Miroslav Fiedler; Jiří Sedláček

O W-basích orientovaných grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 2, 214--225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108301`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O W-BASÍCH ORIENTOVANÝCH GRAFŮ

MIROSLAV FIEDLER a JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

DT: 513.19

(Došlo dne 4. června 1957)

V článku se jedná o jistých podgrafech orientovaných grafů a o jejich významu jednak pro acyklické, jednak pro dobře orientované grafy. Ukazuje se také souvislost těchto podgrafů s determinanty.

V theorii konečných neorientovaných grafů se studují též grafy, jejichž jeden uzel má význačné postavení.[1]) I pro grafy orientované je možno zavést pojem uzlu význačného vzhledem k orientaci grafu; v tomto článku si všimneme některých vlastností takovýchto grafů. Při tom u orientovaných grafů ke každým dvěma různým uzlům i, k připouštíme nejvýše jednu hranu $\overrightarrow{ik}$; u neorientovaných grafů nepřipouštíme dvojúhelníky vůbec. Dále vylučujeme u všech grafů smyčky. V literatuře se někdy nepřipouštějí grafy s isolovanými uzly (viz König [1]), ačkoliv většina vět platí i bez tohoto omezení. V této práci se nám jevilo výhodnější nevylučovat isolované uzly. Jestliže se někdy odvoláváme na známé věty, jež byly odvozeny v tomto omezujícím pojetí, činíme tak vesměs v případech, kdy rozšíření platnosti těchto vět na případy s isolovanými uzly je triviální.

Poněvadž zde jednáme převážně o orientovaných grafech, budeme grafem rozumět (není-li jinak výslovně uvedeno) konečný orientovaný graf.

Pramenem grafu G rozumíme takový jeho uzel, který není koncový pro žádnou hranu grafu G. (Příkladem pramene je isolovaný uzel grafu.) Souvislý graf s jediným pramenem označme jako *W-graf*; je-li W-graf stromem, mluvíme o *W-stromě* (isolovaný uzel považujeme též za W-strom). Nyní zavedeme pojem *W-base* orientovaného grafu G: tak budeme nazývat graf H, který je podgrafem v G, obsahuje všechny uzly grafu G a každá jeho komponenta je W-strom.[2])

[1]) König [1] užívá (na str. 76) pro takový graf názvu *Wurzelgraph*, v anglické literatuře najdeme pojmenování *rooted tree*. G. Pólya [3] studoval speciální typ neorientovaných stromů *(Setzbäume)*, v nichž význačným je jeden z koncových uzlů stromu; tyto grafy mají aplikaci v organické chemii.

[2]) Souvislá W-base souvislého grafu G je tedy kostrou grafu G. Někteří autoři definují pojem kostry i pro nesouvislé neorientované grafy ([1], str. 56), jiní jen pro souvislé neorientované grafy ([2], str. 109).

Zřejmě v každém grafu existuje W-base (představuje ji na př. podgraf složený jen z isolovaných uzlů).

Je-li G neorientovaný graf, můžeme sestrojit orientovaný graf G' tak, že ponecháme množinu uzlů grafu G a místo každé hrany $vw \in G$ zavedeme právě jednu z hran $\overrightarrow{vw}$, $\overrightarrow{wv}$; pak řekneme, že jsme G *orientovali*. Nechť G', G'' jsou orientované grafy, které vznikly tím, že jsme orientovali graf G. Existuje-li v G hrana xy tak, že $\overrightarrow{xy} \in G'$, $\overrightarrow{yx} \in G''$, řekneme, že G' a G'' *se liší orientací*. Vzniká otázka, který neorientovaný graf G s daným uzlem w lze orientovat dvěma způsoby tak, aby vznikly W-grafy G' a G'' s pramenem w, které se liší orientací. Než tuto otázku zodpovíme, uvedeme bez důkazu[3]) jednu pomocnou větu o neorientovaných grafech.

Lemma 1. *Je-li G souvislý neorientovaný graf a H takový podgraf grafu G, který neobsahuje žádnou kružnici, pak existuje kostra grafu G, jejímž podgrafem je graf H.*

Věta 1. *Nechť G je souvislý neorientovaný graf a w je jeho uzel. Pak existuje jediná orientace převádějící G ve W-graf s pramenem w právě tehdy, je-li G strom.*

