Časopis pro pěstování matematiky

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 355–356

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108287

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ÚLOHY A PROBLÉMY

3. Buď P normovaný lineární prostor. Najděte nějakou podmínku postačující k tomu, aby existoval v P skalární součin takový, aby norma jím vytvořená byla ekvivalentní s původní normou.

Karel Karták, Praha

4. Označme $M_h(n)$ množinu všech reálných čtvercových n-řádkových matic hodnosti h, $P_h(n)$ množinu všech symetrických nezáporně definitních matic z $M_h(n)$, $O(n)$ množinu všech ortogonálních matic z $M_n(n)$. Dále definujme pro reálnou matici $A = (a_{ij})$ matici $\operatorname{sgn} A = (\operatorname{sgn} a_{ij})$.

Najděte množiny všech matic s prvky 0, 1 a -1, které vzniknou jako matice $\operatorname{sgn} A$ pro a) $A \in M_h(n)$, b) $A \in P_h(n)$, c) $A \in O(n)$.

Miroslav Fiedler, Praha

Řešení úlohy 1 (autor *Jiří Sedláček*) z č. 1, roč. *83* (1958), str. 101:

Začneme pomocnou úvahou. Platí

$$|b_k - b_{k+1}| \leqq \frac{1}{k+1}. \tag{1}$$

Je-li totiž $b_k = \frac{r}{k}$, potom člen b_{k+1} může být roven buď $b'_{k+1} = \frac{r}{k+1}$, nebo $b''_{k+1} = \frac{r+1}{k+1}$. Tedy

$$b''_{k+1} - b'_{k+1} = \frac{1}{k+1}, \quad b'_{k+1} < b_k \leqq b''_{k+1},$$

odtud

$$|b_k - b_{k+1}| \leqq |b''_{k+1} - b'_{k+1}| = \frac{1}{k+1}.$$

Budeme nyní dokazovat druhou část úlohy. Položme $\alpha = \underline{\lim}\, b_k$, $\beta = \overline{\lim}\, b_k$. Je zřejmě $\alpha \leqq \beta$. Budiž $\alpha = \beta$. Potom má posloupnost jedinou hromadnou hodnotu, kterou je možno považovat za uzavřený interval, jehož krajní body splývají. Budiž $\alpha < \beta$. Dokážeme, že potom každé γ splňující nerovnost $\alpha < \gamma < \beta$ je hromadnou hodnotou posloupnosti $\{b_k\}$. Protože žádný bod $\gamma < \alpha$ ani $\gamma > \beta$ nemůže být hromadnou hodnotou $\{b_k\}$, bude tím proveden důkaz druhé části úlohy.

Z definice čísel α a β plyne: V každém ε-okolí bodu α existuje nekonečná posloupnost vybraná z $\{b_k\}$, a to $b_{l_1}, b_{l_2}, b_{l_3}, \ldots$. V každém ε-okolí bodu β existuje nekonečná posloupnost vybraná z $\{b_k\}$, a to $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \ldots$. Volme ε tak malé, aby $\alpha + \varepsilon < \gamma < \beta - \varepsilon$. Vezměme dále všechna k_i a l_i a seřaďme je do posloupnosti podle velikosti. Ke každému l_i

existuje l_{i+n} (n nezáporné) takové, že po něm bezprostředně v této posloupnosti následuje nějaké k_j (kdyby ne, bylo by indexů k_i jen konečně mnoho — spor).

Budiž nyní dáno η-okolí bodu γ; zvolme $l_i > \frac{1}{\eta}$, tedy $\eta > \frac{1}{l_i}$. Příslušné l_{i+n} dále označíme l, příslušné k_j označíme k.

