Časopis pro pěstování matematiky

Jindřich Nečas

Poznámka k charakteristické vlastnosti Laplaceova obrazu funkce a k převrácení jistých podmnožin Laplaceových obrazů distribucí v Hilbertovy prostory

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 2, 160--170

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108309`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K CHARAKTERISTICKÉ VLASTNOSTI LAPLACEOVA OBRAZU FUNKCE A K PŘEVRÁCENÍ JISTÝCH PODMNOŽIN LAPLACEOVÝCH OBRAZŮ DISTRIBUCÍ V HILBERTOVY PROSTORY

JINDŘICH NEČAS, Praha

DT: 517.63

(Došlo dne 25. února 1957)

V tomto pojednání je definována Laplaceova transformace jisté třídy distribucí, v níž jsou zahrnuty laplaceovsky transformovatelné funkce. Je podána nutná a postačující podmínka pro to, aby daný obraz byl obrazem funkce. Množina Laplaceových obrazů distribucí se dá psát jako $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{H}_{kl}$, kde $\bar{H}_{kl}$ jsou Hilbertovy prostory.

1. Základní definice a vztahy

Nejdříve podáme definici distribuce řádu nejvýše $k = 0, 1, 2, \ldots$, růstu nejvýše $l = 0, 1, 2, \ldots$. Ostatní běžné definice z teorie Laplaceovy transformace, pokud je neuvedeme, jsou obsaženy v knize G. Doetsche [1] v tom znění, jak jich budeme užívat.

Definice 1. *Množina D se skládá z funkcí φ, definovaných v E_1, nekonečněkrát derivovatelných, rovných nule vně konečného intervalu.*

Definice 2. *Množina h_{kl} se skládá z funkcionálů h, definovaných na D (distribucí), které mají tyto vlastnosti: h je v h_{kl}, jestliže existuje funkce definovaná v $\langle 0, \infty)$, absolutně spojitá v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a taková, že $|f(t)| \leqq Me^{lt}$ (M je konstanta), $f(0) = 0$, $\int_0^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2lt}\, \mathrm{d}t < \infty$, $h(\varphi) = (-1)^{k+1} \cdot \int_0^{\infty} f(t)\, \varphi^{(k+1)}(t)\, \mathrm{d}t$.*

Dokážeme nyní tuto jednoduchou větu:

Věta 1. *Buď $h \in h_{k_1 l}$ a $h \in h_{k_2 l}$. Předpokládejme, že $k_1 \leqq k_2$. Buď $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$ funkce určující distribuci h podle definice 2. Potom $f_1^{(k_1 - k_2)}(t) = f_2(t)$. Zde $f_1^{(0)}(t) = f_1(t)$, $f_1^{(-1)}(t) = \int_0^t f_1(s)\, \mathrm{d}s$, $f_1^{(-2)}(t) = \int_0^t f_1^{(-1)}(s)\, \mathrm{d}s$ atd.*

Důkaz. $h(\varphi) = (-1)^{k_1+1} \int\limits_0^\infty f_1(t)\, \varphi^{(k_1+1)}(t)\, \mathrm{d}t$, $h(\varphi) = (-1)^{k_2+1} \int\limits_0^\infty f_2(t)\, \varphi^{(k_2+1)}(t)\,.\,\mathrm{d}t$. Integrujeme-li v prvém integrálu per partes, dostaneme: $h(\varphi) = (-1)^{k_2+1}\,.$ $.\int\limits_0^\infty f^{(k_1-k_2)}(t)\, \varphi^{(k_2+1)}(t)\, \mathrm{d}t$, a tedy $\int\limits_0^\infty [f_1^{(k_1-k_2)}(t) - f_2(t)]\, \varphi^{k_2+1}(t)\, \mathrm{d}t = 0$ pro $\varphi \in D$. Položme $f(t) = f_1^{(k_1-k_2)}(t) - f_2(t)$; $f(t)$ je spojitá v $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$. Předpokládejme, že pro nějaké $t_1 > 0$ je $f(t_1) \neq 0$. Najděme $\Psi \in D$ takovou, že $\int\limits_0^\infty f(t)\, \Psi(t)\, \mathrm{d}t > 0$. Taková funkce vždy existuje. Snadno se dá ukázat, že existuje funkce $X(t) \in D$ taková, že pro $t \geqq 0$ je $X^{(k_2+1)}(t) = \Psi(t)$. Vskutku, položme

