}) \,; $$

(b) existuje okolí bodu $\underset{0}{P}$ na křivce ${}^{(1)}C$, v němž funkce ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}t)$ mají spojité derivace (podle ${}^{(1)}t$) až do řádu k-tého ($k \geqq 1$). Analogický předpoklad činíme o funkcích ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}t)$;

(c) bod $\underset{0}{P}$ je regulárním bodem křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$.

Označíme-li ${}^{(1)}s$ oblouk křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}s$ oblouk křivky ${}^{(2)}C$, pak jest

$$ {}^{(1)}s = \int_{{}^{(1)}t_0}^{{}^{(1)}t} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^{(1)}x^\alpha}{\mathrm{d}^{(1)}t} \frac{\mathrm{d}^{(1)}x^\beta}{\mathrm{d}^{(1)}t}}\, \mathrm{d}^{(1)}t \,, \quad {}^{(2)}s = \int_{{}^{(2)}t_0}^{{}^{(2)}t} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^{(2)}x^\alpha}{\mathrm{d}^{(1)}t} \frac{\mathrm{d}^{(2)}x^\beta}{\mathrm{d}^{(2)}t^\alpha}}\, \mathrm{d}^{(2)}t \,, \tag{2,2} $$

kde

$$ g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ pro } \alpha = \beta \,, \\ 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta \,. \end{cases} $$

Za našich předpokladů můžeme křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ vztáhnout lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$ — k jejich oblouku jakožto parametru. Můžeme tedy pro ně psát následující lokální popis:

$$ {}^{(1)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}s) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}t({}^{(1)}s)) \,, \tag{2,3$_a$} $$

$$ {}^{(2)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}s) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}t({}^{(2)}s)) \,, \tag{2,3$_b$} $$

při čemž

$$ {}^{(1)}s = {}^{(2)}s = 0 \Rightarrow {}^{(1)}\xi^\alpha(0) = {}^{(2)}\xi^\alpha(0) = \underset{0}{x^\alpha} \,. \tag{2,4} $$

Obvyklá definice styku aspoň k-tého řádu křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ je nyní tato:

Platí-li při korespondenci ${}^{(1)}s = {}^{(2)}s = s$

$$ \lim_{s \to 0} \frac{{}^{(2)}\xi^\alpha(s) - {}^{(1)}\xi^\alpha(s)}{s^k} = 0 \,,\text{[12]} $$

kde k je nějaké přirozené číslo, potom říkáme, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu.

Je nyní dobře známo, že za platnosti našich předpokladů jsou podmínky

$$ \left(\frac{\mathrm{d}^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^l}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^{l(1)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^l}\right)_{s=0}, \quad l = 0, \ldots, k \tag{2,5} $$

nutnými a postačujícími podmínkami pro styk aspoň k-tého řádu křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ v bodě $\underset{0}{P}$.

Dokážeme nyní velmi snadno, že předchozí „metrická" definice styku dvou křivek je ekvivalentní s „afinní" definicí styku dvou křivek z části I této práce (pro $p = 1$) a to ekvivalentní v tomto smyslu:

Mají-li křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ za uvedených předpokladů ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „metrické" definice styku křivek, potom mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „afinní" definice styku křivek a naopak.

Abychom toto tvrzení dokázali, předpokládejme nejdříve, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2,1)_a$, $(2,1)_b$ mají za předpokladů (a), (b), (c) shora uvedených v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu metrické definice styku křivek. Vztáhne-

---

[12]) Je tedy též $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{{}^{(2)}\xi^\alpha(s) - {}^{(1)\alpha}(s)}{s^p} = 0$ pro $0 \leqq s < k$.

me-li každou z těchto křivek k jejímu oblouku jakožto novému parametru, potom při korespondenci ${}^{(1)}s = {}^{(2)}s \equiv s$ platí podmínky (2,5), jak bylo v předchozím uvedeno. Odtud a z věty 4 v části I plyne pak ihned, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „afinní“ definice styku variet z části I (kde klademe $p = 1$).