Důkaz. I. Nechť G je strom o n uzlech. Dokážeme existenci jediného W-stromu s pramenem w. Pro $n = 1$ a $n = 2$ je tvrzení zřejmé. Budiž $n > 2$; učiňme indukční předpoklad a uvažujme strom S_n o n uzlech a v něm uzel w. Protože takový strom má aspoň dva koncové uzly ([1], str. 49), existuje v S_n koncový uzel $v \neq w$. Odstraňme z S_n uzel v a příslušnou koncovou hranu. Je vidět, že vznikne strom[4]) S_{n-1} o $n - 1$ uzlech, který obsahuje uzel w. Podle indukčního předpokladu lze S_{n-1} orientovat tak, že vznikne W-strom s pramenem w. Tento W-strom tedy doplníme hranou jdoucí do uzlu v a existence žádané orientace stromu S_n je dokázána. Abychom nahlédli ještě unicitu, předpokládejme, že W-stromy S'_n a S''_n (vzniklé z neorientovaného stromu S_n) se liší orientací. Do koncového uzlu v (který byl nalezen výše) jde hrana $\overrightarrow{tv}$ v obou W-stromech. Odstraňme ji i s uzlem v; vzniknou opět dva W-stromy s pramenem w, které se liší orientací (spor s indukčním předpokladem).

II. Nechť G není strom; dokážeme existenci dvou W-grafů G' a G'' s pramenem w, které se liší orientací. Sestrojme v G keřík B_w s centrem w.[5]) Protože B_w je podgraf grafu G neobsahující kružnici,[6]) můžeme podle lemmatu 1 sestrojit kostru K grafu G, jejíž podgrafem je keřík B_w. Podle odst. I lze K orientovat jako W-strom s pramenem w. V G existují hrany, které nepatří do K (žádná

[3]) Důkaz lze najít ve [2], str. 112 (lemma 27).

[4]) Souvislost plyne z [1], str. 11, věta 14.

[5]) *Keřík* (Büschel) B_w s centrem w v grafu G je podgraf grafu G, který tvoří všechny hrany grafu G incidující s uzlem w a všechny koncové uzly všech těchto hran (viz [1], str. 128).

[6]) Keřík obecně může obsahovat kružnici (dvojúhelník), avšak vzhledem k tomu, že u neorientovaných grafů nepřipouštíme dvojúhelníky, keřík v námi uvažovaných neorientovaných grafech neobsahuje kružnici.

z nich neinciduje s w); nechť xy je jedna z nich. Graf G' (resp. G'') sestrojíme nyní tak, že zkonstruovaný už W-strom doplníme hranou $\overrightarrow{xy}$ (resp. $\overrightarrow{yx}$); ostatní hrany grafu G nepatřící do K (existují-li) orientujme libovolně. Pak W-grafy G' a G'' se liší orientací.

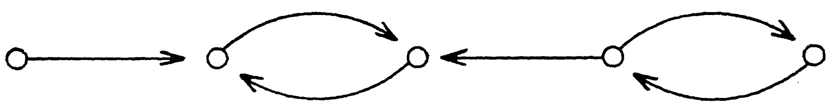
Věta 2. *W-graf s pramenem w je W-stromem právě tehdy, jde-li do každého uzlu $v \neq w$ jediná hrana.*

Důkaz. I. Uvažujme W-strom o n uzlech a označme n_1 (resp. n_2) počet těch jeho uzlů, do nichž jde jediná hrana (resp. aspoň dvě hrany). Platí tedy $1 + n_1 + n_2 = n$. Protože každá hrana jde do jednoho uzlu, můžeme počet hran $n - 1$ našeho W-stromu odhadnout takto: $1 \cdot n_1 + 2n_2 \leqq n - 1$. Odtud $n_2 \leqq 0$ a dále $n_1 = n - 1$.

II. Obráceně nechť G je W-graf o n uzlech s pramenem w, v němž do každého uzlu $v \neq w$ jde jediná hrana; graf G má tedy $n - 1$ hran a protože je souvislý, je strom ([1], str. 54, věta 14).

Poznámka 1. Jestliže graf G má n uzlů a existuje-li jeho W-base K s r komponentami, pak K má $n - r$ hran (podle věty 2 jde totiž do každého uzlu, který není pramenem, právě jedna hrana).

Ačkoliv existence W-base v každém grafu je zřejmá, není možno sestrojit v každém grafu G takovou W-basi, jejíž prameny by byly libovolně předem vybrané uzly grafu G, dokonce nelze ani předepsat počet komponent W-base. Tak např. ve W-grafu z obr. 1 neexistuje souvislá W-base. Omezíme se tedy na speciální typy orientovaných grafů; nejprve věnujme pozornost acyklickým[7]) grafům.



Obr. 1.