$$\Psi_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} [\Psi(t) - \Psi(t + A_0)]\, \mathrm{d}t\,,$$

kde A_0 je tak veliké, že $\Psi(t) = 0$, je-li t non $\in \langle -\tfrac{1}{2}A_0, \tfrac{1}{2}A_0\rangle$. Jestliže již budeme mít zkonstruovánu funkci $\Psi_k(t)$, potom

$$\Psi_{k+1}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} [\Psi_k(t) - \Psi_k(t + A_k)]\, \mathrm{d}t\,,$$

kde A_k je tak veliké, že $\Psi_k(t) = 0$, je-li t non $\in \langle -\tfrac{1}{2}A_k, \tfrac{1}{2}A_k\rangle$. Zřejmě $\Psi_{k_2+1}(t) \in D$ a $\Psi_{k_2+1}^{(k_2+1)}(t) = \Psi(t)$. To vede ovšem ke sporu.

Definice 3. *Funkce $h(t)$ definovaná skoro všude v $\langle 0, \infty)$ se nazývá laplaceovsky transformovatelná nebo originálem, jestliže platí:*

1. *v každém konečném intervalu $0 \leqq a \leqq b < \infty$ je integrabilní podle Lebesguea,*

2. *existuje komplexní číslo p tak, že $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_0^A e^{-pt} h(t)\, \mathrm{d}t$ je konečné číslo. Laplaceovým obrazem funkce $h(t)$ nazýváme potom $H(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} h(t)\, \mathrm{d}t$. Množinu laplaceovsky transformovatelných funkcí budeme značit m.*

Definice 4. *Laplaceův obraz $H(p)$ distribuce $h \in h_{kl}$ je $H(p) = p^{k+1} \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t$ a je definován pro p, pro něž $\mathrm{Re}\, p > l$.*

Poznamenejme nejdříve, že obraz distribuce nezávisí na funkci f definující ji jako funkcionál v D. To plyne snadno z věty 1 a známého faktu, že Laplaceův obraz funkce $\int\limits_0^t f(s)\, \mathrm{d}s$ je $\dfrac{F(p)}{p}$, kde $f(s)$ je originál a $F(p)$ je jeho obraz.

Ukažme nyní, že množina všech originálů ve smyslu definice 3 je algebraicky isomorfní s množinou všech distribucí řádu nula a růstu $l \geqq 0$. To umožní psát $m = \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$. Navíc ukažme, že definice 4 je zobecněním definice 3. Na tyto otázky odpovídá

věta 2. *Funkce h patří do m a integrál $\int_0^{\infty} e^{-pt}h(t)\,dt$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \sigma \geqq \geqq 0$ tehdy a jenom tehdy, existuje-li funkce $h_1(t)$ definovaná v $\langle 0, \infty)$, absolutně spojitá v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a pro niž platí: $h_1(0) = 0$, $|h_1(t)| \leqq M(\tau)\, e^{\tau t}$, kde $M(\tau)$ závisí pouze na τ a $\tau > \sigma \geqq 0$. Přitom $h_1'(t) = h(t)$. Je-li $h \in m$, potom $H(p) = pH_1(p)$.*

Důkaz. *Nutnost.* Položme $h_1(t) = \int_0^t h(u)\,du$. Buď $x > \sigma$. Je $h_1(t) = \int_0^t h(u)\,du = \int_0^t h(u)\,e^{-xu}e^{xu}\,du = e^{xu}\int_0^u h(s)\,e^{-xs}\,ds]_0^t - x\int_0^t(\int_0^u h(s)\,e^{-xs}\,ds)\,e^{xu}\,du$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{u\to\infty}\int_0^u h(s)\,e^{-xs}\,ds$ je konečné číslo, dostáváme

$$|h_1(t)| \leqq M(x)\,e^{xt}\,. \tag{1}$$

Postačitelnost. Buď $h(t) = h_1'(t)$ a $h_1(t)$ nechť splňuje předpoklady věty 1. Buď $\operatorname{Re} p > \sigma$. Zvolme $\sigma < x < \operatorname{Re} p$.