Předpokládejme za druhé, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2,1)_a$, $(2,1)_b$ mají — za platnosti předpokladů (a), (b), (c) — v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „afinní“ definice 1 styku variet z části I (definice z části I pro případ $p = 1$). Potom — podle věty 3 v části I — můžeme křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ lokálně (v dostatečně malých okolích bodu $\underset{0}{P}$ na těchto křivkách) vztáhnout k jednomu a témuž parametru t, tj.

$$ {}^{(1)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(t)\,, \tag{2,6$_a$} $$

$$ {}^{(2)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha(t)\,, \tag{2,6$_b$} $$

při čemž platí

$$ \left(\frac{\mathrm{d}^{l\,(1)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^l}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^{l(2)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^l}\right)_0, \quad l = 0, 1, \ldots, k\,, \tag{2,7} $$

kde symbol $(\ )_0$ představuje hodnotu veličiny v závorce uvedené pro $t = \underset{0}{t}$, kde

$$ \underset{0}{x^\alpha} = {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\underset{0}{t}) = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha(\underset{0}{t})\,.^{13)} \tag{2,8} $$

Funkce ${}^{(1)}s(t)$, ${}^{(2)}s(t)$ takto definované[14])

$$ {}^{(1)}s = \int_{\underset{0}{t}}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^{(1)}\bar{x}^\beta}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t\,, \quad {}^{(2)}s = \int_{\underset{0}{t}}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^{(2)}\bar{x}^\beta}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t \tag{2,9$_a$} $$

jsou oblouky křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ v uvedeném pořadí. Za platnosti našich předpokladů plyne lokálně, v okolí hodnoty ${}^{(1)}s = {}^{(2)}s = 0$,

$$ t = {}^{(1)}\varphi({}^{(1)}s)\,, \quad t = {}^{(2)}\varphi({}^{(2)}s)\,. \tag{2,9$_b$} $$

Odtud plyne pro křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2,6)_{a,b}$ lokální popis

$$ {}^{(1)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}s) \equiv {}^{(1)}\bar{x}^\alpha({}^{(1)}\varphi({}^{(1)}s))\,, \tag{2,10$_a$} $$

$$ {}^{(2)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}s) \equiv {}^{(2)}\bar{x}^\alpha({}^{(2)}\varphi({}^{(2)}s))\,. \tag{2,10$_b$} $$

Z $(2,9)_{a,b}$ a (2,7) plyne (s užitím poučky o derivování inversních funkcí)

$$ \left(\frac{\mathrm{d}^{l\,(1)}\varphi}{\mathrm{d}^{(1)}s^l}\right)_{{}^{(1)}s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^{l(2)}\varphi}{\mathrm{d}s^2}\right)_{{}^{(2)}s=0}, \quad l = 0, 1, \ldots, k\,, \tag{2,11} $$

jak se snadno ověří.

---

[13]) $\underset{0}{x^\alpha}$ jsou souřadnice bodu $\underset{0}{P}$ společného křivkám ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$.

[14]) Viz (2,2).

Pro křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2{,}10)_a$, $(2{,}10)_b$ plyne z $(2{,}10)_{a,b}$, (2,7), $(2{,}9)_a$, (2,11), (2,8)

$$({}^{(1)}\xi^\alpha)_{{}^{(1)}s=s=0} = ({}^{(2)}\xi^\alpha)_{{}^{(2)}s=s=0}$$

a dále

$$\left(\frac{\mathrm{d}{}^{(1)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}{}^{(1)}s}\right)_{{}^{(1)}s=s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(1)}\varphi}{\mathrm{d}{}^{(1)}s}\right)_{{}^{(1)}s=s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(2)}\varphi}{\mathrm{d}{}^{(2)}s}\right)_{{}^{(2)}s=s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(2)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}{}^{(2)}s}\right)_{{}^{(2)}s=s=0}$$

a tedy při korespondenci ${}^{(2)}s = {}^{(1)}s = s$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2{}^{(1)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^2{}^{(2)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=0}.$$

