Časopis pro pěstování matematiky

Zbyněk Nádeník

Eine isoperimetrische Ungleichung für die Paare der Raumkurven

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 105 (1980), No. 4, 363--367

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108232`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

EINE ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNG FÜR DIE PAARE DER RAUMKURVEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 5. Mai 1978)

Es seien k und K zwei geschlossene einfache rektifizierbare Kurven, welche in derselben euklidischen Ebene liegen. Wir bezeichnen mit l und L ihre Längen und mit f und F die Flächeninhalte der durch k und K begrenzten Bereiche. Sind diese Bereiche konvex, so kann man ihren Minkowskischen gemischten Flächeninhalt M einführen. Es gilt bekanntlich $M^2 - fF \geqq 0$ mit der Gleichheit dann und nur dann, wenn k und K homothetisch sind (im Sinne aus [3], S. 12). Ist k der Einheitskreis, so reduziert sich diese Beziehung auf alte isoperimetrische Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0\,, \tag{1}$$

in der das Gleichheitszeichen nur beim Kreis eintritt.

Es seien $[x(s), y(s)]$ mit $s \in \langle 0, l \rangle$ (bzw. $[X(s), Y(s)]$ mit $S \in \langle 0, L \rangle$) die Orthogonalkoordinaten der Punkte von k (bzw. K); dabei ist s (bzw. S) der von einem Punkt $p \in k$ (bzw. $P \in K$) gemessene Bogen von k (bzw. K). Durch $s : S = l : L$ wird zwischen k und K eine bijektive Abbildung A definiert. Für die Bögen s und S der zugeordneten Punkte setzen wir

$$\tau = (2\pi/l)\, s = (2\pi/L)\, S \in \langle 0, 2\pi \rangle\,. \tag{2}$$

Das Funktional (stets $(\cdot)' = \mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{d}\tau$ und die Integration versteht sich im Lebesgueschen Sinne; vgl. den Anfang des Abschn. 3)

$$\Phi = \frac{1}{4}\left| \int_0^{2\pi} (xY' + Xy' - x'Y - X'y)\, \mathrm{d}\tau \right|, \tag{3}$$

welches sich für zusammenfallende Kurven k, K und identische Abbildung A auf f oder F reduziert, ist bewegungsinvariant und ändert sich nicht, wenn eine der Kurven k und K verschoben wird. Es hängt aber von der Wahl der Punkte p und P ab, von denen die Bögen s und S in der Abbildung A gemessen werden, und auch vom Sinn dieser Messung auf k und K. Es seien $q \in k$ und $Q \in K$ zwei in A zugeordnete Punkte. Wenn der Punkt

$$\lambda q + \Lambda Q = [\lambda\, x(\tau) + \Lambda\, X(\tau),\ \lambda\, y(\tau) + \Lambda\, Y(\tau)]$$

mit $\lambda, \Lambda = \text{konst.} \geqq 0, \lambda + \Lambda = 1$ für $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$ eine einfache Kurve erzeugt, so begrenzt diese den Bereich mit dem Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\{(\lambda x + \Lambda X)(\lambda y + \Lambda Y)' - (\lambda x + \Lambda X)'(\lambda y + \Lambda Y)\}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq$$
$$\leqq \lambda^2 f + 2\lambda\Lambda\Phi + \Lambda^2 F\,.$$

In diesem formalen Sinne ist Φ ein Seitenstück zum Minkowskischen gemischten Flächeninhalt M.

Für die Längen l und L der Kurven k und K und für ihr Funktional Φ gilt

$$\tfrac{1}{2}(l^2 + L^2) - 4\pi\Phi \geqq 0 \tag{4}$$

mit der Gleichheit genau dann, wenn k und K kongruente Kreise sind und die Abbildung A entweder die k in K überführende Verschiebung V ist oder aus V und der Symmetrie in bezug auf den Mittelpunkt eines der Kreise k, K besteht.

Diese Behauptung, welche sich aus dem nachfolgenden Satz (*) ergibt, liefert für $k \equiv K$ und für die identische Abbildung A die Ungleichung (1) einschliesslich der Gleichheitsbedingung.

