Zbyněk Nádeník

Über die geschlossenen Raumkurven

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 214--219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108257

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ÜBER DIE GESCHLOSSENEN RAUMKURVEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 9. Juni 1964)

Wir behalten alle Voraussetzungen, Bezeichnungen und Benennungen aus der Einleitung in [3], S. 200 und 201, aber wir werden den in [3] durch die Ungleichung (5) ausgeschlossenen Fall untersuchen, dass alle Zylinderflächen $\Lambda(\alpha)$, $\alpha \in \langle 0, a)$, entweder (a) in ebene Streifen oder (b) in Geraden entarten.

Im Falle (a) ist die Stützfunktion $h(\alpha, \gamma)$ folgendermassen definiert:

$$h(\alpha, \gamma) = -f_i(\alpha) \cos \gamma - g_i(\alpha) \sin \gamma , \tag{1a}$$

wobei für $\gamma \in \langle \beta(\alpha) - \pi/2, \beta(\alpha) + \pi/2 \rangle$ immer $i = 1$ und für $\gamma \in \langle \beta(\alpha) + \pi/2, \beta(\alpha) + 3\pi/2 \rangle$ immer $i = 2$ ist und $f_i(\alpha)$, $g_i(\alpha)$ und $\beta(\alpha)$ solche Funktionen mit der Periode a sind, dass

$$\cos \beta = (f_2 - f_1) : \delta , \quad \sin \beta = (g_2 - g_1) : \delta , \tag{2a}$$
$$\delta = [(f_2 - f_1)^2 + (g_2 - g_1)^2]^{\frac{1}{2}} > 0 .$$

Im Falle (b) ist einfach ($f(\alpha)$, $g(\alpha)$ sind wieder gewisse Funktionen mit der Periode a)

$$h(\alpha, \gamma) = -f(\alpha) \cos \gamma - g(\alpha) \sin \gamma . \tag{1b}$$

Aus der Bedingung (3) in der Einleitung in [3] ergibt sich bei (1a) bzw. (2a), dass

$$\text{(a)}\ kf_i + g'_i = 0 , \quad i = 1, 2 \quad \text{bzw.} \quad \text{(b)}\ kf + g' = 0 \tag{3}$$

(immer $(\ )' = d(\ )/d\alpha$) und die in der Einleitung in [3] durch (4) definierte Funktion $w(\alpha, \gamma)$ hat jetzt folgende Form:

$$\text{(a)}\ w(\alpha, \gamma) = w_i(\alpha, \gamma) = -kg_i + f'_i \quad \text{bzw.} \quad \text{(b)}\ w(\alpha, \gamma) = -kg + f' . \tag{4}$$

In beiden Fällen ist deshalb $\partial w/\partial \gamma = 0$, sodass nach (5) und (7) in der Einleitung in [3] folgt, dass $A(h) = (h + \partial^2 h/\partial \gamma^2) [k_1^{-1} - h \cos \gamma + (\partial h/\partial \gamma) \sin \gamma + w']$. Bei (1a) und (2a) ist $h + \partial^2 h/\partial \gamma^2 = 0$ und die Ungleichung (5) aus der Einleitung in [3] ersetzen wir durch die Forderung

$$k_1^{-1} - h \cos \gamma + \frac{\partial h}{\partial \gamma} \sin \gamma + w' > 0 , \tag{5}$$

deren Bedeutung in dem Abschn. 1 klar gemacht wird.

Für das Integral der mittleren Krümmung M und für die Oberfläche O der Enveloppe S einer einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen $\Lambda(\alpha)$, $\alpha \in \in \langle 0, a)$, sind in [3] folgende Formeln abgeleitet worden (s. (*) in der Einleitung in [3])

$$(*) \qquad M = \pi \int_C \mathrm{d}s + \int_\Omega h \,\mathrm{d}\omega\,, \quad O = \int_C L \,\mathrm{d}s + \int_\Omega \{h^2 - \tfrac{1}{2}\Delta_1(h, h)\} \,\mathrm{d}\omega\,.$$

Sie behalten den Sinn auch in beiden betrachteten Fällen. Es gilt nämlich:

Der Ausdruck rechts in der ersten Formel (*) *bedeutet im Falle* (a) *die $\pi/2$-malige Summe der Längen L_1, L_2 der Kurven K_1, K_2, welche die Enveloppen der Randgeraden der ebenen Streifen $\Lambda(\alpha)$ sind, und im Falle* (b) *die π-malige Länge der Kurve K, welche die Enveloppe der Geraden $\Lambda(\alpha)$ ist.* (S. Abschn. 1.) *Der Ausdruck rechts in der zweiten Formel* (*) *bedeutet im Falle* (a) *die zweimalige Oberfläche der abwickelbaren Fläche, welche die Enveloppe der ebenen Streifen $\Lambda(\alpha)$ ist.*[1]) (S. Abschn. 2.)

Weiter werden wir eingehender nur den Fall (b) studieren, und zwar in der einfacheren Situation, wenn die Grundkurve C – immer mit demselben sphärischen Bilde der Vektoren $\mathbf{t}(\alpha)$ – in den Nullpunkt übergeht, sodass $k_1^{-1} = 0$. *Die Kurve K hat dann die Parameterdarstellung* (s. Abschn. 1)

$$(6) \qquad \mathbf{x}(\alpha) = f'(\alpha)\,\mathbf{t}(\alpha) - f(\alpha)\,\mathbf{n}(\alpha) - g(\alpha)\,[k(\alpha)\,\mathbf{t}(\alpha) + \mathbf{b}(\alpha)]\,, \quad \alpha \in \langle 0, a)\,;$$

für den Radius ihrer ersten Krümmung gilt die Analogie der Formel von WEINGARTEN (vgl. [1], S. 110, (14) und S. 115, (1) und (1,7) in [3])

$$(7) \qquad r = f + f'' - (kg)' = -[2h + \Delta_2(h)] \cos\gamma > 0$$

und ihre Länge L drückt sich durch folgende Formeln vom MINKOWSKISCHEN

[1]) Eine ähnliche Situation ist auch bei den konvexen Gebilden. Es sei λ der Bogen des Einheitskreises in der Ebene ϱ. Ist $\chi = \chi(\lambda)$, $\lambda \in \langle 0, 2\pi)$, die Stützfunktion eines konvexen Bereiches $\mathcal{B} \in \varrho$, so gelten für den Inhalt F und die Länge L der Berandung des Bereiches $\mathcal{B}$ die Formeln von Minkowski (I) $L = \int \chi \,\mathrm{d}\lambda$, $2F = \int [\chi^2 - (\mathrm{d}\chi / \mathrm{d}\lambda)^2] \,\mathrm{d}\lambda$; beidesmal ist über den Einheitskreis zu integrieren. In dem dreidimensionalen Raume wählen wir auf der Einheitskugelfläche die geographischen Koordinaten $\lambda \in \langle 0, 2\pi)$, $\varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$; weiter sei $H = H(\lambda, \varphi)$ die Stützfunktion eines konvexen Körpers. Sein Integral der mittleren Krümmung M und seine Oberfläche sind wieder durch die Formeln von Minkowski gegeben: (II) $M = \int H \,\mathrm{d}\omega$, $2O = \int [2H^2 - - \Delta(H, H)] \,\mathrm{d}\omega$; in beiden Fällen integriert man über die Einheitskugelfläche, auf der $\mathrm{d}\omega$ das Flächenelement und Δ den ersten Differentialoperator von Beltrami bedeuten. Die Stützfunktion (III) $H(\lambda, \varphi) = \chi(\lambda) \cos\varphi$ ist die räumliche Stützfunktion des konvexen Bereiches $\mathcal{B}$ in der Äquatorebene ϱ der Einheitskugelfläche. Die formale Einsetzung aus (III) in (II) führt nach (I) zu diesen Ergebnissen: $2M = \pi L$, $O = 2F$. Ist $\chi = \chi(\lambda)$ die Stützfunktion einer Strecke mit der Länge δ in der Ebene ϱ, so ergibt sich nach formaler Einsetzung in erste Formel (I) und aus (III) in erste Formel (II), dass $L = 2\delta$, $M = \pi\delta$.