$$\int_0^A h(t)\,e^{-pt}\,dt = h_1(A)\,e^{-pA} + p\int_0^A h_1(t)\,e^{-pt}\,dt\,.$$

Protože $|h_1(A)| \leqq M(x)\,e^{xA}$, dostáváme odtud, že integrál $\int_0^{\infty} h(t)\,e^{-pt}\,dt$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \sigma$ a navíc $H(p) = pH_1(p)$. Tím je důkaz věty 2 hotov.

Jestliže tedy funkci $h \in m$ přiřadíme distribuci

$$h(\varphi) = -\int_0^{\infty}(\int_0^t h(s)\,ds)\,\varphi'(t)\,dt \in \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$$

a naopak distribuci z $\sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$, $h(\varphi) = -\int_0^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt$ přiřadíme funkci $f'(t)$, dostáváme výše zmíněný algebraický isomorfismus. Z věty 2 bezprostředně plyne, že definice 4 je zobecněním definice 3.

2. Zavedení prostorů $\overline{H}_{-1l}$

Definice 5. *h_{-1l} je množina funkcí $h(t)$ absolutně spojitých v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$, pro které dále platí $h(0) = 0$, $|h(t)| \leqq Me^{lt}$, $\int_0^{\infty} |h(t)|^2\,e^{-2lt}\,dt < \infty$. H_{-1l} je množina Laplaceových obrazů funkcí z h_{-1l}.*

H_{-1l} je zřejmě lineární prostor. Při zavedení skalárního součinu v H_{-1l} a doplnění na úplný prostor se budeme opírat o známou větu z teorie Laplaceovy transformace.

Věta 3. *Podmínka*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty \tag{2}$$

je nutná a stačí k tomu, aby funkce $F(p)$, regulární v polorovině $\operatorname{Re} p > \gamma$, *byla Laplaceovým obrazem funkce $f(t)$, pro kterou platí $\int_0^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2\gamma t} \, dt < \infty$. Je-li podmínka (2) splněna, potom*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau = 2\pi \int_0^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2\gamma t} \, dt \,. \tag{3}$$

$F(\gamma + i\tau)$ je funkce, pro niž

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty \,, \quad \lim_{\substack{\sigma\to\gamma \\ \sigma>\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau) - F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau = 0 \,.$$

Tato limita funkcí $F(\sigma + i\tau)$ v uvedeném smyslu vždy existuje.

Důkaz viz [1], str. 422.

Jestliže $h \in h_{-1l}$, potom $\int_0^{\infty} |h(t)|^2 e^{-2lt} \, dt < \infty$, a tedy $\sup_{\sigma>l} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty$.

Zaveďme skalární součin a normu v lineárním prostoru H_{-1l} takto:

Definice 6. *Je-li $F(p)$ a $G(p)$ v H_{-1l}, potom skalární součin funkcí $F(p)$ a $G(p)$ je $(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(l + i\tau) \overline{G(l + i\tau)} \, d\tau$. Normu pro funkci $F(p)$ definujeme takto: $\|F\| = [\int_{-\infty}^{\infty} |F(l + i\tau)|^2 \, d\tau]^{\frac{1}{2}}$.*

Zaveďme nyní do našich úvah množiny funkcí P_l, $l = 0, 1, \ldots$, s těmito vlastnostmi:

Definice 7. *Buď P_l $(l = 0, 1, \ldots)$ množina funkcí $F(p)$, pro niž platí:*

1. *$F(p)$ je regulární v polorovině* $\operatorname{Re} p > l$,
2. $\sup_{\sigma>l} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty$.

