Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 2, 236--241

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108303`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Poznámka k problému protínajících se lomených čar

(K řešení úlohy Jana Maříka)

Obsahem tohoto článku je důkaz věty uvedené v odst. 8. Bezprostředním důsledkem této věty je tvrzení, jehož důkaz (pokud možno elementárními prostředky) byl dán jako problém (č. 9) Janem Maříkem v Časopise pro pěstování matematiky *81* (1956), 470.

1. Naše úvahy budeme provádět v rovině $\mathfrak{B}_2$, kde platí *absolutní geometrie*. Předpokládáme, že jsou známy pojmy: bod, úsečka, přímka, polopřímka, uspořádání bodů na přímce a na úsečce, polorovina, rovinný pás tvořený dvěma přímkami bez společných bodů a trojúhelník (jeho vnitřek a vnějšek). Trojúhelníkem budeme v celé práci rozumět jenom jeho obvod.

Mějme v rovině $\mathfrak{B}_2$ konečnou posloupnost bodů $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 0$). Nechť

a) pro $n > 0$ platí $A_0 \neq A_n$,

b) pro $n > 1$ žádná trojice bodů A_{i-1}, A_i, A_{i+1} neleží v přímce ($i = 1, \ldots, n - 1$).

Potom sjednocení všech úseček $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$ ($a_i = \overline{A_{i-1}A_i}$), pro $n > 0$, nebo bod A_0 pro $n = 0$, nazýváme *lomenou čarou* (spojující body A_0 a A_n) $L(A_0, A_n)$ (dále někdy jen l. č.). Bodům A_i ($i = 0, \ldots, n$) říkáme *vrcholy* lomené čáry. Úsečkám a_i ($i = 1, \ldots, n$) říkáme *strany* lomené čáry. (Je zřejmé, že pro $n = 0$ dostáváme nulovou úsečku a pro $n = 1$ dostáváme úsečku $\overline{A_0A_1}$).

Vrcholu lomené čáry L, kterým procházejí alespoň tři strany lomené čáry, říkáme *uzlový vrchol* lomené čáry. Vnitřnímu bodu jedné strany lomené čáry, kterým procházejí alespoň dvě strany, říkáme *vnitřní uzlový bod* lomené čáry. Uzlovým vrcholům a vnitřním uzlovým bodům lomené čáry budeme říkat *uzly* lomené čáry L. Uzel, který neleží na žádné úsečce, skládající se ze samých uzlů, nazveme *isolovaný*. Lomená čára, která nemá žádné uzly, se nazývá *jednoduchá lomená čára* (dále někdy jen j. l. č.).

Poznámka. Zřejmě nulová úsečka a úsečka jsou jednoduché lomené čáry.

2. Nechť A, B jsou dva různé body lomené čáry. Nechť $i(k)$ je nejmenší index strany, která prochází bodem $A(B)$. Říkáme, že *bod A leží před bodem B* ($A \prec B$), jestliže $i < k$, nebo $i = k$ a bod A leží před bodem B v uspořádání bodů úsečky a_i, kde A_{i-1} je prvním a A_i posledním bodem. Zřejmě dostáváme uspořádání bodů lomené čáry.

Mějme dva body A, B jedné strany a_i lomené čáry. Nechť bod A leží před bodem B v uspořádání bodů úsečky a_i, kde A_{i-1} je prvním a A_i posledním bodem, potom zřejmě nemusí platit $A \prec B$ v uspořádání bodů celé lomené čáry. Platí to pro všechny dvojice bodů A, B pouze v případě jednoduché lomené čáry.

Mějme dvě lomené čáry L_1 a L_2. Nechť $L_1 \subset L_2$, potom každá strana lomené čáry L_1 se dá rozložit na konečný počet úseček a každá z těchto úseček je obsažena v některé straně lomené čáry L_2. Z toho vyplývá, že každý uzel lomené čáry L_1 je též uzlem lomené čáry L_2. Zřejmě každá část jednoduché lomené čáry, která je lomenou čarou, je jednoduchá.