Snadno bychom nyní dokázali (metodou úplné indukce), že je

$$\left(\frac{\mathrm{d}^l{}^{(1)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^l}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^l{}^{(2)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^l}\right)_0$$

pro $l = 2, \ldots, k$. Platí tedy (2,5), což je postačující podmínkou pro to, aby křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ měly v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „metrické" definice styku křivek. Tím je ekvivalence obou definic styku křivek prokázána.

*

V dalším se budeme zabývat speciální definicí styku dvou nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ v euklidovském prostoru E_n ($n \geqq 2$), odlišné od té, která plyne z definice styku variet z části I pro $p = n - 1$, a prokážeme ekvivalenci těchto dvou definic ve shora uvedeném smyslu.

Nechť bod $\underset{0}{P} \in E_n$ je společným bodem nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ s parametrickým popisem

$$ {}^{(1)}X_{n-1}\colon\ x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, n-1\,, \qquad (2{,}12)_a$$

$$ {}^{(2)}X_{n-1}\colon\ x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, n-1\,, \qquad (2{,}12)_b$$

při čemž nechť platí předpoklady (a), (b), (c) uvedené na počátku části I práce (pro $p = n - 1$). Symbolem $\underset{1}{N^\alpha}$ označme jednotkový vektor metrické normály nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$. Vektor $\underset{1}{N^\alpha} = \underset{1}{N^\alpha}({}^{(1)}\eta^a)$ je tedy v nějakém okolí bodu $\underset{0}{P}$ na nadploše ${}^{(1)}X_{n-1}$ jednoznačně definován podmínkami

$$g_{\alpha\beta}\,{}^{(1)}B^\alpha_a \underset{1}{N^\beta} = 0\,, \quad \left({}^{(1)}B^\alpha_a \equiv \frac{\partial{}^{(1)}x^\alpha}{\partial{}^{(1)}\eta^a}\right); \quad a = 1, \ldots, n-1\,,$$

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{N^\alpha}\underset{1}{N^\beta} = 1\,, \qquad (2{,}13)$$

determinant

$$[{}^{(1)}B^\alpha_1, \ldots, {}^{(1)}B^\alpha_{n-1}, \underset{1}{N^\alpha}] > 0\,.$$

Systémem rovnic

$$ {}^{(2)}x^{\alpha}({}^{(2)}\eta^{a}) - {}^{(1)}x^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) = \mu \underset{1}{N}{}^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) \tag{2,14} $$

je lokálně, v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$, definována jednojednoznačná korespondence mezi body nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$. To bychom ověřili analogicky jako tvrzení věty 1 v části I. Rovnicemi (2,14) jsou v nějakém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{a})$ jednoznačně definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^{a} = \tilde{\varphi}^{a}({}^{(1)}\eta^{b}) \,, \quad a = 1, \ldots, n-1 \,, \quad \mu = \mu({}^{(1)}\eta^{b}) \tag{2,14*} $$

se spojitými parciálními derivacemi až do k-tého řádu (včetně) podle ${}^{(1)}\eta^{a}$.[15])

Nechť symbol $(\mathrm{d}^{l}\mu)_0$ značí l-tý diferenciál funkce $\mu({}^{(1)}\eta^{a})$ v bodě $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{a})$ $(l = 1, \ldots, k)$. Definujme nyní styk aspoň k-tého řádu nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ v bodě $\underset{0}{P}$ takto:

Nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ *mají za shora uvedených předpokladů v bodě* $\underset{0}{P}$ *styk aspoň k-tého řádu ve smyslu korespondence* (2,14), *jestliže platí*

$$ (\mu)_0 = (\mathrm{d}\mu)_0 = \ldots = (\mathrm{d}^{k}\mu)_0 = 0 \,. \tag{2,15} $$