Typ aus (vgl. [1], S. 107, (*L*) und S. 109, (9) und [3], S. 202):

$$L = \int_0^a f\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\int_\Omega h\,\mathrm{d}\omega \tag{8}$$

(s. Abschn. 1). Die Funktion $f(\alpha)$ bedeutet die (in der Richtung des Vektors $-\mathbf{n}(\alpha)$ orientierte) Entfernung des Nullpunktes von der rektifizierenden Ebene $\varrho(\alpha)$ der Kurve K in ihrem Punkte mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}(\alpha)$; für eine ebene Kurve K mit der Länge $a = 2\pi$ des sphärischen Bildes Γ der Vektoren $\mathbf{t}(\alpha)$, d.h. für eine konvexe Kurve, ist deshalb $f(\alpha)$ die Stützfunktion von Minkowski. Der Vektor $k(\alpha)\,\mathbf{t}(\alpha) + \mathbf{b}(\alpha)$ bestimmt die Charakteristik der rektifizierenden Ebene $\varrho(\alpha)$ und $f(\alpha)$ wird mit $g(\alpha)$ durch die Beziehung (3b) gebunden.

Zum Schluss (Abschn. 4) sprechen wir noch die Forderung aus, dass das sphärische Bild Γ im Bezug auf den Nullpunkt symmetrisch ist und dass $f(\alpha) + f(\alpha + \frac{1}{2}a) \neq 0$ für alle α ist. Die Punkte mit den Ortsvektoren $\mathbf{x}(\alpha)$ und $\mathbf{x}(\alpha + \frac{1}{2}a)$ aus (6) benennen wir *die Gegenpunkte der Kurve K.* Die Entfernung der parallelen rektifizierenden Ebenen $\varrho(\alpha)$ und $\varrho(\alpha + \frac{1}{2}a)$ in den Gegenpunkten ist dann

$$B(\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha + \tfrac{1}{2}a) \tag{9}$$

und wir mögen sie für *die Breite der Kurve K* in der Richtung dieser rektifizierenden Ebenen halten. Aus der ersten Formel in (8) und aus (9) folgt sofort *die Formel* vom CAUCHYSCHEN *Typ* $L = \frac{1}{2}\int_0^a B(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$, *welche für eine Kurve K konstanter Breite*[2]) $B(\alpha) = B$ *eine Analogie der Formel von* BARBIER $L = \frac{1}{2}aB$ *liefert.*

In dem Abschn. 4 werden wir für die Kurven K konstanter Breite folgende Verallgemeinerungen der bekannten Eigenschaften der ebenen konvexen Kurven konstanter Breite beweisen: *Die Kurve K ist konstanter Breite B dann und nur dann, wenn für die Krümmungsradien* $r(\alpha)$ *und* $r(\alpha + \frac{1}{2}a)$ *in ihren Gegenpunkten folgende Beziehung gilt:*

$$r(\alpha) + r(\alpha + \tfrac{1}{2}a) = B - \tfrac{1}{2}B\left[k(\alpha)\int_\alpha^{\alpha + a/2} k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]'. \tag{10}$$

Die Relation $r(\alpha) + r(\alpha + \frac{1}{2}a) = B$ *charakterisiert unter den Kurven K konstanter Breite B die, welche eben sind. Die gegenseitige Lage der Gegenpunkte einer Kurve K konstanter Breite B ist folgendermassen bestimmt:*

$$\mathbf{x}(\alpha + \tfrac{1}{2}a) = \mathbf{x}(\alpha) + B\mathbf{n}(\alpha) + \tfrac{1}{2}B[k(\alpha)\,\mathbf{t}(\alpha) + \mathbf{b}(\alpha)]\int_\alpha^{\alpha + a/2} k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{11}$$

Wählen wir noch eine andere Kurve K^* mit dem sphärischen Tangentenbilde Γ^* und stellen wir voraus, dass entweder Γ^* und Γ identisch oder im Bezug auf den

---

[2]) Auf solche Weise definierte Kurve K konstanter Breite ist im Falle $k = 0$, d.h. wenn die Kurve K eben ist, eine *konvexe* Kurve konstanter Breite nur bei $a = 2\pi$, d.h. wenn diese Kurve eineindeutig auf den Einheitskreis abbildbar ist. Bei $a = (2m + 1) \,.\, 2\pi$, $m = 1, 2, \ldots$ bekommt man nichtkonvexe geschlossene ebene Kurven konstanter Breite.