Mějme v rovině $\mathfrak{B}_2$ konečný počet bodů $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ($n > 1$). Nechť $A_n \neq A_0$, $A_i \neq A_{i+1}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$). Mějme lomené čáry $L_i(A_{i-1}, A_i)$ ($i = 1, \ldots, n$). Nechť sjednocení $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ je též lomená čára (která spojuje bod A_0 s bodem A_n), potom budeme říkat, že l. č. L_i *skládají* l. č. L, nebo že l. č. L je *rozložena* na l. č. L_i. Zřejmě lomená čára L, skládající se z jednoduchých lomených čar L_i, které mají vlastnosti:

a) $L_i \cap L_k = \emptyset$ ($i \neq k$; $i \neq k+1$; $i \neq k-1$; $i, k = 1, \ldots, n$),
b) $L_i \cap L_{i+1} = (A_i)$ ($i = 1, \ldots, n-1$),

je jednoduchá. (Body A_i nemusí být nutně vrcholy lomené čáry $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i(A_{i-1}, A_i)$.)

3. Lemma. *Každá lomená čára, spojující bod A_0 a A_n, obsahuje jako část jednoduchou lomenou čáru, která spojuje též body A_0 a A_n.*

Důkaz provedeme úplnou indukcí podle n. Z poznámky 1 vyplývá, že pro $n = 0$, 1 je L již sama j. l. č. Předpokládejme tedy, že lemma platí pro $n-1$. Budiž L l. č., která spojuje body A_0 a A_n. Uzly této l. č. dostaneme jako společnou část několika stran, tedy obdržíme buď jeden (isolovaný) uzel nebo celou úsečku uzlů. Množinu $\mathfrak{M}$ všech uzlů této l. č. můžeme tedy rozložit na dvě disjunktní podmnožiny $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$), kde $\mathfrak{M}_1$ je konečná množina všech isolovaných uzlů a $\mathfrak{M}_2$ je sjednocení konečného počtu úseček uzlů. Nechť a_i je první strana, která obsahuje uzly. Nechť bod B je první uzel této úsečky. Zřejmě lomená čára $L_1(A_0, B) = \bigcup_{j=0}^{i-1} a_j \cup b$ ($a_0 = \emptyset$; $b = \overline{A_{i-1}B}$) je jednoduchou lomenou čarou, protože nemá žádný uzel a $L_1 \subset L$. Nechť a_k je poslední strana, která prochází bodem B. Zřejmě $i < k$, protože bodem B procházejí alespoň dvě strany. Vezměme lomenou čáru $L' = \bigcup_{j=k+1}^{n+1} a_j \cup c$ ($c = \overline{BA_k}$; $a_{n+1} = \emptyset$). Zřejmě $b \cap c = (B)$ a bod B není uzlem l. č. L'. Počet stran l. č. L' je menší než n, a tudíž podle indukčního předpokladu existuje jednoduchá lomená čára $L_2(B, A_n)$, která je obsažena v l. č. L'. Zřejmě $L_1 \subset L$, $L_2 \subset L' \subset L$, z čehož vyplývá, že $L_1 \cup L_2 \subset L$. Protože $b \cap c = (B)$, je sjednocení $L_1 \cup L_2$ opět lomená čára, a protože $L_1 \cap L_2 = (B)$ a L_1, L_2 jsou jednoduché, je opět $L_1 \cup L_2$ jednoduchá l. č. (která spojuje body A_0 a A_n).

4. Řekneme, že množina $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}_2$ má *vlastnost* V, jestliže každá úsečka, která má s ní alespoň jeden bod společný, má s ní společný konečný počet bodů a konečný počet úseček. Zřejmě přímka, úsečka, trojúhelník a lomená čára mají vlastnost V.