Wir gehen zum dreidimensionalen euklidischen Raum über. Es seien wieder k und K zwei geschlossene rektifizierbare Kurven mit den Längen l und L und mit den Bögen s und S. Durch (2) definieren wir wiederum die Abbildung A und führen den Parameter τ ein. Es seien

$$\mathbf{x}(\tau), \mathbf{X}(\tau)\,; \quad \tau \in \langle 0, 2\pi \rangle \tag{5}$$

die Ortsvektoren der Punkte von k und K; zugrunde gelegt wird ein orthogonales Koordinatensystem.

Wir definieren das vektorielle Funktional $\boldsymbol{\Phi}$ durch

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\mathbf{x} \times \mathbf{X}' + \mathbf{X} \times \mathbf{x}')\,\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

(vgl. wieder den Anfang des Abschn. 3). Seine geometrische Bedeutung folgt aus der Bedeutung von Φ in (3).

(*) *Es sei* $\mathbf{c}$ *ein beliebiger fester Einheitsvektor mit nichtnegativen Koordinaten. Für die Längen* l *und* L *der Kurven* k *und* K *und für ihr vektorielles Funktional* $\boldsymbol{\Phi}$ *gilt die Ungleichung*

$$\tfrac{1}{2}(l^2 + L^2) - 4\pi\,\mathbf{c}\,.\,\boldsymbol{\Phi} \geqq 0\,; \tag{7}$$

das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn k, K *kongruente Kreise in den zum Vektor* $\mathbf{c}$ *orthogonalen Ebenen sind und die Abbildung* A *entweder die* k *und* K *identifizierende Verschiebung* V *ist oder aus* V *und der Symmetrie in bezug auf den Mittelpunkt eines der Kreise* k, K *besteht.*

Liegen die einfachen Kurven k und K in einer Ebene, nehmen wir diese für die durch das Verschwinden der dritten Orthogonalkoordinate bestimmte Koordinatenebene, und wählen wir den Vektor $\boldsymbol{c}$ orthogonal zu dieser Ebene, so ergibt sich aus $(*)$ die Ungleichung (4) einschliesslich der Gleichheitsbedingung.

Falls die Kurven k und K zusammenfallen und die Abbildung A identisch ist, so schreiben wir $\boldsymbol{F}$ statt $\boldsymbol{\Phi}$. Nach $(*)$ ist dann

$$L^2 - 4\pi\, \boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{F} \geqq 0 \tag{8}$$

mit der Gleichheit genau dann, wenn K ein Kreis in der zu $\boldsymbol{c}$ orthogonalen Ebene ist.

Es sei überdies die Kurve $k \equiv K$ eben und einfach. Wählen wir den Vektor $\boldsymbol{c}$ orthogonal zu ihrer Ebene, so ist $\boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{F} = F$ und aus (8) ergibt sich die ursprüngliche isoperimetrische Ungleichung (1).

Nach W. Blaschke und K. Leichtweiss ([1], S. 77) ist

$$L^2 - 4\pi|\boldsymbol{F}| \geqq 0\,. \tag{9}$$

L. Boček [2] hat diese Ungleichung in den n-dimensionalen Raum übertragen, indem er sie erstens auf Grund der Fourier-Reihen und zweitens sehr kurz auf Grund der Ungleichung von W. Wirtinger bewiesen hat. L. Boček [2] hat zugleich bemerkt, dass mit Rücksicht auf die Cauchysche Ungleichung $|\boldsymbol{F}| \geqq \boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{F}$ die Ungleichung (8) eine unmittelbare Folge von (9) ist.

Für das vierdimensionale Analogon zu (8), in dem $|\boldsymbol{c}| > 1$, siehe [4].

In den Abschn. 1 und 2 ist eine Ungleichung bewiesen, aus der in den Abschn. 3 und 4 der Satz $(*)$ hergeleitet ist.

1. Zu den Voraussetzungen, welche die Ortsvektoren (5) befriedigen, kehren wir erst im Abschn. 3 zurück. Zuerst beweisen wir diese Hilfsbehauptung:

Es seien

$$\boldsymbol{x}(\tau)\,, \quad \boldsymbol{X}(\tau) \tag{1,1}$$

zwei Vektoren, deren Koordinaten diese Eigenschaften haben: Sie sind für alle τ definiert; periodisch mit der Periode 2π; absolut stetig; ihre Ableitungen sind quadratisch integrierbar. Weiter sei $\boldsymbol{\alpha}$ ein beliebiger fester Einheitsvektor. Dann gilt die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{x}' \,.\, \boldsymbol{x}' \,d\tau + \int_0^{2\pi} \boldsymbol{X}' \,.\, \boldsymbol{X}' \,d\tau - \boldsymbol{\alpha} \,.\, \int_0^{2\pi} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{x}')\, d\tau \geqq 0\,. \tag{1,2}$$