Nullpunkt symmetrisch sind, so haben wir die Möglichkeit – besonders in Hinsicht auf die Ergebnisse des Abschn. 3 – für die Kurven K und K^* ähliche Sätze wie in [2] abzuleiten.

1. In dem Falle (a) umhüllen nach (1a), (3a), (4a) die Randgeraden der Streifen $\Lambda(\alpha)$, $\alpha \in \langle 0, a)$, zwei geschlossene Kurven K_i ($i = 1, 2$) mit der Parameterdarstellung $\boldsymbol{x}_i(\alpha) = \boldsymbol{r}(\alpha) + w_i(\alpha)\,\boldsymbol{t}(\alpha) - f_i(\alpha)\,\boldsymbol{n}(\alpha) - g_i(\alpha)\,\boldsymbol{b}(\alpha)$; s. auch (1,2) in [3] für $h(\alpha, \gamma)$ aus (1a). Ihre Krümmungsradien sind $r_i(\alpha) = k_1^{-1} + f_i + w_i' > 0$; die letzte Ungleichung folgt aus (5) und (1a). Für die Summe der Längen $L_i = \int_0^a r_i(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$ der Kurven K_i gilt danach $L_1 + L_2 = 2\int_C \mathrm{d}s + \int_0^a (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\alpha$. Gleichzeitig stellen wir nach (1) aus der Einleitung in [3] und nach (1a) mittels elementarer Integrationen fest, dass $\int_\Omega h\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\pi \int_0^a (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\alpha$. Zusammen also $\frac{1}{2}\pi(L_1 + L_2) = \pi \int_C \mathrm{d}s + {}$ $+ \int_\Omega h\,\mathrm{d}\omega$. Durch blosse Auslassung der Indizes bekommen wir die Ergebnisse betreffs des Falles (b).

Legen wir noch $k_1^{-1} = 0$, so gewinnen wir aus dem oberen Teile dieses Abschnittes – mit Bezug auf (4b) – auch die Formeln (6), (8) und die erste Formel (7). Die zweite Formel in (7) verifizieren wir durch direkte Einsetzungen, und zwar für $\Delta_2(h)$ nach (7) aus der Einleitung in [3] und für h und w nach (1b) und (4b).

2. In dem Falle (a) umhüllen die Streifen $\Lambda(\alpha)$ bei $\alpha \in \langle 0, a)$ die abwickelbare Fläche mit der Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{z}(\alpha, \lambda) = (1 - \lambda)\,[\boldsymbol{r}(\alpha) + w_1(\alpha)\,\boldsymbol{t}(\alpha) - f_1(\alpha)\,\boldsymbol{n}(\alpha) - g_1(\alpha)\,\boldsymbol{b}(\alpha)] + {}$$
$$+ \lambda[\boldsymbol{r}(\alpha) + w_2(\alpha)\,\boldsymbol{t}(\alpha) - f_2(\alpha)\,\boldsymbol{n}(\alpha) - g_2(\alpha)\,\boldsymbol{b}(\alpha)]\,, \quad \alpha \in \langle 0, a)\,, \quad \lambda \in \langle 0, 1\rangle$$

und nach (2a) gilt für die Diskriminante Δ der ersten Grundform dieser Fläche, dass $\Delta^{\frac{1}{2}} = \delta[(1 - \lambda)(k_1^{-1} + f_1 + w_1') + \lambda(k_1^{-1} + f_2 + w_2')] > 0$ (s. auch den Anfang des Abschn. 1). Durch die Integration im Bezug auf λ und durch die partielle Integration im Bezug auf α bekommen wir mit Rücksicht auf (2a), (3a) und (4a) für ihre Oberfläche, dass $P = \int_0^l \delta\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^a [(f_1 + f_2)\delta - (w_2^2 - w_1^2)\cos\beta]\,\mathrm{d}\alpha$. Gemäss (1a) und (2a) ist $\int_0^l L\,\mathrm{d}s = \int_0^l \int_0^{2\pi} h\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}s = 2\int_0^l \delta\,\mathrm{d}s$ und nach (1) und (6) aus der Einleitung in [3] und nach (1a), (2a) und (4a) ergibt sich nach längerer, aber anders elementarer Rechnung