To je tedy speciální definice styku nadploch a to „metrická", neboť používáme metrické normály při definici korespondence (2,14). Platí nyní toto tvrzení:

Mají-li nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ *za uvažovaných předpokladů ve společném bodě* $\underset{0}{P}$ *styk aspoň k-tého řádu ve smyslu právě uvedené definice styku nadploch při korespondenci* (2,14), *potom mají v bodě* $\underset{0}{P}$ *styk aspoň k-tého řádu ve smyslu afinní definice styku variet z části* I (*pro* $p = n - 1$) *a naopak.* Jsou tedy v tomto slova smyslu obě definice styku nadploch *ekvivalentní.*

Abychom toto tvrzení dokázali, předpokládejme nejdříve, že nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ s parametrickým popisem $(2{,}12)_a$, $(2{,}12)_b$ mají — za uvažovaných předpokladů — v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu $(k \geqq 1)$ ve smyslu hoření definice styku nadploch (při korespondenci (2,14)). Z (2,14), (2,14)* plyne lokální identita

$$ {}^{(2)}x^{\alpha}(\tilde{\varphi}^{a}({}^{(1)}\eta^{b})) - {}^{(1)}x^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) = \mu({}^{(1)}\eta^{a}) \underset{1}{N}{}^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) \,. \tag{2,16} $$

Píšeme-li pro nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ parametrický lokální popis

$$ \begin{aligned} {}^{(1)}X_{n-1}\colon \quad x^{\alpha} &= {}^{(1)}\xi^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) \equiv {}^{(1)}x^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) \,, \\ {}^{(2)}X_{n-1}\colon \quad x^{\alpha} &= {}^{(2)}\xi^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) \equiv {}^{(2)}x^{\alpha}(\tilde{\varphi}^{a}({}^{(1)}\eta^{b})) \,, \end{aligned} $$

potom můžeme identitu (2,16) přepsat na tvar

$$ {}^{(2)}\xi^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) - {}^{(1)}\xi^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) = \mu({}^{(1)}\eta^{a}) \underset{1}{N}{}^{\alpha}({}^{(1)}\eta^{a}) \,, $$

[15]) Viz důkaz věty 1, část I.

z níž plyne pak, vzhledem k předpokladu (2,15),

$$\left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\dots\partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right) = \left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\dots\partial^{(1)}\eta^{a}}\right)_0$$

pro $l = 0, 1, \dots, k$; $a_1, \dots, a_1 = 1, \dots, n - 1$; $\alpha = 1, \dots, n$.

Odtud plyne pak ihned — s odvoláním na větu 4 v části I —, že nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu afinní definice styku variet v části I.

Předpokládejme za druhé, že nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ s popisem $(2,12)_a$ $(2,12)_b$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu afinní definice styku variet z části I. Potom — podle věty 3, část I — můžeme uvažované nadplochy vztáhnout k jednomu a témuž systému η^a parametrů, t. j.

$${}^{(1)}X_{n-1}\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\eta^a)\,, \tag{2,17$_a$}$$

$${}^{(2)}X_{n-1}\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha(\eta^a)\,, \tag{2,17$_b$}$$

při čemž platí

$$\left(\frac{\partial^{l\,(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right) = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right)\text{[16]} \tag{2,18}$$

pro $l = 0, 1, \dots, k$; $\alpha = 1, \dots, n$; $a_1, \dots, a_l = 1, \dots, n - 1$. Místo lokálního popisu $(2,17)_a$; $(2,17)_b$ nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ pišme (ryze formálně)

$${}^{(1)}X_{n-1}\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\eta^a)\,, \tag{2,19$_a$}$$

$${}^{(2)}X_{n-1}\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha({}^*\eta^a)\,. \tag{2,19$_b$}$$