Lemma. *Každá jednoduchá lomená čára má s množinou $\mathfrak{M}$ vlastnosti* V *(mají-li alespoň jeden společný bod) společný konečný počet jednoduchých lomených čar, které jsou navzájem disjunktní.*

Důkaz. Každá strana j. l. č. L má s množinou $\mathfrak{M}$ vlastnosti V společný konečný počet bodů a konečný počet úseček. Pokládejme body za nulové úsečky. Nechť úsečky $\overline{A_iB_i}$ jsou všechny společné úsečky j. l. č. L a množiny $\mathfrak{M}$ a nechť v uspořádání bodů j. l. č. L platí

$$A_1 \precsim B_1 \precsim A_2 \precsim B_2 \precsim \ldots \precsim A_m \precsim B_m\,.$$

Nechť I je množina všech indexů $i = 1, \ldots, m-1$, pro které platí $B_i \prec A_{i+1}$. Jestliže $I = \emptyset$, potom společná část j. l. č. L a množiny $\mathfrak{M}$ je jednoduchá lomená čára $L_1 = \bigcup_{i=1}^{m} a_i$, kde $a_i = \overline{A_i B_i}$. Jestliže $I \neq \emptyset$, potom obsahuje prvky $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ $(r < m)$ a společná část j. l. č. L a množiny $\mathfrak{M}$ je množina $\mathfrak{N} = \bigcup_{j=0}^{r} L_j$, kde $L_j = \bigcup_{l=i_j+1}^{i_{j+1}} a_l$ $(a_l = \overline{A_l B_l}$, $i_0 = 0$, $i_{r+1} = m)$. Zřejmě L_j jsou jednoduché lomené čáry, které jsou mezi sebou disjunktní (dále někdy jen d. j. l. č.).

5. Nechť $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{V}_2$. Řekneme, že množina $\mathfrak{M}$ je *vytvořující*, jestliže existuje rozklad množiny $\mathfrak{V}_2 - \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ (kde $\mathfrak{N}_1 \neq \emptyset \neq \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \emptyset$), který má tyto vlastnosti:

a) Pro každé dva body $A, B \in \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2)$ existuje l. č. L, která je spojuje a $L \subset \mathfrak{N}_i$.

b) Každá l. č. L, která spojuje body A a B $(A \in \mathfrak{N}_1, B \in \mathfrak{N}_2)$, má neprázdný průnik s množinou $\mathfrak{M}$.

Na základě lemmatu 3 stačí v definici uvažovat místo lomených čar jen jednoduché lomené čáry. (Zřejmě přímka a trojúhelník jsou množiny vytvořující.)

Mějme vytvořující množinu $\mathfrak{M}$ vlastnosti V, potom každá jednoduchá lomená čára L má s ní společný konečný počet d. j. l. č. $L_i(A_i, B_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Nechť j. l. č. L spojuje body A a B, které neleží v množině $\mathfrak{M}$. Nechť v uspořádání bodů j. l. č. L platí

$$A \prec A_1 \preceq B_1 \prec A_2 \preceq B_2 \prec \ldots \prec A_m \preceq B_m \prec B\,.$$

Zřejmě množina $\mathfrak{M}_i$ všech bodů X lomené čáry L, pro něž platí $B_i \prec X \prec A_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, m;\ B_0 = A;\ A_{m+1} = B)$, je podmnožinou buď množiny $\mathfrak{N}_1$ nebo množiny $\mathfrak{N}_2$.

Řekneme, že lomená čára $L_i(A_i, B_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ je *jednonásobnou* společnou lomenou čarou, jestliže množiny $\mathfrak{M}_{i-1}$, $\mathfrak{M}_i$ neleží v téže množině $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$. Řekneme, že lomená čára $L_i(A_i, B_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ je *dvojnásobnou* společnou lomenou čarou, jestliže obě množiny $\mathfrak{M}_{i-1}$, $\mathfrak{M}_i$ leží v jedné množině $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$.

Mějme množinu $\mathfrak{N}$ vlastnosti V, která je částí vytvořující množiny $\mathfrak{M}$ vlastnosti V, potom každou j. l. č. L', která je společnou částí j. l. č. L a množiny $\mathfrak{N}$, počítáme s tou násobností, s níž je počítána j. l. č. $L''(L' \subset L'')$, která je společnou částí množiny $\mathfrak{M}$ s j. l. č. L.