Věta 3. *Nechť A je acyklický graf a nechť $w_1, w_2, \ldots, w_r$ $(r \geqq 1)$ jsou všechny jeho prameny; nechť dále B je podgraf grafu A, jehož každá komponenta je W-strom. Pak existuje W-base grafu A s prameny w_i $(1 \leqq i \leqq r)$, jejímž podgrafem je B.*

Důkaz. Nechť předně je A souvislý; označme h (resp. u) počet jeho hran (resp. uzlů). Platí $h \geqq u - 1$ ([1], str. 54, věta 15). Důkaz nyní podáme indukcí podle h (při pevném u).

Je-li $h = u - 1$, je A strom a tvrzení platí (jak bychom nahlédli indukcí podle u). Budiž $h_0 > u - 1$; učiňme indukční předpoklad a uvažujme souvislý acyklický graf A_0 s h_0 hranami, s prameny w_i $(1 \leqq i \leqq r)$ a s podgrafem B_0 popsaných už vlastností. V A_0 existuje kružnice O, která ovšem není cyklem.

[7]) Orientovaný graf se nazývá *acyklický*, neobsahuje-li jako podgraf žádný cyklus (viz [4]).

V O tedy existují dvě různé hrany $\overrightarrow{v_1v}$, $\overrightarrow{v_2v}$; obě tyto hrany nemohou současně patřit k B_0 (plyne z věty 2). Nechť tedy $\overrightarrow{v_1v}$ non ϵ B_0; odstraňme $\overrightarrow{v_1v}$ z grafu A_0: dostaneme tak souvislý[8]) acyklický graf A_1 (o $h_0 - 1$ hranách) s prameny[9]) w_i ($1 \leqq i \leqq r$) a s podgrafem B_0. Podle indukčního předpokladu tedy existuje W-base grafu A_1 mající B_0 za podgraf a ta splňuje požadavky vyslovené v textu věty. Pro souvislé grafy A je tedy důkaz podán.

Dále je zřejmé, že každý souvislý acyklický graf A obsahuje W-basi s týmiž prameny, jaké má A (vynecháváme předpoklad o B).

Nechť konečně A není souvislý. Je-li každý jeho uzel isolovaný, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy A má komponentu $\bar{A}$ o aspoň dvou uzlech a nechť $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_t$ jsou její prameny. Jsou-li $\bar{A}$ a B disjunktní, lze zřejmě v $\bar{A}$ sestrojit W-basi s prameny $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_t$. Mají-li $\bar{A}$ a B společné uzly, existuje v $\bar{A}$ maximální podgraf $\bar{B}$ grafu B takový, že komponenty grafu $\bar{B}$ jsou W-stromy. Pak podle dosud podaného důkazu je zřejmé, že v $\bar{A}$ existuje W-base s prameny $\bar{w}_k, \ldots, \bar{w}_t$, jejímž podgrafem je $\bar{B}$. Provedeme-li takovou konstrukci W-basí pro každou komponentu grafu A, která není isolovaným uzlem, dostaneme žádanou W-basi. Důkaz je podán.

Také v dobře orientovaných grafech[10]) hraje pojem W-base zajímavou roli, jak ukážeme ve větách 4 a 5. Nejprve však uvedeme jednu pomocnou větu.

Lemma 2. *Orientovaný strom obsahuje aspoň jeden pramen.*

Důkaz plyne ihned odtud, že strom má více uzlů než hran.

Věta 4. *Jestliže ke každému uzlu w grafu G existuje W-base grafu G s jediným pramenem w, pak G je dobře orientovaný graf.*

Důkaz. Máme dokázat, že ke každé dvojici různých uzlů x, y existuje dráha vedoucí z x do y. Sestrojme W-basi s (jediným) pramenem x. Uzly x, y jsou v ní spojeny jedinou cestou C ([1], str. 48, věta 2). Ukážeme, že C je dráha. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by na C uzel t, do něhož by vcházely dvě hrany cesty C. Tyto hrany by tedy vcházely do t také v naší souvislé W-basi, která je W-stromem (spor s větou 2).

Věta 5. *Nechť G je dobře orientovaný graf a nechť B je (neprázdný) podgraf grafu G, jehož každá komponenta je W-strom. Pak existuje W-base grafu G, která obsahuje B jako podgraf a která má tytéž prameny jako B.*

Důkaz. Nechť U je množina všech uzlů z G, které nejsou v B, a m nechť je počet prvků z U. Větu dokážeme indukcí podle m. Pro $m = 0$ graf B je W-basí a věta platí. Budiž tedy $m > 0$ a nechť věta platí pro všechny podgrafy B

[8]) [1], str. 11, věta 14.

[9]) Nový pramen nemůže při konstrukci grafu A_1 vzniknout.