Je tedy

$$\underset{0}{x^\alpha} = {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\eta^a) = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha({}^*\eta^a) \quad \text{pro} \quad \eta^a = {}^*\eta^a = \underset{0}{\eta^a}\,.$$

Nechť $\underset{1}{N^\alpha}$ je jednotkový normální vektor nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$ (s popisem $(2,19)_a$). Rovnicemi

$${}^{(2)}\bar{x}^\alpha({}^*\eta^a) - {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\eta^a) = \mu\,\underset{1}{N^\alpha}(\eta^a) \tag{2,20}$$

je pak lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $(\underset{0}{\eta^a})$ — definována jednojednoznačná korespondence

$${}^*\eta^a = \psi^a(\eta^b) \quad (\text{kde} \quad \psi^a(\underset{0}{\eta^b}) = \underset{0}{{}^*\eta^a} = \underset{0}{\eta^a}) \tag{2,21}$$

mezi parametry nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ a tedy též mezi body těchto nadploch v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$. Relacemi (2,20) je rovněž jednoznačně lokálně definována funkce $\mu = \mu(\eta^a)$, při čemž jak funkce $\psi^a(\eta^b)$ ($a = 1, \dots, n - 1$) tak funkce $\mu(\eta^a)$ mají spojité parciální derivace podle argumentů η,

---

[16]) Kde symbol $(\ )_0$ značí hodnotu veličiny v závorce uvedené pro $\eta^a = \underset{0}{\eta^a}$, kde $\underset{0}{x^\alpha} \equiv {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\underset{0}{\eta^a}) = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha(\underset{0}{\eta^a})$ jsou souřadnice bodu $\underset{0}{P}$ v E_n.

až do řádu k v nějakém dostatečně malém okolí bodu $(\underset{0}{\eta^a})$. Platí tedy lokální identita

$$ {}^{(2)}\bar{x}^\alpha(\psi^a(\eta^b)) - {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\eta^a) = \mu(\eta^a)\,\underset{1}{N}^\alpha(\eta^a)\,. \tag{2,22} $$

Z (2,22), (2,21), (2,18) plyne ihned

$$ (\mu)_0 = 0\,. \tag{2,23$_a$} $$

Parciálním derivováním identity (2,22) dostaneme (pro $k \geqq 1$)

$$ \frac{\partial^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\partial^*\eta^b}\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a} - \frac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^a} = \frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\underset{1}{N}^\alpha + \mu\frac{\partial}{\partial\eta^a}\underset{1}{N}^\alpha $$

a tedy též

$$ \left(\frac{\partial^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\partial^*\eta^b}\right)_0\left(\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a}\right)_0 - \left(\frac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\right)_0(\underset{1}{N}^\alpha)_0 + (\mu)_0\left(\frac{\partial}{\partial\eta^a}\underset{1}{N}^\alpha\right)_0. $$

Odtud plyne pak, vzhledem k $(2{,}17)_{a,b}$, $(2{,}19)_{a\,b}$, (2,18), $(2{,}23)_a$,

$$ \left(\frac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^b}\right)_0\left(\left(\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a}\right)_0 - \delta^b_a\right) = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\right)_0(\underset{1}{N}^\alpha)_0\,, $$

a tedy — vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\underset{1}{N}^\alpha$, ${}^{(1)}B^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^a}$ $(a = 1, \ldots, n-1)$ —

$$ \left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a}\right)_0 &= \delta^b_a\,, \\ \left(\frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\right)_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2,23$_b$} $$

pro $a, b = 1, \ldots, n-1$. Podobně jako v důkazu věty 4 bychom si ověřili, že platí (při $k \geqq 2$):

$$ \left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^l\psi^b}{\partial\eta^{a_1}\ldots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 &= 0 \quad \text{pro} \quad l = 2, \ldots, k\,, \\ \left(\frac{\partial^l\mu}{\partial\eta^{a_1}\ldots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 &= 0 \quad \text{pro} \quad l = 2, \ldots, k \end{aligned}\right\} \tag{2,23$_c$} $$

a pro $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, n-1$. Z platnosti podmínek $(2{,}23)_{a,b,c}$ plyne platnost podmínky (2,15). To však znamená — podle naší shora vyslovené definice — že nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu korespondence (2,14). Tím je ekvivalence uvažovaných dvou definic styku nadploch v E_n prokázána.