6. Lemma. *Každá vytvořující množina $\mathfrak{M}$ vlastnosti* V *má s jednoduchou lomenou čarou L, která spojuje body A a B, kde $A \in \mathfrak{N}_1$, $B \in \mathfrak{N}_2$ $(A, B \in \mathfrak{N}_1)$, společný lichý (sudý) počet lomených čar, které jsou navzájem disjunktní (počítáme-li společné lomené čáry s jejich násobností).*

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Nechť tedy j. l. č. L nemá s množinou $\mathfrak{M}$ žádný společný bod, potom nutně body A, B leží v $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$ a počet společných j. l. č. je nula (tudíž číslo sudé). Jestliže j. l. č. L má s množinou $\mathfrak{M}$ jednu společnou j. l. č. (bez násobnosti), potom zřejmě bod A leží v téže množině $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$ jako body množiny $\mathfrak{M}_0$ a stejně tak bod B jako body množiny $\mathfrak{M}_1$, a tudíž lemma 6 je splněno.

Nechť tedy lemma 6 platí pro $m - 1$ společných j. l. č. (bez násobnosti). Mějme j. l. č. L, která má s množinou $\mathfrak{M}$ společných m d. j. č. l. (bez násobnosti). Zvolme v množině $\mathfrak{M}_{m-1}$ bod C a rozložme j. l. č. $L(A, B) = L_1(A, C) \cup L_2(C, B)$. Zřejmě j. l. č. L_1 má s množinou $\mathfrak{M}$ společných právě $m - 1$ d. j. l. č. (bez násobnosti) a j. l. č. L_2 s množinou $\mathfrak{M}$ právě jednu společnou j. l. č. (bez násobnosti). Jestliže $C, B \in \mathfrak{N}_1$, potom j. l. č. L_1 má společný sudý počet d. j. l. č. a j. l. č. L_2 má společnou dvojnásobnou j. l. č., a tudíž j. l. č. L má společný sudý počet d. j. l. č. s množinou $\mathfrak{M}$. Jestliže $C \in \mathfrak{N}_1$, $B \in \mathfrak{N}_2$, potom j. l. č. L_1 má společný sudý počet d. j. l. č. a j. l. č. L_2 má společnou jednonásobnou j. l. č., a tudíž j. l. č. L má společný lichý počet d. j. l. č. s množinou $\mathfrak{M}$. Stejným způsobem dokážeme platnost lemmatu 6 pro případy $C \in \mathfrak{N}_2$, $B \in \mathfrak{N}_1$ a $C, B \in \mathfrak{N}_2$.

7. V rovině $\mathfrak{V}_2$ buďtež dány dva body M, N. Označme $M\bar{N}$ $(N\bar{M})$ otevřenou polopřímku, která je opačná k polopřímce MN (NM). Budiž $L(M, N)$ j. l. č., která spojuje body M a N a nemá s otevřenými polopřímkami $\overline{MN}$ a $\overline{NM}$ žádný společný bod. Sjednocení $L(M, N) \cup \overline{MN} \cup \overline{NM}$ nazveme *množinou* $\mathfrak{R}$.

Poznámka. Zřejmě v rovině $\mathfrak{B}_2$ existuje takový rovinný pás $\mathfrak{P}$, že platí $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}$ a přímka MN odděluje hranice rovinného pásu $\mathfrak{P}$. Též existuje taková polorovina $\mathfrak{P}'$, že průnik $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{R}$ je polopřímka.