[10]) Graf je *dobře orientovaný*, lze-li z každého jeho uzlu dojít po dráze do každého jeho dalšího uzlu (viz [4]).

grafu G, pro něž je příslušný počet prvků z U menší než m. Existuje alespoň jeden uzel $u \in B$ a alespoň jeden $v \in U$. Poněvadž G je dobře orientovaný graf, existuje v G dráha vedoucí z u do v. Označme u' poslední uzel této dráhy, který je v B. Je $u' \neq v$ a uzel v' následující za u' je z U. Tedy $\overrightarrow{u'v'}$ je hrana z G. Přidáme-li ke grafu B hranu $\overrightarrow{u'v'}$ a uzel v', dostaneme nový graf B', jehož každá komponenta je W-strom a který má tytéž prameny jako B. Poněvadž počet prvků z příslušné množiny U' je $m - 1$, existuje podle indukčního předpokladu W-base, která obsahuje B' (a tedy i B) jako podgraf a která má tytéž prameny jako B' (a tedy i jako B). Tím je věta dokázána.

Důsledek. Graf G je dobře orientovaný právě tehdy, jestliže ke každé neprázdné podmnožině P množiny uzlů grafu G existuje W-base grafu G, jejímiž prameny jsou právě uzly z P.

Důkaz plyne ihned z vět 4 a 5.

Pojem W-base grafu má zajímavou aplikaci také v theorii determinantů, jak ukážeme ve větě 6. K tomu potřebujeme pojem *ohodnoceného* grafu ([1], str. 121). Nechť je dán orientovaný graf G; jeho uzly označme $1, 2, 3, \ldots, n$ ($n \geqq 2$). Ke každé hraně $\overrightarrow{ik}$ přiřaďme reálné číslo u_{ik}. K takto ohodnocenému grafu G sestrojme nyní matici $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$ definovanou takto:

I. Při $i \neq k$ klademe $a_{ik} = - u_{ik}$, existuje-li v G hrana $\overrightarrow{ik}$; neexistuje-li taková hrana, je $a_{ik} = 0$.

II. $a_{kk} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$ (pro $k = 1, 2, \ldots, n$).

Budiž $1 \leqq r < n$ a nechť $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ je minor matice $\mathbf{A}_G$, vzniklý z $\mathbf{A}_G$ vynecháním řádků a sloupců, které jsou označeny čísly $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Je-li dále G ohodnocený graf s alespoň jednou hranou, označme $\pi\{G\}$ součin všech čísel, jichž bylo užito k ohodnocení hran grafu G. Nechť $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ je W-base grafu G s prameny $i_1, i_2, \ldots, i_r$; označme $\sum\limits_{G} \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ součet všech $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ přes všechny W-base grafu G, které mají prameny $i_1, i_2, \ldots, i_r$ (prázdný součet klademe roven nule). Odvodíme nejprve dvě pomocné věty.

Lemma 3. *Je-li G ohodnocený W-strom s pramenem n, pak $A_G(n) = \pi\{G\}$.*

Důkaz. Pro $n = 2$ je tvrzení zřejmé. Budiž tedy $n > 2$ a nechť tvrzení platí pro všechny W-stromy o n_0 uzlech ($2 \leqq n_0 < n$). Uvažujme ohodnocený W-strom S o n uzlech (s pramenem označeným n). Každý strom má aspoň dva koncové uzly ([1], str. 49), tedy každý W-strom má aspoň jeden koncový uzel y různý od pramene; nechť v S do y jde hrana $\overrightarrow{xy}$. Odstraňme z S uzel y a hranu $\overrightarrow{xy}$ (vynechávajíce ovšem také u_{xy}). Dostaneme ohodnocený W-strom S^* o $n - 1$ uzlech (s pramenem n), tedy $\pi\{S\} = u_{xy}\, \pi\{S^*\}$.

Označíme-li $A_{S^*}(n)$ minor definovaný pomocí S^*, platí podle indukčního předpokladu $A_{S^*}(n) = \pi\{S^*\}$ čili $\pi\{S\} = u_{xy} A_{S^*}(n)$. Abychom dokázali, že $A_S(n) = u_{xy} A_{S^*}(n)$, rozvedeme $A_S(n)$ podle prvků y-tého řádku (v něm nejvýše jen prvek u_{xy} stojící v hlavní úhlopříčce je $\neq 0$). Důkaz je podán.

Lemma 4. $A_G(n) = \sum_G \pi\{K(n)\}$.