Das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a} \cos\tau + \boldsymbol{a}^* \sin\tau\,, \quad \boldsymbol{X}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A} \cos\tau + \boldsymbol{A}^* \sin\tau\,; \tag{1,3}$$

hier sind $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^*$ konstante Vektoren, welche diesen Bedingungen unterworfen sind:

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}^*\,, \quad \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}\,, \tag{1,4}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{a} = 0\,, \qquad \boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{a}^* = 0\,. \tag{1,5}$$

Zum Beweis benutzen wir die Fourier-Reihen von (1,1):

$$(1,7)\qquad \boldsymbol{x}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{a}_j \cos j\tau + \boldsymbol{a}_j^* \sin j\tau)\,,$$

$$\boldsymbol{X}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{A}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{A}_j \cos j\tau + \boldsymbol{A}_j^* \sin j\tau)\,.$$

Aus der Periodizität folgt

$$\boldsymbol{x}'(\tau) \sim \sum_{j=1}^{\infty} j(\boldsymbol{a}_j^* \cos j\tau - \boldsymbol{a}_j \sin j\tau)\,, \quad \boldsymbol{X}'(\tau) \sim \sum_{j=1}^{\infty} j(\boldsymbol{A}_j^* \cos j\tau - \boldsymbol{A}_j \sin j\tau)\,.$$

Die Parsevalsche Gleichung liefert folglich diese Reihen für die Integrale in (1, 2):

$$(1,8)\quad \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{x}'|^2 \,\mathrm{d}\tau = \pi \sum_{j=1}^{\infty} j^2(|\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{a}_j^*|^2)\,, \quad \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{X}'|^2 \,\mathrm{d}\tau = \pi \sum_{j=1}^{\infty} j^2(|\boldsymbol{A}_j|^2 + |\boldsymbol{A}_j^*|^2)\,,$$

$$\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\tau = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} j(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{A}_j^* + \boldsymbol{A}_j \times \boldsymbol{a}_j^*)\,.$$

2. Nach (1,8) ist die durch π dividierte linke Seite in (1,2) gleich

$$(2,1)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}(j^2 - j)\,\{|\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{a}_j^*|^2 + |\boldsymbol{A}_j|^2 + |\boldsymbol{A}_j^*|^2\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} j\{|\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{a}_j^*|^2 + |\boldsymbol{A}_j|^2 + |\boldsymbol{A}_j^*|^2 - 2\boldsymbol{\alpha}\,.\,(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{A}_j^* + \boldsymbol{A}_j \times \boldsymbol{a}_j^*)\}\,.$$

Unter Zuhilfenahme der elementaren Regeln für das Skalar- und Vektorprodukt bestätigt man, dass der Ausdruck in den eckigen Klammern in der letzten Zeile in (2.1) auf diese Form gebracht werden kann:

$$(2.2)\qquad |\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}_j^*|^2 + |\boldsymbol{A}_j^* - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}_j|^2 + (\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{a}_j)^2 + (\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{a}_j^*)^2\,.$$

Indem wir so (2,1) — also bis auf den Faktor $1/\pi$ die linke Seite in (1,2) — als Summe von nichtnegativen Gliedern ausgedrückt haben, ist (1,2) bewiesen.

Nach (2,1) mit (2,2) gilt in (1,2) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$(2,3)\qquad \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{a}_j^* = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{A}_j^* = \boldsymbol{0} \quad (j = 2, 3, \ldots)$$

und wenn überdies noch — mit ausgelassenen Indizen 1 — die Beziehungen (1,4) und (1,5) gelten. Für (2,3) reduziert sich (1,7) — wieder mit weggelassenen Indizen 1 — auf (1,3).

3. Um den Beweis des Satzes (*) zu beendigen, kehren wir zu den Voraussetzungen über die Raumkurven aus der Einleitung zurück.