$$\int_\Omega [h^2 - \tfrac{1}{2}\Delta_1(h, h)]\,\mathrm{d}\omega =$$
$$= -\int_0^a \int_{\beta-\pi/2}^{\beta+\pi/2} [(f_1 \cos\gamma + g_1 \sin\gamma)^2 - \tfrac{1}{2}(f_1 \sin\gamma - g_1 \cos\gamma)^2 - \tfrac{1}{2}w_1^2] \cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha -$$
$$- \int_0^a \int_{\beta+\pi/2}^{\beta+3\pi/2} [(f_2 \cos\gamma + g_2 \sin\gamma)^2 - \tfrac{1}{2}(f_2 \sin\gamma - g_2 \cos\gamma)^2 - \tfrac{1}{2}w_2^2] \cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha =$$
$$= \int_0^a [(f_1 + f_2)\,\delta - (w_2^2 - w_1^2)\cos\beta]\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Also zusammen $2P = \int_C L\,\mathrm{d}s + \int_\Omega [h^2 - \frac{1}{2}\Delta_1(h, h)]\,\mathrm{d}\omega$.

3. Wir bezeichnen mit $\mathbf{x}(\alpha)$ den in einem neuen Nullpunkte $\bar{O} \neq O$ gebundenen Ortsvektor des Punktes der Kurve K und für den Vektor $\mathbf{c} = \bar{O} - O$ setzen wir

$$(3{,}1) \qquad \mathbf{c} = (.)\, \mathbf{t}(\alpha) + F(\alpha)\, \mathbf{n}(\alpha) + G(\alpha)\, \mathbf{b}(\alpha)\,;$$

$F(\alpha)$ und $G(\alpha)$ sind dabei gewisse Funktionen von α und der Skalarfaktor $(.)$ interessiert uns nicht. Die Stützfunktion (1b) bezüglich des Nullpunktes O bzw. $\bar{O}$ ist (s. auch (6) dabei) $h(\alpha, \gamma) = \mathbf{x}(\alpha) \,.\, [\mathbf{n}(\alpha) \cos \gamma + \mathbf{b}(\alpha) \sin \gamma] = - f(\alpha) \cos \gamma - g(\alpha) \sin \gamma$ bzw. $\bar{h}(\alpha, \gamma) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha) [\mathbf{n}(\alpha) \cos \gamma + \mathbf{b}(\alpha) \sin \gamma] = - \bar{f}(\alpha) \cos \gamma - \bar{g}(\alpha) \,.\, \sin \gamma$, wo

$$(3{,}2) \qquad \bar{f} = f + F\,, \quad \bar{g} = g + G$$

und aus $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$ folgt

$$(3{,}3) \qquad kF + G' = 0\,, \quad F + F'' - (kG)' = 0\,.$$

Ähnlich wie in [2], Abschn. 1, kann man auch jetzt beweisen, dass auch umgekehrt die Transformation (3,2), wo F und G eine Lösung des Systems (3,3) darstellen, durch eine geeignete Translation des Nullpunktes realisierbar ist.

4. Bei der Symmetrie des sphärischen Bildes Γ im Bezug auf den Nullpunkt und bei $[\mathbf{tnb}] = 1$ für alle α ist dann

$$(4{,}1) \qquad \mathbf{t}(\alpha + \tfrac{1}{2}a) = - \mathbf{t}(\alpha),\ \mathbf{n}(\alpha + \tfrac{1}{2}a) = - \mathbf{n}(\alpha),\ \mathbf{b}(\alpha + \tfrac{1}{2}a) = \mathbf{b}(\alpha)\,;$$
$$k(\alpha + \tfrac{1}{2}a) = - k(\alpha)\,.$$