Důkaz. Budiž h počet hran grafu G. Je-li $h = 0$, neexistuje žádná souvislá W-base, tedy $\sum_G \pi\{K(n)\} = 0$. Minor $A_G(n)$ je pak také roven nule, proto tvrzení platí. Budiž $h > 0$; učiňme indukční předpoklad a uvažujme ohodnocený graf G, který má h hran (počet uzlů je stále n). Jemu odpovídá matice $\mathbf{A}_G$. Omezíme se jen na ty ohodnocené grafy G, kde n je pramen grafu G (čili $\mathbf{A}_G$ má v n-tém sloupci samé nuly), neboť hrany jdoucí do n nehrají roli ani v $A_G(n)$, ani v $\sum_G \pi\{K(n)\}$. Probereme nyní dva případy:

I. Nechť do každého uzlu grafu G jde nejvýše jedna hrana. Je-li některý uzel $x \neq n$ grafu G jeho pramenem, pak neexistuje souvislá W-base $K(n)$, tedy $\sum_G \pi\{K(n)\} = 0$. Dále v x-tém sloupci matice $\mathbf{A}_G$ jsou samé nuly, tedy $A_G(n) = 0$; tvrzení platí.

Zbývá případ, kdy do každého uzlu $x \neq n$ grafu G jde jediná hrana.

a) Není-li G souvislý, pak neexistuje souvislá W-base, tedy $\sum_G \pi\{K(n)\} = 0$. Zvolme komponentu C grafu G, v níž neleží uzel n. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že C má uzly $1, 2, 3, \ldots, l$ $(l < n)$. Každý subdeterminant minoru $A_G(n)$ vzatý z prvních l sloupců je roven nule (od nuly různé prvky jsou zde jen v prvních l řádcích a při tom sloupcové součty jsou rovny nule). Podle Laplace-ovy věty je tedy $A_G(n) = 0$, čímž je tvrzení ověřeno.

b) Je-li G souvislý, je to W-strom s pramenem n (věta 2) a tvrzení plyne z lemmatu 3.

II. Nechť existuje uzel r grafu G, do něhož jdou aspoň dvě různé hrany $\overrightarrow{s_1 r}$, $\overrightarrow{s_2 r}$. Sestrojme v ohodnoceném grafu G podgraf G_1 tak, že vypustíme z G hranu $\overrightarrow{s_1 r}$; dále sestrojme v G podgraf G_2 tak, že v G vypustíme všechny hrany jdoucí do r ponechávajíce jen $\overrightarrow{s_1 r}$. Ponecháme-li ohodnocení hran, jsou G_1 a G_2 ohodnocené grafy; nechť $A_{G_1}(n)$ a $A_{G_2}(n)$ jsou příslušné minory. Platí zřejmě $A_G(n) = A_{G_1}(n) + A_{G_2}(n)$. Každá souvislá W-base grafu G (s pramenem n) je souvislou W-basí právě jednoho z grafů G_1 a G_2 a obráceně. Protože každý z grafů G_1, G_2 má méně hran než h, lze použít indukčního předpokladu, tedy

$$A_{G_i}(n) = \sum_{G_i} \pi\{K(n)\}\,, \quad (i = 1, 2)\,,$$

takže

$$A_G(n) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{G_i} \pi\{K(n)\} = \sum_{G} \pi\{K(n)\} .$$

Důkaz je podán.

Věta 6. $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_{G} \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$.

Důkaz. Můžeme se omezit na ty grafy G, v nichž každý z uzlů $i_1, i_2, \ldots, i_r$ je pramenem (viz obdobné omezení v důkazu lemmatu 4).

Podle lemmatu 4 tvrzení platí pro $r = 1$. Budiž dále $r > 1$; učiňme indukční předpoklad a sestrojme minor $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$. Jsou-li $i_1, i_2, \ldots, i_r$ isolované v grafu G, je tvrzení zřejmé. Je-li jeden z nich neisolovaný a všechny ostatní isolované, platí tvrzení na základě lemmatu 4. Nechť nyní aspoň dva z uvedených pramenů nejsou isolované; lze předpokládat, že to jsou uzly i_r, i_{r-1}. Nechť $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ je množina uzlů, do nichž vede hrana aspoň z jednoho z uzlů i_r, i_{r-1}. Sestrojme z grafu G pomocný ohodnocený graf H takto: Uzly i_r, i_{r-1} nechme splynout v nový uzel i, ostatní uzly grafu G ponechme. Hrany grafu G, které nevycházejí ani z i_r, ani z i_{r-1}, ponechme i s příslušným ohodnocením. Uzel i spojme s každým uzlem z J a ohodnoťme součtem $S_{ij\alpha} = u_{i_rj\alpha} + u_{i_{r-1}j\alpha}$ (při tom definujme $u_{i_rj\alpha} = 0$, neexistuje-li $\overrightarrow{i_rj_\alpha} \in G$ a podobně pro $u_{i_{r-1}j\alpha}$).