Budiž M' (N') libovolný bod otevřené polopřímky $\overline{MN}$ ($\overline{NM}$). Zřejmě sjednocení $L(M, N) \cup \overline{MM'} \cup \overline{NN'}$ je j. l. č., která spojuje body M' a N'. Pomocí množiny $\mathfrak{R}$ můžeme v množině $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ definovat *relaci* ($\mathfrak{R}$). Řekneme, že $A \equiv B$ ($\mathfrak{R}$) ($A, B \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$), jestliže úsečka $\overline{AB}$ má s j. l. č. $L(M', N')$ ($L \subset \mathfrak{R}$) společný sudý počet d. j. l. č. (které jsou počítány s násobností podle definice 5, kde úsečku $\overline{AB}$ pokládáme za část přímky AB, která je vytvořující). Bod M' (N') je zvolen na otevřené polopřímce $\overline{MN}$ ($\overline{NM}$) tak, aby polopřímka opačná k polopřímce $M'M$ ($N'N$) neměla žádný společný bod s úsečkou $\overline{AB}$. (Zřejmě počet d. j. l. č. společných úsečce $\overline{AB}$ a j. l. č. $L(M', N')$ nezávisí na volbě bodů M', N'.)

Lemma. *Relace* ($\mathfrak{R}$), *určená definicí* 7, *je ekvivalencí, která množinu* $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ *dělí na dvě neprázdné disjunktní části* $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ *takové, že* $A, B \in \mathfrak{R}_i$ ($i = 1, 2$) *tehdy a jen tehdy, jestliže* $A \equiv B(\mathfrak{R})$.

Důkaz. Jestliže $A \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$, potom úsečka $\overline{AA}$ nemá žádný společný bod s množinou $\mathfrak{R}$, a tudíž $A \equiv A(\mathfrak{R})$.

Jestliže $A \equiv B(\mathfrak{R})$ ($A, B \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$), potom úsečka $\overline{AB}$ má sudý počet společných d. j. l. č. s j. l. č. $L(M', N')$, a tudíž i úsečka $\overline{BA}$ má s touto j. l. č. L společný sudý počet d. j. l. č., a tedy $B \equiv A(\mathfrak{R})$.

Jestliže $A \equiv B(\mathfrak{R})$, $B \equiv C(\mathfrak{R})$ ($A, B, C \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$), potom mohou nastati dva případy:

a) Body A, B, C leží v jedné přímce. Potom násobnost každé společné j. l. č. je počítána pomocí stejné vytvořující množiny (přímky AB). Jelikož úsečky $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$ mají sudý počet společných j. l. č., tudíž i úsečka $\overline{AC}$ (která je buď součtem nebo rozdílem úseček $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$) má společný sudý počet d. j. l. č., a platí tedy $A \equiv C(\mathfrak{R})$.

b) Body A, B, C tvoří trojúhelník. Potom násobnost každé společné j. l. č. se může též počítat pomocí trojúhelníka ABC, jakožto vytvořující množiny. Body M', N' j. l. č. $L(M', N') \subset \mathfrak{R}$ jsou zřejmě vnějšími body trojúhelníka ABC. Podle lemmatu 6 má j. l. č. $L(M', N')$ s trojúhelníkem ABC společný sudý počet d. j. l. č. Jelikož úsečky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ mají s j. l. č. $L(M', N')$ společný sudý počet d. j. l. č., tudíž i úsečka $\overline{AC}$ má s j. l. č. L společný sudý počet d. j. l. č., a platí tedy $A \equiv C(\mathfrak{R})$.

Relace ($\mathfrak{R}$) je tedy ekvivalencí a ta na množině $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ definuje rozklad ($\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{R}_i$; $\mathfrak{R}_k \cap \mathfrak{R}_l = \emptyset$ $(k \neq l)$; $\mathfrak{R}_i \neq \emptyset$ $(i \in I)$; $A \equiv B(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow A, B \in \mathfrak{R}_i$). Ukážeme, že tento rozklad má dva prvky. Vezměme tři body $A, B, C \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$, $A \not\equiv B(\mathfrak{R})$, $A \not\equiv C(\mathfrak{R})$, $B \not\equiv C(\mathfrak{R})$. Potom každá z úseček $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ má s j. l. č. $L(M', N')$ společný lichý počet d. j. l. č. a nastávající dva případy:

a) Body A, B a C leží v jedné přímce. Potom úsečka $\overline{AC}$ se rovná součtu (nebo rozdílu) úseček $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$, které mají lichý počet společných d. j. l. č. s j. l. č. $L(M', N')$, a tudíž má společný sudý počet d. j. l. č., a to je spor.

b) Body A, B a C tvoří trojúhelník. Potom j. l. č. $L(M', N')$ má s trojúhelníkem ABC společný lichý počet d. j. l. č., ale body M', N' jsou vnějšími body, a to je spor.