Poznámka 8. Definici styku nadploch v euklidovském prostoru E_n $(n \geqq 2)$ ve smyslu korespondence (2,14) bychom mohli nyní snadno zobecnit pro styk dvou p-rozměrných variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ v E_n $(1 \leqq p < n-1)$. V takovémto případě bychom uvažovali $n - p$ jednotlivých vzájemně kolmých vektorů

$\underset{s}{N^\alpha}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ a současně kolmých k tečnému prostoru variety ${}^{(1)}X_p$ v bodě $\underset{0}{P}$ a místo korespondence (2,14) korespondenci

$$ {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \underset{s}{N^\alpha} , $$

kde $\alpha = 1, \ldots, n$; $a = 1, \ldots, p$.

Poznamenejme ještě závěrem, že je poměrně snadné definici styku variet z části I zobecnit pro styk variet v afinních prostorech s libovolnou konexí.

Резюме

О КАСАНИИ МНОГООБРАЗИЙ В АФФИННОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička), Прага

(Поступило в редакцию 25/III 1957 г.)

Рассмотрим в аффинном линейном пространстве $E_n (n \geqq 2)$ с координатами x^α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ два многообразия ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ $(1 \leqq p \leqq n - 1)$, заданные в параметрическом виде

$$ {}^{(1)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) , \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p , \tag{I$_\mathrm{a}$} $$

$$ {}^{(2)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) , \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p , \tag{I$_\mathrm{b}$} $$

причем предполагается, что

(а) точка $\underset{0}{P} \in E_n$ с координатами $\underset{0}{x^\alpha}$ есть общая точка многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Этой точке соответствуют значения ${}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}$ параметров ${}^{(1)}\eta^a$ многообразия ${}^{(1)}X_p$ и значения ${}^{(2)}\underset{0}{\eta^a}$ параметров ${}^{(2)}\eta^a$ многообразия ${}^{(2)}X_p$;

(б) функции ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$, ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)$ обладают непрерывными частными производными по своим аргументам вплоть до порядка $k \geqq 1$ (включительно) в некоторых окрестностях точки ${}^{(1)}X_p$ на многообразиях ${}^{(2)}X_p$;

(в) точка $\underset{0}{P}$ — регулярная точка многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Пусть $\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ — постоянные векторы в E_n, удовлетворяющие условиям:

$$ \begin{aligned} &\text{определитель} \quad [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0 , \\ &\text{определитель} \quad [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0 , \end{aligned} \tag{II} $$

где

$$\underset{0}{^{(1)}B^{\alpha}_{a}} \equiv \left(\frac{\partial^{(1)}x^{\alpha}}{\partial^{(1)}\eta^{b}}\right)_{^{(1)}\eta^{a}=\underset{0}{^{(1)}\eta^{a}}},$$

$$\underset{0}{^{(2)}B^{\alpha}_{a}} = \left(\frac{\partial^{(2)}x^{\alpha}}{\partial^{(2)}\eta^{a}}\right)_{^{(2)}\eta^{a}=\underset{0}{^{(2)}\eta^{a}}}.$$

В этих предположениях системой уравнений

$$^{(2)}x^{\alpha}(^{(2)}\eta^{a}) - {}^{(1)}x^{\alpha}(^{(1)}\eta^{a}) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \underset{0}{\overset{(s)}{v^{\alpha}}} \qquad \text{(III)}$$

локально определяется некоторое соответствие между точками многообразий $^{(1)}X_p$, $^{(2)}X_p$, являющееся одно-однозначным в достаточно малой окрестности точки $\underset{0}{P}$ (теорема 1 в тексте). Кроме того, уравнениями (III) локально (в достаточно малой окрестности точки $(^{(1)}\eta^{a})$) однозначно определяются и скаляры $\underset{s}{\lambda}(^{(1)}\eta^{a})$ $(s = 1, \ldots, n-p)$, причем функции $\underset{s}{\lambda}(^{(1)}\eta^{a})$ обладают в рассматриваемой окрестности непрерывными частными производными по своим аргументам не менее чем k-го порядка.