Zřejmě platí[11])

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r| = A_H(i_1, i_2, \ldots, i_{r-2}, i) .$$

Podle indukčního předpokladu dostáváme

$$A_H(i_1, \ldots, i_{r-2}, i) = \sum_{H} \pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)\} .$$

Nechť K^* je graf, který vznikne, vynecháme-li v $K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)$ uzel i a hrany s ním incidentní. Pak v H platí $\pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}i)\} = \sigma \, . \, \pi\{K^*\}$, kde σ je součin čísel s_{ij_α} přes vhodné $j_\alpha \in J$.[12]) Upravme σ podle distributivního zákona. Vidíme, že $\pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)\}$, sestrojené v H, lze vypočíst jako součet všech součinů $\pi\{\bar{K}(i_1, \ldots, i_r)\}$, kde $\bar{K}(i_1, \ldots, i_r)$ probíhá všechny W-base grafu G obsahující K^* jako podgraf. Abychom dokázali

$$\sum_{H} \pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)\} = \sum_{G} \pi\{K(i_1, \ldots, i_r)\} ,$$

uvážíme ještě, že každou W-basi $K(i_1, \ldots, i_r)$ grafu G dostaneme z jediné W-base $K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)$ grafu H, doplníme-li K^* vhodnými hranami. Důkaz je podán.

---

[11]) Pro $r = 2$ nechť pravá strana znamená $A_H(i)$.

[12]) Uvědomíme si, že zde K^* je graf, jehož komponenty jsou W-stromy, při čemž prameny tvoří uzly z J a uzly $i_1, i_2, \ldots, i_{r-2}$.

Poznámka 2. Věty 6 lze použít k určení počtu všech W-basí daného orientovaného grafu G (o alespoň dvou uzlech), které mají předepsanou množinu pramenů $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Ohodnotíme-li totiž každou hranu grafu G číslem 1, je hledaný počet roven číslu

$$\sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\} = A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) .$$

Poznámka 3. Věta 6 může sloužit na př. i k určení počtu (souvislých) koster neorientovaného grafu G. Sestrojme totiž orientovaný graf G' tak, že v G místo každé hrany xy zavedeme dvě hrany $\overrightarrow{xy}$ a $\overrightarrow{yx}$; budiž w libovolný (pevný) uzel grafu G. Pak počet koster grafu G je roven počtu souvislých W-basí s pramenem w v grafu G', jak plyne z věty 1. Přiřadíme-li tedy grafu G o uzlech $1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 2$) čtvercovou n-řádkovou matici $\|a_{ij}\|_1^n$, kde pro $i \neq j$ je $a_{ij} = a_{ji} = -1$ (resp. 0), je-li (resp. není-li) v G hrana ij, zatím co $a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}$, potom každý hlavní minor stupně $n-1$ je roven hledanému počtu koster grafu G.[13])

Jako aplikaci uvedeme nyní dva příklady.

Příklad 1. Neorientovaný graf, jehož každá kružnice obsahuje sudý počet hran, se nazývá *sudý graf* ([1], str. 170). Sudé grafy charakterisuje ta vlastnost, že v nich existuje rozklad množiny uzlů na dvě (neprázdné) třídy M, N tak, že jen uzly dvou různých tříd jsou spojeny hranou ([1], str. 170, věta 12). Nechť m (resp. n) je počet prvků množiny M (resp. N). Nazveme *úplným sudým grafem* U takový sudý graf, v němž ke každé dvojici uzlů x, y ($x \in M$, $y \in N$) existuje hrana $xy \in U$.

Podle poznámky 3 je počet koster grafu U roven determinantu

$$\begin{array}{c l}
\left|\begin{array}{cccccccc}
n, & 0, & \ldots, & 0, & -1, & -1, & \ldots, & -1 \\
0, & n, & \ldots, & 0, & -1, & -1, & \ldots, & -1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0, & 0, & \ldots, & n, & -1, & -1, & \ldots, & -1 \\
-1, & -1, & \ldots, & -1, & m, & 0, & \ldots, & 0 \\
-1, & -1, & \ldots, & -1, & 0, & m, & \ldots, & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\underbrace{-1, \quad -1, \quad \ldots, \quad -1,}_{m} & & & & \underbrace{0, \quad 0, \quad \ldots, \quad m}_{n-1} & & &
\end{array}\right| &
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n-1 \end{array}
\end{array}$$

Tento determinant je, jak se snadno vypočte, roven $m^{n-1}n^{m-1}$.[14])

Příklad 2. Budiž A acyklický graf s prameny $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ($r \geqq 1$). Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_s$ jsou ostatní uzly grafu A, při čemž d_i značí počet hran, které ústí

[13]) K obdobnému vzorci dospěl jiným způsobem H. M. Trent v práci [5].