Všimneme si nyní bodů

$$b_l, b_{l+1}, \dots, b_k . \tag{2}$$

Pro ně podle (1) zřejmě platí

$$|b_n - b_{n+1}| < \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{l} \leqq \frac{1}{l_i} < \eta .$$

Přitom je $b_l < \gamma < b_k$. Je tedy v (2) neprázdná množina M bodů ležících před γ a neprázdná množina N bodů ležících za γ nebo s γ totožných. Vezměme z M bod s největším indexem a označme jej $b_{l'}$. Je tedy $b_{l'} < \gamma \leqq b_{l'+1}$. Protože platí $|b_{l'} - \gamma| \leqq |b_{l'} - b_{l'+1}| < \eta$, je $b_{l'}$ v η-okolí bodu γ a je $b_{l'} \neq \gamma$; tedy je γ hromadnou hodnotou posloupnosti $\{b_k\}$.

První část úlohy dokážeme nyní tím způsobem, že sestrojíme posloupnost $\{b_k\}$ takovou, že $\underline{\lim}\, b_k = \alpha$, $\overline{\lim}\, b_k = \beta$.

Nejprve si všimněme tohoto: Je-li dáno $b_k = \frac{r}{k}$ $(r \leqq k)$, liší se $b'_{k+n} = \frac{r}{k+n}$ libovolně málo od nuly, $b''_{k+n} = \frac{r+n}{k+n}$ libovolně málo od 1.

Položíme $b_1 = \frac{0}{1} = 0$. Dále postupujeme takto: Členy $a_2, \dots, a_{i_1}$ položíme rovny 1, při čemž i_1 volíme tak, že $b_{i_1-1} < \beta \leqq b_{i_1}$. Takové i_1 existuje, neboť b_i se mohou libovolně blížit k 1 a $\beta < 1$. Členy $a_{i_1-1}, \dots, a_{i_2}$ položíme rovny 0, při čemž i_2 volíme tak, že $b_{i_2-1} > \alpha \geqq b_{i_2}$. Takové i_2 existuje, neboť b_i se mohou libovolně blížit k nule a $\alpha > 0$. Členy $a_{i_2} + 1, \dots, a_{i_3}$ položíme rovny 1, při čemž i_3 volíme tak, že $b_{i_3-1} < \beta \leqq b_{i_3}$ atd.

Dokážeme, že pro takto sestrojené $\{b_k\}$ je $\beta = \overline{\lim}\, b_k$.

1. Číslo β je hromadná hodnota $\{b_k\}$: V každém ε-okolí β existuje nekonečně mnoho bodů z $\{b_k\}$, např. všechny body $b_{i_{2l+1}}$ pro $l \geqq n$. Zvolíme-li totiž n takové, že $\frac{1}{i_{2n+1}} < \varepsilon$, pak pro $l \geqq n$ je

$$|b_{i_{2l+1}} - \beta| \leqq |b_{i_{2l+1}} - b_{i_{2l+1}-1}| \leqq \frac{1}{i_{2l+1}} \leqq \frac{1}{i_{2n+1}} < \varepsilon .$$

2. Je-li $\beta' > \beta$, pak β' není hromadnou hodnotou. Platí totiž: Pro $k > i_{2l+1}$ je $b_k < \beta + \frac{1}{i_{2l+1}}$; kdyby totiž bylo $b_k \geqq \beta + \frac{1}{i_{2l+1}}$, bylo by $b_{k-1} \geqq \beta$ a tedy $\beta \leqq b_{k-1} < b_k$, což je ve sporu s konstrukcí. Zvolme $\eta = \frac{1}{2}(\beta' - \beta)$, $i_{2l+1} > \frac{1}{\eta}$; potom žádný bod b_k pro $k > i_{2l+1}$ neleží v η-okolí bodu β', tedy tam leží nejvýše konečný počet bodů z $\{b_k\}$, c. b. d. Obdobně se dokáže, že $\alpha = \underline{\lim}\, b_k$.

Z těchto výsledků a z důkazu druhého tvrzení úlohy, který byl podán výše, plyne, že množinou hromadných hodnot $\{b_k\}$ je právě $\langle \alpha, \beta \rangle$. *)

Aleš Pultr, Praha

---

*) *Poznámka redakce.* Řešení téže úlohy 1 zaslali později též: B. Míšek, Honice a M. Kadlec, Praha.