Пусть символы $(\mathrm{d}^{l}\underset{s}{\lambda})_0$ представляют полный дифференциал функции $\underset{s}{\lambda}$ $(s = 1, \ldots, n-p)$ l-го порядка $(l = 1, \ldots, k)$ в точке $(\underset{0}{^{(1)}\eta^{a}})$. Тогда мы можем дать следующее определение касания по крайней мере k-го порядка многообразий $^{(1)}X_p$, $^{(2)}X_p$ в их общей точке $\underset{0}{P}$:

Многообразия $^{(1)}X_p$, $^{(2)}X_p$ претерпевают при указанных выше условиях в точке $\underset{0}{P}$ касание по крайней мере k-го порядка, если

$$(\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = \ldots = (\mathrm{d}^{k}\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{для} \quad s = 1, \ldots, n-p\,.$$

Таким образом сформулировано некоторое специальное определение касания двух многообразий в точке линейного аффинного пространства E_n.

Обстоятельство, что два многообразия $^{(1)}X_n$, $^{(2)}X_p$ в E_n претерпевают в точке $\underset{0}{P}$ касание по крайней мере k-го порядка в смысле указанного определения, является независимым (теорема 2 в тексте)

1. от выбора постоянных векторов $\underset{0}{\overset{(s)}{v^{\alpha}}}$ $(s = 1, \ldots, n-p$ со свойствами (II);
2. от выбора системы параметров многообразий $^{(1)}X_p$, $^{(2)}X_p$;
3. от выбора координат в E_n.

Для того, чтобы многообразия ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ $(\mathrm{I})_a$, $(\mathrm{I})_b$ претерпевали — при указанных выше условиях (а), (б), (в) — в точке $\underset{0}{P}$ касание по крайней мере k-го порядка ($k \geqq 1$), необходимо и достаточно следующее:

Существуют функции

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b) \tag{IV} $$

со следующими свойствами:

(A) соотношения (IV) определяют локально одно-однозначное соответствие между параметрами ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ в некоторой окрестности точки $({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a})$;

(Б) ${}^{(2)}\underset{0}{\eta^a} = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a})$;

(В) если уравнения

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, $$
$$ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) $$

представляют локальное параметрическое описание многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, отнесенных к одной и той же системе ${}^{(1)}\eta^a$ параметров, то выполняются условия

$$ \left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}} $$

для $l = 1, \ldots, k$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$ (теоремы 3, 4 чешского текста).

Оказывается, что известное метрическое определение касания двух кривых в E_n равносильно приведенному выше определению касания для случая $p = 1$. Для случая касания двух гиперповерхностей в E_n приводится другое, метрическое определение касания, равносильное указанному выше аффинному определению касания многообразий при $p = n - 1$.

Résumé

SUR LE CONTACT DES VARIÉTÉS DANS UN ESPACE AFFINE LINÉAIRE

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

(Reçu le 25 Mars 1957)

Considérons dans un espace affino-euclidien E_n ($n \geqq 2$) deux variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ($1 \leqq p \leqq n - 1$) aux équations paramétriques suivantes

$$ {}^{(1)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p\,, \tag{I$_a$} $$

$$ {}^{(2)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p\,, \tag{I$_b$} $$

où x^α sont les coordonnées dans E_n. Nous supposerons que

(a) les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ aient en commun le point $\underset{0}{P}$ dont les coordonnées $\underset{0}{x}^\alpha$ dans E_n correspondent aux valeurs ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a$ des paramètres ${}^{(1)}\eta^a$ de la variété ${}^{(1)}X_p$ et aux valeurs ${}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a$ des paramètres ${}^{(2)}\eta^a$ de la variété ${}^{(2)}X_p$;