[14]) Srovnej se známým Cayleyho vzorcem pro počet koster úplného grafu ([1], str. 78).

do v_i ($1 \leqq i \leqq s$). Podle poznámky 2 dokážeme, že počet W-basí grafu A, které mají prameny $w_1, w_2, \ldots, w_r$, je $d_1 d_2 \ldots d_s$.[15])

Ohodnoťme opět každou hranu grafu A číslem 1. Volbou číslování uzlů lze vždy dosáhnout toho, že matice $\|a_{ik}\|_1^n$ je trojúhelníková. V její hlavní diagonále jsou jednak čísla d_i, jednak r nul. Z věty 6 už plyne žádaný výsledek.

LITERATURA

[1] *D. König;* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[2] *A. Kotzig;* Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava 1956 (skriptum).

[3] *G. Pólya;* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math. *68* (1937), 145—254.

[4] *J. Sedláček;* O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky *82* (1957), 195—215.

[5] *H. M. Trent;* A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. mat. Acad. Sci USA, *40*, 1004—1007 (1954).

Резюме

О W-БАЗАХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler) и ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 4/VI 1957 г.)

Источником конечного ориентированного графа G мы называем такую его вершину, которая не является концевой ни для какого ребра графа G. Связный ориентированный граф с одним единственным источником назовем *W-графом*; в случае, если W-граф является деревом, мы говорим о *W-дереве* (граф с одной вершиной мы считаем также W-деревом). Если G — конечный ориентированный граф, то под его *W-базой* мы подразумеваем подграф графа G, каждая составляющая которого является W-деревом и который содержит все вершины графа G. В статье мы прежде всего рассматриваем W-базы в ациклических и хорошо ориентированных графах. (Ориентированный граф является *ациклическим*, если он не содержит в качестве своего подграфа ни одного цикла. Граф является *хорошо ориентированным*, если в нем из каждой вершины ведет путь к любой дальнейшей.) Доказываются следующие теоремы:

[15]) Tento výsledek tedy doplňuje větu 3.

Пусть A — ациклический граф, и $w_1, w_2, \ldots, w_r$ $(r \geqq 1)$ — все его источники; пусть, далее, B — подграф графа A, каждая составляющая которого является W-деревом. Тогда существует W-база графа A с источниками $w_1, w_2, \ldots, w_r$, подграфом которой является B (теорема 3).

Если для каждой вершины w конечного ориентированного графа G существует W-база графа G с одним единственным источником w, то G является хорошо ориентированным графом (теорема 4).

Пусть G — хорошо ориентированный граф и пусть B — (непустой) подграф графа G, каждая составляющая которого является W-деревом. Тогда существует W-база графа G, содержащая B в качестве подграфа и имеющая те же источники, как и B (теорема 5).

Из двух последних теорем вытекает такое следствие: Граф G является хорошо ориентированным тогда и только тогда, если для любого непустого подмножества P множества вершин графа G существует W-база графа G, источниками которой являются в точности вершины P.

Понятие W-базы графа находит применение также в теории определителей. Пусть G — ориентированный граф; обозначим его вершины через $1, 2, 3, \ldots, n$ $(n \geqq 2)$. Каждому ребру $\overrightarrow{ik}$ поставим в соответствие действительное число u_{ik} и составим для помеченного таким образом графа G матрицу $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$, определенную следующим образом:

I. Если $i \neq k$, то положим $a_{ik} = -u_{ik}$ тогда и только тогда, если в G существует ребро $\overrightarrow{ik}$; если же такого ребра не существует, то положим $a_{ik} = 0$.

II. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ положим $a_{kk} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$. Пусть $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ — минор матрицы $\mathbf{A}_G$, полученный из $\mathbf{A}_G$ путем вычеркивания строк и столбцов, обозначенных числами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ (где $1 \leqq r < n$). Для помеченного графа H обозначим через $\pi(H)$ произведение всех чисел, использованных для пометок ребер графа H. Пусть $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ есть W-база графа G с источниками $i_1, i_2, \ldots, i_r$; обозначим через $\sum\limits_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ сумму всех $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$, взятую по всем W-базам графа G, имеющим фиксированные источники $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Тогда (теорема 6):

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}\,.$$

В заключении работы иллюстрируются применения указанной теоремы об определителях. Показано, что эта теорема может быть использована, напр., и для определения числа (связных) основ неориентированного графа. В частности, разобран случай т. наз. *полного четного графа*. Четный граф можно — как известно — охарактеризовать тем, что в нем существует разложение множества вершин на два класса M, N так, что только вершины двух различных классов соединены ребрами. Пусть m (соотв. n) есть число элементов множества M (соотв. N). Если теперь назвать полным четным графом U такой четный граф, в котором для каждой пары вершин $x \in M$, $y \in N$ существует ребро $xy \in U$, то число основ графа U равно $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