Rozklad množiny $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ má tedy nanejvýše dva prvky.

Podle poznámky 7 existuje taková polorovina $\mathfrak{P}'$, že průnik $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{R}$ je polopřímka.

Zřejmě tato polopřímka dělí množinu $\mathfrak{P}' - \mathfrak{R}$ na dvě části, které jsou disjunktní a neprázdné a každá z nich je obsažena v jednom prvku rozkladu množiny $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ pomocí ekvivalence ($\mathfrak{R}$). Tím je lemma 7 dokázáno.

8. Podle poznámky 7 existuje takový rovinný pás $\mathfrak{P}$, který obsahuje $\mathfrak{R}$ a jehož hranice jsou odděleny přímkou MN. Množina $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{P}$ se rozpadá na dvě disjunktní otevřené poloroviny $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2)$ takové, že $\mathfrak{P}_i \subset \mathfrak{R}_i$, kde $\mathfrak{R}_i$ jsou prvky rozkladu množiny $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ pomocí ekvivalence ($\mathfrak{R}$).

Důkaz. Zřejmě platí $A \equiv B(\mathfrak{R})$ $(A, B \in \mathfrak{P}_i;\ i = 1, 2)$, protože úsečka $\overline{AB}$ nemá žádný společný bod s množinou $\mathfrak{R}$. Nechť tedy $A \in \mathfrak{P}_1$ a $B \in \mathfrak{P}_2$, potom úsečka $\overline{AB}$ má stejný počet společných d. j. l. č. s j. l. č. $L(M', N') \subset \mathfrak{R}$ jako přímka AB (počítané s násobností), ale přímka AB má s j. l. č. L lichý počet společných d. j. l. č., neboť body M', N' jsou přímkou AB odděleny, protože přímky AB a $M'N'$ se protínají. Odtud vyplývá, že $A \not\equiv B(\mathfrak{R})$.

Věta. *Nechť jsou dány dvě lomené čáry $L_1(M, N)$ a $L_2(A, B)$. Nechť $M\overline{N}$ $(N\overline{M})$ je opačná otevřená polopřímka k polopřímce MN (NM). Nechť lomená čára $L_2(A, B)$ nemá žádný společný bod s polopřímkami $M\overline{N}$ a $N\overline{M}$. Nechť bod A (B) leží v otevřené polorovině $\mathfrak{N}_1$ $(\mathfrak{N}_2)$ takové, že $\mathfrak{N}_i \cap L_1 = \emptyset$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \emptyset$ a hranice polorovin $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ jsou přímkou MN odděleny. Potom lomené čáry L_1 a L_2 mají alespoň jeden společný bod.*

Důkaz. Podle lemmatu 3 existuje j. l. č. $L_1'(M, N) \subset L_1(M, N)$. Označme $\mathfrak{R} = L_1'(M, N) \cup M\overline{N} \cup N\overline{M}$, potom podle lemmatu 7 se množina $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ rozpadá na dvě disjunktní, neprázdné části $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$. Podle poznámky 8 platí $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{R}_2$, a tudíž $A \not\equiv B(\mathfrak{R})$. Nechť body A_i $(i = 0, \ldots, n)$ $(A_0 = A,\ A_n = B)$ jsou vrcholy l. č. $L_2(A, B)$. Předpokládejme, že $L_2 \cap \mathfrak{R} = \emptyset$, potom $A_0 \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots \equiv A_n(\mathfrak{R})$, a tudíž $A \equiv B(\mathfrak{R})$, a to je spor. Proto $L_2 \cap \mathfrak{R} \neq \emptyset$. Z předpokladu, že $L_2 \cap M\overline{N} = \emptyset = N\overline{M} \cap L_2$ vyplývá, že $L_2 \cap L_1' \neq \emptyset$, a tudíž $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Tím je věta dokázána.