(b) les fonctions ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)({}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a))$ aient des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $k \geqq 1$ par rapport aux variables ${}^{(1)}\eta^a$ $({}^{(2)}\eta^a)$ dans un entourage du point $\underset{0}{P}$ de la variété ${}^{(1)}X_p$ $({}^{(2)}X_p)$;

(c) le point $\underset{0}{P}$ soit un point régulier des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Soient $\overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha$ $(s = 1, \ldots, n-p)$ des vecteurs constants dans E_n possédant la propriété suivante:

le déterminant

$$[{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha] \neq 0 ,$$

le déterminant (II)

$$[{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha] \neq 0 ,$$

où

$${}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial^{(1)}x^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^a}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a}, \qquad {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial^{(2)}x^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a} .$$

Ces suppositions étant faites le système des équations

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha \tag{III}$$

définit une certaine correspondance entre les points des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, qui est localement biunivoque dans un entourage assez petit du point $\underset{0}{P}$ (théorème 1 du texte tchèque). Les scalaires $\underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ $(s = 1, \ldots, n-p)$ sont bien définis par les équations (III) dans un entourage assez petit du point $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)$ en y possédant des dérivées partielles continues par rapport aux variables ${}^{(1)}\eta^a$ jusqu'à l'ordre k.

En désignant par $(\mathrm{d}^l \underset{s}{\lambda})_0$ la différentielle d'ordre l $(l = 1, \ldots, k)$ de la fonction $\underset{s}{\lambda}$ $(s = 1, \ldots, n-p)$, dans le point $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)$ on définit le contact d'ordre k (au moins) des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ en $\underset{0}{P}$ de la manière suivante:

Nous dirons que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ont en $\underset{0}{P}$ un contact d'ordre k au moins, si les conditions suivantes sont valables: $(\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = \ldots = (\mathrm{d}^k\underset{s}{\lambda})_0 = 0$ *pour* $s = 1, \ldots, n-p$.

C'est une certaine définition du contact de deux variétés au point de l'espace affine linéaire E_n.

Le fait que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ont un contact d'ordre k au moins (dans leur point $\underset{0}{P}$ commun) dans le sens de la définition énoncée, est indépendant (théorème 2 du texte tchèque)

1. du choix des vecteurs $\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ constants dans E_n, qui satisfont aux conditions (II);

2. du choix du système paramétrique des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$;

3. du choix de coordonnées dans E_n.

Pour que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ aient un contact d'ordre k (au moins) au point $\underset{0}{P}$ commun, il faut et il suffit qu'il existe des fonctions

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b) \tag{IV} $$

aux propriétés suivantes:

(A) les relations (IV) déterminent une correspondance locale biunivoque entre les points des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ dans un entourage du point $({}^{(1)}\underset{0}{\eta^b})$;

(B) ${}^{(2)}\underset{0}{\eta^a} = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta^b})$;

(C) les équations

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) , $$
$$ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) $$

étant la description paramétrique des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ douées d'un même système de paramètres ${}^{(1)}\eta^a$, les conditions

$$ \left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}} $$

sont satisfaites pour $l = 1, \ldots, k$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$ (les théorèmes 3 et 4 du texte tchèque).

La définition du contact de deux courbes bien connue en géométrie métrique euclidienne et la définition du contact des variétés énoncée plus haut pour le cas $p = 1$ sont équivalentes. Dans le cas du contact de deux hypersurfaces dans l'espace métrique euclidien on peut introduire une nouvelle définition du contact équivalente avec la définition bien connue du contact en géométrie métrique et avec notre définition affinne du contact (énoncée plus haut) en y posant $p = n - 1$.