Es seien q_1 und q_2 zwei Punkte von k mit den Parametern $\tau_1, \tau_2 \in \langle 0, 2\pi)$ und mit den Bögen $s_1, s_2 \in \langle 0, l)$. Nach (2) gilt für eine der Orthogonalkoordinatenfunktionen von $\boldsymbol{x}(\tau)$ in (5)

$$|x(\tau_1) - x(\tau_2)| \leqq q_1 q_2 \leqq |s_1 - s_2| = (2\pi/l)\,|\tau_1 - \tau_2|\,,$$

so dass sie die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Folglich ist sie absolut stetig und besitzt fast überall die Ableitung $x'(\tau) = (\mathrm{d}x(\tau)/\mathrm{d}s)\,(l/2\pi)$.

Nach L. TONELLI (s. [5], S. 61) ist fast überall $|\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s| = 1$; also fast überall

$$\boldsymbol{x}' \,.\, \boldsymbol{x}' = (l/2\pi)^2\,, \quad \boldsymbol{X}' \,.\, \boldsymbol{X}' = (L/2\pi)^2\,. \tag{3,1}$$

Die vektoriellen Funktionen (5) erfüllen also die Voraussetzungen der Hilfsbehauptung aus dem Anfang des Abschn. 1.

Wir bezeichnen mit ε_i $(i = 1, 2, 3)$ Signum des Integrals aus der i-ten Koordinate von $\boldsymbol{\Phi}$ in (6). Zur i-ten Koordinate c_i von $\boldsymbol{c}$ wählen wir die Zahl α_i derart, dass $c_i = \varepsilon_i \alpha_i$. In Hinsicht auf (3,1) ist dann die durch π dividierte linke Seite in (7) gleich der linken Seite in (1,2). Aus (1,2) folgt also (7).

4. Es bleibt noch über die Gleichheit in (7) zu entscheiden. Nach dem Hilfssatz aus dem Abschn. 1 sind die Extremalkurven durch (1,3) mit (1,4) und (1,5) dargestellt.

Aus (1,4) folgt $\boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{A}^* = 0$, was zusammen mit (1,5) bedeutet, dass die Extremalkurven in den zum Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ orthogonalen Ebenen liegen.

Der Bogen s der durch (1,3) gegebenen Kurve k ist durch

$$s = \int_0^\tau (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{a} \sin^2 \tau - 2\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{a}^* \sin \tau \cos \tau + \boldsymbol{a}^* \,.\, \boldsymbol{a}^* \cos^2 \tau)^{1/2}\, \mathrm{d}\tau$$

gegeben. Nach (2) ist er dem Parameter $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$ proportionell; das ist genau dann der Fall, wenn $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}^*| > 0$, $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{a}^* = 0$; ähnlich ist $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*| > 0$, $\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{A}^* = 0$. Die durch (1,3) bestimmten Extremalkurven sind also Kreise.

Nach (1,5) ist $\boldsymbol{\alpha} = \varrho \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}^*$ mit $\varrho =$ konst. $\neq 0$, also $1 = |\varrho|\, |\boldsymbol{a}^*|^2$. Nach (1,4) ergibt sich folglich $\boldsymbol{A} = -\varrho(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}^*) \times \boldsymbol{a}^* = \varrho |\boldsymbol{a}^*|^2\, \boldsymbol{a}$, also $\boldsymbol{A} = (\operatorname{sign} \varrho)\, \boldsymbol{a}$. Ähnlich erhält man $\boldsymbol{A}^* = (\operatorname{sign} \varrho)\, \boldsymbol{a}^*$. Das bedeutet erstens, dass die Kreise k, K denselben Durchmesser haben; und zweitens, dass in (1,3) entweder $\boldsymbol{X}(\tau) - \boldsymbol{x}(\tau)$ oder $\boldsymbol{X}(\tau) + \boldsymbol{x}(\tau)$ ein fester Vektor ist. Daraus ergibt sich schon die in (*) angeführte Gleichheitsbedingung.

Literaturverzeichnis

[1] *W. Blaschke - K. Leichtweiss:* Elementare Differentialgeometrie. 5. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[2] *L. Boček:* Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone. Čas. pěst. mat. *104* (1979), 86—92.

[3] *H. Hadwiger:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.

[4] *Z. Nádeník:* Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 302—310.

[5] *L. Tonelli:* Fondamenti di calcolo delle variazioni. I. Bologna 1921.

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thákurova 7 (Stavební fakulta ČVUT).