V P_l definujeme skalární součin funkcí $F(p)$ a $G(p)$ rovnicí

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(l + i\tau) \, G(\overline{l + i\tau}) \, d\tau \,.$$

Z věty 3 plyne téměř bezprostředně:

Věta 4. *P_l je Hilbertův prostor a $P_l = \overline{H}_{-1l}$.*

Důkaz. Jde v podstatě o to, dokázat, že a) P_l je úplný, b) $\|F\| = 0 \Rightarrow F = 0$. Důkaz platnosti ostatních axiomů Hilbertova prostoru je zcela jednoduchý.

a) Buď tedy F_n cauchyovská posloupnost funkcí z P_l. Z úplnosti prostoru $L_2(0, \infty)$ plyne existence $f(t)$ takové, že

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty |f_n(t) - f(t)|^2 e^{-2lt} \, dt = 0 .$$

$F(p)$ však leží v P_l a je opět podle (3) nutně

$$\lim_{n \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(l + i\tau) - F(l + i\tau)|^2 \, d\tau = 0 .$$

b) Nechť tedy $\|F\| = 0$. Podle (3) však $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau = 0$ pro $\sigma > l$, což vzhledem k regulárnosti $F(p)$ má za následek, že $F(p) = 0$. Rovnost $P_l = \overline{H}_{1l}$ plyne bezprostředně z (3).

V dalším budeme potřebovat následující větu z teorie Laplaceovy transformace:

Věta 5. *Nechť $F \in \overline{H}_{-1l}$. Potom pro $\sigma > l$ je $f(t) = e^{\sigma t} \operatorname{l.i.m}_{\omega = \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} \cdot F(\sigma + i\tau) \, d\tau$, což znamená*

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{-\infty}^{0} |f_\omega(t)|^2 e^{-2\sigma t} \, dt + \int_0^\infty |f(t) - f_\omega(t)|^2 e^{-2\sigma t} \, dt = 0 .$$

Zde klademe $f_\omega(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} F(\sigma + i\tau) \, d\tau$.

Důkaz viz [1], str. 423.

Uveďme nyní charakteristiku těch $F(p)$, které jsou v H_{-1l}.

Věta 6. *Nechť $F \in \overline{H}_{-1l}$. Nutná a postačující podnínka pro to, aby $F \in H_{-1l}$, je:*

1. *integrál* $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x - i\infty}^{x + i\infty} F(p) \, e^{pt} \, dp$ *je nezávislý na x (zde se integruje po přímce* $\operatorname{Re} p = x > l$ *ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x - i\infty}^{x + i\infty} F(p) \, e^{+pt} \, dp$ *je absolutně spojitá funkce v každém omezeném intervalu z $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,*

3. $|\varphi(t)| \leqq M e^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Důkaz. *Nutnost.* Je-li $F \in \bar{H}_{-1l}$, potom $\int_0^\infty |f(t)| \, e^{-xt} \, dt < \infty$ pro $x > l$, jak plyne z odhadu $|f(t)| \leqq Me^{lt}$. Ze známé věty o inversním integrálu (viz [1], str. 212) plynou podmínky 1, 2, 3.

Postačitelnost. Nechť platí podmínky 1, 2, 3. Podle věty 5 je

$$f(t) = e^{\sigma t} \operatorname*{l.i.m}_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} F(\sigma + i\tau) \, d\tau.$$

Z množiny funkcí $f_\omega(t)$ vybereme posloupnost konvergující skoro všude k $f(t)$. Tato limita se však vzhledem k podmínce 1 věty 6 skoro všude rovná $\varphi(t)$. Tím je důkaz proveden.

Z konvergence v prostoru $\bar{H}_{-1l}$ plynou některé téměř samozřejmé výsledky.

Věta 7. *Nechť F_n je v $\bar{H}_{-1l}$ a $F_n \to 0$ v prostoru $\bar{H}_{-1l}$. Potom na každé omezené oblasti Ω, jejíž uzávěr leží napravo od přímky* $\operatorname{Re} p = l$, *$F_n^{(k)} \to 0$ stejnoměrně bodově ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $F_n^{(k)}$ jsou derivace).*

Důkaz plyne bezprostředně z faktu, že existuje obdélník Ω', jenž leží napravo od přímky $\operatorname{Re} p = l$ a přitom $\Omega' \supset \bar{\Omega}$. Zřejmě platí $\int_{\Omega'} |F_n(p)|^2 \, d\Omega \to 0$, což je podmínka postačující pro platnost naší věty. (Viz [3], str. 431.)