Für die Kurve K konstanter Breite B folgt nach (9) mit $B(\alpha) = B =$ konst., nach erster Formel in (7), nach letzter Gleichung in (4,1) und nach (3b), dass $r(\alpha) + r(\alpha + \frac{1}{2}a) = B + \{k(\alpha) [g(\alpha + \frac{1}{2}a) - g(\alpha)]\}'$ und $[g(\alpha + \frac{1}{2}a) - g(\alpha)]' = Bk(\alpha)$. Durch die Integration der zweiten Gleichung erhält man

$$(4{,}2) \qquad g(\alpha + \tfrac{1}{2}a) - g(\alpha) + \tfrac{1}{2}B \int_{\alpha}^{\alpha + a/2} k(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0$$

und nach dem Einsetzen in die erste Gleichung gewinnt man die Formel (10). — Gilt umgekehrt die Formel (10), so bekommt man wegen erster Gleichung in (7), wegen der Relation (3b) und letzter Relation in (4,1)

$$[f(\alpha + \tfrac{1}{2}a) + f(\alpha)] + [f(\alpha + \tfrac{1}{2}a) + f(\alpha)]'' + \{k(\alpha) [g(\alpha + \tfrac{1}{2}a) - g(\alpha)]\}' =$$
$$= B - \tfrac{1}{2}B[k(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha + a/2} k(\tau)\, \mathrm{d}\tau]'\,,$$
$$k(\alpha) [f(\alpha + \tfrac{1}{2}a) + f(\alpha)] - [g(\alpha + \tfrac{1}{2}a) - g(\alpha)]' = 0\,.$$

Deshalb ist $f(\alpha + \frac{1}{2}a) + f(\alpha) - B$ und negativ genommene linke Seite in (4,2) eine Lösung des Systems (3,3), und nach dem Abschn. 3 kann man einen neuen Nullpunkt so wählen, dass dann die Relation (9) mit $B(\alpha) = B =$ konst. gilt.

Verschwindet die Ableitung rechts in (10) für alle $\alpha \in \langle 0, a)$, so ist (*) $k(\alpha) \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+a/2} k(\tau)\, d\tau = 0$, weil nach der letzten Relation in (4,1) die Funktion $k(\alpha)$ auch den Wert 0 annimmt. Wenn für irgendein $\alpha \in \langle 0, a)$ die Funktion $k(\alpha) \neq 0$ wäre, so gäbe es aus den Stetigkeitsgründen ein solches Intervall $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, dass (**) $\alpha \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \Rightarrow k(\alpha) \neq 0$. Nach (*) und (**) ist also $0 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+a/2} k(\tau)\, d\tau = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} k(\tau)\, d\tau + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1+a/2} k(\tau)\, d\tau$ und $0 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1+a/2} k(\tau)\, d\tau = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1+a/2} k(\tau)\, d\tau + \int_{\alpha_1+a/2}^{\alpha_2+a/2} k(\tau)\, d\tau = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1+a/2} k(\tau)\, d\tau - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} k(\tau)\, d\tau$; zum Schluss haben wir die letzte Relation in (4,1) benutzt. Insgesamt $0 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} k(\tau)\, d\tau$; das ist aber im Widerspruch mit (**).

Aus (6), (4,1), aus (9) mit B = konst. und aus (4,2) ergibt sich sofort (11).

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, Berlin 1956.

[2] *L. Boček und Z. Nádeník:* Beitrag zur globalen Differentialgeometrie der Kurven im euklidischen Raume. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 209—213.

[3] *Z. Nádeník:* Über das Volumen des Körpers, dessen Randfläche die Enveloppe einer einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen ist. Čas. pro pěst. mat. *88* (1963), 200—208.

Výtah

O UZAVŘENÝCH PROSTOROVÝCH KŘIVKÁCH

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Příspěvek navazuje na [3]. Opěrná funkce je pro uzavřenou křivku definována jako orientovaná vzdálenost počátku od rektifikační roviny (tedy jinak než v [2]).

Резюме

О ЗАМКНУТЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Статья примыкает к [3]. Для замкнутой пространственной кривой определена опорная функция как ориентированное расстояние начала от спрямляющей плоскости (значит, иначе чем в [2]).