Bedřich Pondělíček, Poděbrady

*

Jiné řešení téže úlohy Jana Maříka

Pro $b_1, b_2 \in E_2$ nechť $L(b_1, b_2)$ znamená uzavřenou úsečku o koncových bodech b_1, b_2 (pro $b_1 = b_2$ nechť $L(b_1, b_2)$ je množina, obsahující jediný bod b_1). Jestliže $b_i \in E_2$ $(i = 0, \ldots, n)$, položme $L(b_0, \ldots, b_n) = \bigcup_{i=1}^{n} L(b_{i-1}, b_i)$. Vzdálenost bodu a od bodu b (resp. vzdálenost bodu a od přímky p) označíme symbolem $\varrho(a, b)$ (resp. $\varrho(a, p)$).

Nechť $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, \ldots, b_n)$ jsou konečné posloupnosti bodů z E_2. Symbolem $P|Q$ budeme rozumět, že platí zároveň a_i non $\in L(b_0, \ldots, b_n)$ pro $i = 0, \ldots, m$ a b_j non $\in L(a_0, \ldots, a_m)$ pro $j = 0, \ldots, n$. Nechť dále $\mathfrak{P}\{P; Q\}$ značí počet dvojic (i, j), pro něž $L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_{j-1}, b_j) \neq \emptyset$. Je-li kromě toho q přímka v E_2, pak nechť symbol $P|q$ znamená, že a_i non $\in q$ pro $i = 0, \ldots, m$, a $\mathfrak{P}\{P; q\}$ buď počet indexů i, pro něž $L(a_{i-1}, a_i) \cap q \neq \emptyset$. Zřejmě

$$\mathfrak{P}\{P; Q\} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); Q\}\,, \tag{1}$$

$$\mathfrak{P}\{P; q\} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); q\}\,. \tag{2}$$

Lemma 1. *Buď $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, b_1, b_2, b_0)$, $P|Q$. Jestliže b_0, b_1, b_2 leží na přímce, pak platí*

$$\mathfrak{P}\{P; Q\} \equiv 0 \pmod 2\,. \tag{3}$$

Jestliže b_0, b_1, b_2 neleží na přímce, pak vztah (3) *platí právě tehdy, leží-li oba body a_0, a_m vně nebo oba uvnitř trojúhelníka o vrcholech b_0, b_1, b_2.*

Důkaz. Leží-li body b_0, b_1, b_2 na přímce, pak můžeme předpokládat, že bod b_1 leží mezi body b_0, b_2 (nebo že bod b_1 splyne s některým z bodů b_0, b_2). Potom je $\mathfrak{P}\{P; (b_0, b_2)\} = \mathfrak{P}\{P; (b_0, b_1)\} + \mathfrak{P}\{P; (b_1, b_2)\}$, takže $\mathfrak{P}\{P; Q\} = 2\mathfrak{P}\{P; (b_0, b_2)\} \equiv 0 \pmod 2$. Jestliže body b_0, b_1, b_2 neleží na přímce, je důkaz pro $m = 1$ snadný a pro libovolné m se tvrzení dokáže indukcí pomocí vztahu (1). Zcela obdobně se dokáže i následující lemma:

Lemma 2. *Buď $P = (a_0, \ldots, a_m)$; buď q přímka a nechť $P|q$. Potom platí $\mathfrak{P}\{P; q\} \equiv 0$* (mod 2) *právě tehdy, leží-li oba body a_0, a_m v téže polorovině, vyťaté přímkou q.*

Lemma 3. *Nechť $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, b_1)$, $P|Q$. Potom existuje kladné číslo δ s touto vlastností: Je-li $b'_0 \in E_2$, $\varrho(b'_0, b_0) < \delta$ a položíme-li $Q' = (b'_0, b_1)$, pak platí $P|Q'$ a $\mathfrak{P}\{P; Q\} = \mathfrak{P}\{P; Q'\}$.*