3. Užití prostorů $\bar{H}_{-1l}$

Hilbertův prostor $\bar{H}_{-1l}$ nám může prokázat velmi platné služby při důkaze existence a unicity řešení parciálních diferenciálních rovnic. Ukážeme to na jednoduchém, ale typickém příkladě:

Hledejme rozdělení teploty v konečné tyči délky 2, je-li počáteční teplota rovna nule a jsou-li oba její konce udržovány na konstantní teplotě 1.

Na řešení budeme klást tyto podmínky:

1. $u(t, x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ jsou spojité funkce v oblasti Ω $(0 < t < \infty, \, -1 < x < 1)$,

2. existuje M tak, že $u(t, x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ jsou v absolutní hodnotě $\leqq M(\varepsilon) \, e^t$ pro $t > 0$ a $-1 + \varepsilon \leqq x \leqq 1 - \varepsilon$,

3. $u(t, x)$ je spojitě prodlužitelná k nule, když $t \to 0$ a $-1 < x < 1$,

4. $\lim\limits_{x \to \pm 1} \int_0^\infty |1 - u(t, x)|^2 \, e^{-2t} \, dt = 0$, (4)

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ uvnitř Ω.

Jestliže budeme postupovat obvyklým způsobem (viz např. [4]), potom pro obraz $U(p, x) = \int_0^\infty u(t, x)\, e^{-pt}\, dt$ definovaný pro $\mathrm{Re}\, p > 1$ dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2U(p,x)}{dx^2} - pU(p,x) = 0\,. \tag{6}$$

Její obecné řešení je

$$U(p, x) = A(p) \operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\,x + B(p) \operatorname{sh} \sqrt{p}x\,.$$

Z podmínky $\lim_{x\to\pm1} \sup_{\sigma>1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| U(\sigma + i\tau, x) - \frac{1}{\sigma + i\tau} \right|^2 d\tau = 0$, která je ekvivalentní podmínce (4), a z věty 7 plyne, že pro $\mathrm{Re}\, p > 1$ je $A(p) \operatorname{ch} \sqrt{p} \pm \pm B(p) \operatorname{sh} \sqrt{p} = \frac{1}{p}$. Odtud plyne, že $Ap = \frac{1}{p} \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}$, $B(p) = 0$. Je tedy

$$U(p, x) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\,x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}\,. \tag{7}$$

Jestliže $U(p, x)$ je obrazem s požadovanými vlastnostmi, potom

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\,x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}\, e^{pt}\, dp\,. \tag{8}$$

Tento integrál bereme ve smyslu hlavní hodnoty ($\sigma > 1$). Funkce $u(t, x)$ definovaná v (8) nyní splňuje zřejmě vlastnost 1, a vzhledem k tomu, že platí $\left| \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\,x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}} \right| \leq M e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\tau}(1 - |x|)}$, dostáváme 2. Dále platí zřejmě 4 a 5. Obraz $u(t, x)$ je 7. Protože $u(t, x)$ je spojitě prodlužitelná pro $t \to 0$, musí toto spojité prodloužení být rovno nule, jak plyne z rovnice (6). Tím jsme dokázali existenci řešení. Unicitu ve třídě funkcí splňujících podmínky 1, 2, 3, 4, 5 bychom dokázali úplně stejným způsobem.

4. Vyšetřování prostorů $\bar{H}_{kl}$

Nyní budeme vyšetřovat lineární prostor H_{0l} a obecně lineární prostory H_{kl}.

Definice 8. *H_{kl} je množina Laplaceových obrazů distribucí z h_{kl} ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots$). Je-li $F(p)$ a $G(p)$ v H_{kl}, potom definujeme skalární součin rovností*

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l + i\tau)\, \overline{G(l + i\tau)}}{(l + i\tau)^{k+1} (l - i\tau)^{k+1}}\, d\tau\,.$$

Zcela analogicky, jako jsme to učinili v oddíle 3, se dá ukázat, že $\overline{H}_{kl}$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem zavedeném v definici 8.