Zusammenfassung

ÜBER WURZELBASEN VON GERICHTETEN GRAPHEN

MIROSLAV FIEDLER u. JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Eingelangt am 4. Juni 1957)

Als *Quelle* eines endlichen gerichteten Graphen G bezeichnen wir einen solchen Knotenpunkt von G, der für keine Kante von G als ein Endpunkt dient. Jeder zusammenhängende gerichtete Graph mit einer einzigen Quelle heisst ein *Wurzelgraph* (kurz *W-Graph*). Ist ein W-Graph ein Baum, dann sprechen wir von einem *W-Baume* (auch einen Graphen mit nur einem Knotenpunkte halten wir für einen W-Baum). Ist G ein endlicher gerichteter Graph, dann ist es möglich seine *W-Basis* H zu definieren: H sei ein solcher Teilgraph von G, der alle Knotenpunkte von G enthält und dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns zuerst mit den W-Basen in azyklischen und wohlgerichteten Graphen. (Ein Graph ist *azyklisch*, wenn kein Teilgraph ein Zyklus ist. Ein Graph ist *wohlgerichtet,* wenn von jedem Knotenpunkt aus zu jedem anderen eine Bahn führt.) Folgende Sätze werden bewiesen:

Sei A ein azyklischer Graph und $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ($r \geqq 1$) alle seine Quellen; sei B ein solcher Teilgraph von A, dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. Dann existiert eine W-Basis von A, für die die Knotenpunkte $w_1, w_2, \ldots, w_r$ sämtliche Quellen sind und die B als Teilgraphen enthält (Satz 3).

Gibt es zu jedem Knotenpunkt w eines endlichen gerichteten Graphen G eine W-Basis von G mit der einzigen Quelle w, so ist G ein wohlgerichteter Graph (Satz 4).

Es sei G ein wohlgerichteter Graph und B ein (nicht leerer) Teilgraph von G, dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. Dann existiert eine W-Basis von G mit denselben Quellen wie B, die B als Teilgraphen enthält (Satz 5).

Aus diesen zwei Sätzen folgt, dass ein gerichteter Graph dann und nur dann wohlgerichtet ist, wenn zu jeder nicht leeren Untermenge P der Knotenpunktmenge von G eine W-Basis von G existiert, deren Quellen genau diejenige Knotenpunkte von P sind.

Der Begriff der W-Basis hat auch eine Anwendung in der Theorie der Determinanten.

Es sei G ein gerichteter Graph, dessen Knotenpunkte wir mit $1, 2, 3, \ldots, n$ $(n \geqq 2)$ bezeichnen wollen. Zu jeder Kante $\overrightarrow{ik}$ von G ordnen wir eine reelle Zahl u_{ik} zu. Jetzt sei zu diesem *bewerteten* Graphen eine n-reihige quadratische Matrix $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$ folgendermassen definiert:

I. Ist $i \neq k$, dann sei $a_{ik} = -u_{ik}$ dann und nur dann, falls in G die Kante $\overrightarrow{ik}$ existiert; anderenfalls sei $a_{ik} = 0$.

II. Für $k = 1, 2, \ldots, n$ sei $a_{kk} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$.

Es sei nun $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ (mit $1 \leqq r < n$) diejenige Hauptunterdeterminante von $\mathbf{A}_G$, in der genau die Reihen und Spalten $i_1, i_2, \ldots, i_r$ fehlen. Ist ferner H ein bewerteter Graph, so sei mit $\pi\{H\}$ das Produkt von sämtlichen zur Bewertung der Kanten von H benützten Zahlen bezeichnet. Ist noch mit $\sum\limits_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ die Summe von $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ über sämtliche W-Basen $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ von G mit den festen Quellen $i_1, i_2, \ldots, i_r$ bezeichnet, so gilt (Satz 6):

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\} .$$

Zum Schluss sind noch einige Anwendungen dieses Satzes angeführt. So kann auf diese Weise die Anzahl (zusammenhängender) Gerüste eines nichtgerichteten Graphen bestimmt werden. Es wird gezeigt, dass der sog. *vollständige paare Graph* vom Typus (m, n), der $m + n$ Knotenpunkte von zwei Klassen der Mächtigkeit m bzw. n besitzt, wobei genau Knotenpunkte von verschiedenen Klassen durch Kanten verbunden sind, die Anzahl der Gerüste $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$ hat.