Důkaz. Zvolme index i $(1 \leqq i \leqq m)$. Jestliže $L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_0, b_1) = \emptyset$, buď δ_i vzdálenost množin $L(a_{i-1}, a_i)$ a $L(b_0, b_1)$. Je-li $L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_0, b_1) \neq \emptyset$, je nutně $a_{i-1} \neq a_i$, $b_0 \neq b_1$; buď p (resp. q) přímka procházející body a_{i-1}, a_i (resp. b_0, b_1). Položme $\delta_i = \min(\varrho(a_{i-1}, q), \varrho(a_i, q), \varrho(b_0, p))$. Čtenář snadno dokáže, že pro každé $i = 1, \ldots, m$ je $\delta_i > 0$ a že $\mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); (b'_0, b_1)\} = \mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); (b_0, b_1)\}$, kdykoli $\varrho(b'_0, b_0) < \delta_i$. Stačí tedy položit $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m)$.

Věta. *Nechť $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, \ldots, b_n)$. Nechť $L(c_0, c_1, c_2, c_3, c_0)$ je obvod čtverce; buď q_i přímka, procházející body c_{i-1}, c_i $(i = 1, 2, 3, 4; c_4 = c_0)$. Nechť body a_0, a_m, b_0, b_n leží po řadě uvnitř úseček $L(c_0, c_1)$, $L(c_2, c_3)$, $L(c_1, c_2)$, $L(c_3, c_0)$ a nechť ostatní body z P (resp. z Q) leží uvnitř pásu, omezeného přímkami q_2, q_4 (resp. q_1, q_3). Potom je $L(a_0, \ldots, a_m) \cap L(b_0, \ldots, b_n) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Jestliže neplatí $P|Q$, není co dokazovat. Stačí tedy dokázat, že za předpokladu $P|Q$ neplatí (3). To dokážeme indukcí podle n. Buď $n = 1$ a buď q přímka, procházející body b_0, b_1. Snadno se zjistí, že pro každé i platí $L(a_{i-1}, a_i) \cap q = L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_0, b_1)$ a tedy $\mathfrak{P}\{P; q\} = \mathfrak{P}\{P; Q\}$, takže podle lemmatu 2 vztah (3) neplatí. Buď nyní $n > 1$. Předpokládejme že naše tvrzení platí pro $n - 1$ a že posloupnosti P, Q splňují uvedené předpoklady. Na úsečce $L(c_1, c_2)$ leží jen konečný počet bodů b takových, že $a_i \in L(b, b_2)$ pro některé $a_i \in P$, ať již b_2 leží na q_2 či nikoliv. Podle lemmatu 3 tedy existuje uvnitř úsečky $L(c_1, c_2)$ bod b'_0, pro nějž platí

$$\mathfrak{P}\{P; (b'_0, b_1)\} = \mathfrak{P}\{P; (b_0, b_1)\}\,, \quad P|(b'_0, b_1)\,, \quad P|(b'_0, b_2)\,. \tag{4}$$

Položíme-li $Q' = (b'_0, b_1, \ldots, b_n)$, $Q^* = (b'_0, b_2, \ldots, b_n)$, máme především podle (4)

$$\mathfrak{P}\{P; Q\} = \mathfrak{P}\{P; Q'\}\,; \tag{5}$$

protože $P|Q^*$, je podle indukčního předpokladu

$$\mathfrak{P}\{P; Q^*\} \equiv 1 \pmod 2\,. \tag{6}$$

Protože $P|(b'_0, b_1, b_2, b'_0)$, platí podle lemmatu 1

$$\mathfrak{P}\{P; (b'_0, b_2)\} \equiv \mathfrak{P}\{P; (b'_0, b_1)\} + \mathfrak{P}\{P; (b_1, b_2)\} \pmod 2\,,$$

takže $\mathfrak{P}\{P; Q'\} \equiv \mathfrak{P}\{P; Q^*\} \pmod 2$. Odtud a z (5), (6) plyne $\mathfrak{P}\{P; Q\} \equiv 1 \pmod 2$, čímž je vše dokázáno.

Miloš Dostál, Praha