Snadno se též nahlédne, že $\overline{H}_{kl}$ se skládá ze všech funkcí s vlastností

$$\sup_{\sigma > l} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\sigma + i\tau)}{(\sigma + i\tau)^{k+1}} \right|^2 \mathrm{d}\tau < \infty ; \tag{9}$$

$$F(p) \text{ je regulární v polorovině } \operatorname{Re} p > l . \tag{10}$$

Zobrazme nyní prostor $\overline{H}_{-1l}$ na $\overline{H}_{kl}$ takto: Prvku $F \in \overline{H}_{-1l}$ přiřadíme $p^{k+1}F(p) \in \overline{H}_{kl}$. Toto zobrazení je isometricky isomorfní. Symbolicky píšeme: $Z(F) = p^{k+1}F$.

Zabývejme se nyní prostory $\overline{H}_{0l}$. Z konstrukce je zřejmé, že množina H_{0l} je hustá v $\overline{H}_{0l}$. (Je snadné ukázat, že H_{0l} je hustá v $\overline{H}_{kl}$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$.) Jest $H_{0l} \neq \overline{H}_{0l}$. To plyne ze zřejmého faktu, že $H_{-1l} \neq \overline{H}_{-1l}$. Například v $\overline{H}_{01}$ leží 1, což odpovídá distribuci, která je prvkem h_{11} a k níž příslušná absolutně spojitá funkce je $f(t) = t$. Tato distribuce se nazývá Diracova funkce $\delta_0(t)$. Jak jsou tedy charakterisovány ty obrazy, jejichž originály jsou z h_{0l} a tedy funkce?

Věta 8. *Nutná a postačující podmínka, aby $F \in H_{0l}$ je, aby*

0. $F \in \overline{H}_{0l}$,

1. *integrál* $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p}\, e^{pt}\, \mathrm{d}p$ *byl nezávislý na x (zde se integruje po přímce $\operatorname{Re} p = x > l$ ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p}\, e^{pt}\, \mathrm{d}p$ *byla absolutně spojitá funkce v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,*

3. $|\varphi(t)| \leqq Me^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Důkaz. *Nutnost.* Je-li $F \in H_{0l}$, potom $\dfrac{F(p)}{p} \in H_{-1l}$, a tedy podle věty 6 platí podmínky 1, 2, 3.

Postačitelnost. Platí-li podmínky 0, 1, 2, 3, potom podle věty 6 platí, že $\dfrac{F(p)}{p} \in H_{-1l}$, a tedy $F(p) \in H_{0l}$.

Již dříve bylo poznamenáno, že $m = \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$. Věta 8 dává tedy úplnou charakteristiku Laplaceových obrazů funkcí. Charakteristiku Laplaceových obrazů podal RICARDO SAN JUAN LLOSA v [5]. Naše charakteristika se liší od jeho hlavně proto, že východiskem pro důkaz věty 6 byla věta 3.

Parafrází věty 8 pro prostory $\overline{H}_{kl}$ je věta následující:

Věta 9. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby $F \in H_{kl}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, je, aby*

0. $\overset{*}{F} \in \overline{H}_{kl}$,

1. *integrál* $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p^{k+1}} e^{pt}\, \mathrm{d}p$ *byl nezávislý na x (integruje se po přímce* $\operatorname{Re} p = x > l$ *ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. *integrál* $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p^{k+1}} e^{pt}\, \mathrm{d}p$ *byla absolutně spojitá funkce v každém konečném intervalu z* $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,

3. $|\varphi(t)| \leqq M e^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Poznamenejme, že konvergenci v prostoru $\overline{H}_{kl}$ odpovídá v prostoru originálů konvergence v průměru originálů příslušných k $\dfrac{F(p)}{p^{k+1}}$ s vahou e^{-2lt}. To znamená, že

$$F_n \to F \Rightarrow \int_0^\infty e^{-2lt}\, |g_n(t) - g(t)|^2\, \mathrm{d}t \to 0 \,.$$

Funkce $g(t)$ nazveme $(k + 1)$-krát integrované distribuce.

Definice 9. *Je-li distribuce h daná funkcionálem podle definice 2, tedy*

$$h(\varphi) = (-1)^{k+1} \int_0^\infty f(t)\, \varphi^{k+1}(t)\, \mathrm{d}t \,,$$

potom $g(t) = f'(t)$ je k-krát integrovaná distribuce h.

Hilbertovy prostory $\overline{H}_{kl}$ mohou být základnou pro důkaz existence a unicity řešení některých parciálních diferenciálních rovnic. Tak příklad uvedený v oddíle 3 můžeme pozměnit tak, že místo teploty 1 na koncích tyče budeme uvažovat teplotu rovnou Diracově funkci $\delta_0(t)$, tedy distribuci. Podmínky 1, 2, 3 a 5 příkladu zůstanou nezměněny, pouze podmínka 4 bude:

$$\lim_{x \to \pm 1} \int_0^\infty e^{-2t} |1 - \int_0^t u(\tau, x)\, \mathrm{d}\tau|^2\, \mathrm{d}t = 0 \,.$$

Obraz jediného řešení v tomto případě je $\dfrac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\, x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}$.

LITERATURA

[1] *G. Doetsch:* Handbuch der Laplace-Transformation, Basel 1950.

[2] *V. A. Ditkin, P. I. Kuzněcov:* Příručka operátorového počtu, Praha 1954.

[3] *А. И. Маркушевич:* Теория аналитических функций, Moskva 1950.

[4] *К. Дж. Трантер:* Интегральные преобразования в математической физике, Moskva 1956.

[5] *Ricardo San Juan Llosa:* Charakterisierung der durch einfach konvergente Laplace-Integrale darstellbaren Funktionen, Mathematische Nachrichten *12*, 1954, č. 1—2, 113—118.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО СВОЙСТВА ЛАПЛАСОВСКОГО ОБРАЗА ФУНКЦИИ И ПРЕВРАЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ЛАПЛАСОВСКИХ ОБРАЗОВ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВА ГИЛЬБЕРТА

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 25/II 1957 г.)

В работе дается определение множества обобщенных функций в E_1 $(=(-\infty, \infty))$, равных нулю для $t < 0$; далее определяются их лапласовские образы. Введенные обобщенные функции характерны тем, что их образ является регулярной функцией $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > l$ (l — целое) и обладает тем свойством, что существует целое число $k \geqq 0$ так, что $\frac{F(p)}{p^{k+1}}$ есть лапласовский образ функции. Далее в замечании показано, что множество образов можно записать в виде суммы пространств Гильберта $\overline{H}_{kl}$. Из теоремы, содержащей необходимое и достаточное условие для того, чтобы данный элемент из $\overline{H}_{kl}$ принадлежал H_{kl}, следует также необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > l$ была лапласовским образом функции. На основании равенства Парсеваля показано, как можно сформулировать краевые проблемы для некоторых дифференциальных уравнений с частными производными и доказать существование и единственность решений из легко заметных свойств образов.

Résumé

UNE NOTE SUR LA PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE FONCTION ET SUR CERTAINS ESPACES DE HILBERT $\overline{H}_{kl}$ DONT LA SOMME $\sum\limits_{k=0,\ l=0}^{\infty} \overline{H}_{kl}$ EST L'ENSEMBLE DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE DISTRIBUTIONS

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 25 février 1957)

Le travail commence par la définition d'une certaine classe de distributions en $E_1 = (-\infty, \infty)$, nulles pour $t < 0$, pour lesquelles il est possible de définir la transformation de Laplace.

Les transformées des distributions en question sont les fonctions analytiques $F(p)$ dans le domaine $\operatorname{Re} p > l$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ et telles qu'on peut trouver un nombre entier $k \geqq 0$, pour que $\frac{F(p)}{p^{k+1}}$ soit la transformée de Laplace d'une fonction.

Il est montré dans une note que l'ensemble des transformées est la somme des certains espaces de Hilbert.

Dans ce travail, il y a un théorème qui donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F(p)$ (analytique dans le domaine $\operatorname{Re} p > l$) soit la transformée de Laplace d'une fonction.

Puis on explique, comment on peut définir les problèmes aux limites pour les équations spéciales aux dérivées partielles et en s'appuyant sur l'égalité de Parceval démontrer l'existence et l'unicité de la solution.