František Nožička

Frenetovy formule pro světočáru v Minkowského mechanice

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 240--242

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108205`

Rozumíme-li pod *neuspořádanou podgrupou* v (G, R) takovou podgrupu $H \subset G$, že $H \cap R = \emptyset$ a pod P periodickou část grupy G, pak lze v jednom speciálním případě vyslovit důsledek věty 4.1.

4.2. *Nechť (G, R) je uspořádaná grupa, jejíž všechny neuspořádané podgrupy jsou obsaženy v P.*

a) *Když existuje prvek $a \in G$ takový, že ke každému $x \in G_\infty$ existuje celé číslo m a přirozená čísla p, n s vlastností $p(ma - nx) \in R$, pak existuje nenulový ai-funkcionál na (G, R).*

b) *Existuje-li na (G, R) nenulový ai-funkcionál, pak existuje prvek $a \in G_\infty$ takový, že k libovolnému prvku $x \in G$ existuje celé číslo m a přirozené číslo p s vlastností $p(ma - x) \in R$.*

František Šik, Brno

FRENETOVY FORMULE PRO SVĚTOČÁRU V MINKOWSKÉHO MECHANICE

(Referát o přednášce Františka Nožičky konané dne 3. října 1960 ve schůzi pořádané JČMF v Praze)

Hlavním výsledkem, o němž bylo v přednášce poreferováno, je odvození určitých rovnic pro světočáru v Minkowského čtyřrozměrném prostoru, které mají svou obdobu ve známých Frenetových formulích pro křivku ve čtyřrozměrném Riemannově prostoru.

Nechť

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,, \quad t \in \langle \underset{0}{t}, \underset{1}{t} \rangle$$

jsou pohybové rovnice hmotné partikule o klidové hmotě μ v daném Lorentzově systému $L(x, y, z, t)$ a nechť

$$x = x(\tau)\,, \quad y = y(\tau)\,, \quad z = z(\tau)\,, \quad t = t(\tau)$$

nebo stručněji

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau)\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

je popis příslušné světočáry v Minkowského čtyřrozměrném prostoru s indefinitním metrickým tensorem $g_{\alpha\beta}$, kde

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1\,, \quad g_{44} = -c^2\,, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta\,.$$

Parametr τ je tak zvaný „vlastní čas" hmotné partikule,

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \mathrm{d}t \quad \left(v^2 \equiv \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right).$$

Za předpokladu dostatečné hladkosti funkcí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ v uvažovaném intervalu platí pak v bodech světočáry (1) relace

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{1}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu}\underset{2}{i^\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{2}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i^\alpha} + \frac{Q}{\mu c^2}\underset{3}{i^\alpha},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{3}{i^\alpha} = -\frac{Q}{\mu c}\underset{2}{i^\alpha} + \frac{R}{\mu c}\underset{4}{i^\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{4}{i^\alpha} = -\frac{R}{\mu c}\underset{3}{i^\alpha},$$

kde $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}$ jsou vektory v bodech světočáry (1), které vyhovují podmínkám

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{1}{i^\beta} = -c^2, \quad g_{\alpha\beta}\underset{2}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta} = g_{\alpha\beta}\underset{3}{i^\alpha}\underset{3}{i^\beta} = g_{\alpha\beta}\underset{4}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} = 1,$$

$$g_{\alpha\beta}\underset{s}{i^\alpha}\underset{k}{i^\beta} = 0 \quad \text{pro} \quad s \neq k \quad (s, k \in 1, 2, 3, 4).$$

Přitom $\underset{1}{i^\alpha} \equiv \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau$ a vektor $\underset{2}{i^\alpha}$ má směr i orientaci vektoru $X^\alpha = \mu(\mathrm{d}^2x^\alpha/\mathrm{d}\tau^2)$, tj. vektoru Minkowského síly. Veličiny P, Q, R v rovnicích (2) jsou skaláry definované v bodech světočáry, pro které platí:

$$P = \mu\left(g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$Q = \frac{\mu^3 c}{P^2}\left[\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{pro } P \neq 0 \text{ a } Q = 0 \text{ pro } P = 0;$$

$$R = \frac{\mu^6 c^3 \vartheta}{Q^2 P^3}\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \\ \frac{\mathrm{d}^4x^1}{\mathrm{d}\tau^4} & \frac{\mathrm{d}^4x^2}{\mathrm{d}\tau^4} & \frac{\mathrm{d}^4x^3}{\mathrm{d}\tau^4} & \frac{\mathrm{d}^4x^4}{\mathrm{d}\tau^4} \end{vmatrix} \quad \text{pro } Q \neq 0$$

(kde ϑ je signum determinantu na pravé straně) a $R = 0$ pro $Q = 0$.

Skaláry P, Q, R jsou invariantní vůči obecným Lorentzovým transformacím a mají fysikální rozměr síly.

Na základě „Frenetových formulí" (2) lze snadno dospět k těmto výsledkům:

a) *Je-li* $P \equiv 0$ *podél dané světočáry, potom existuje takový inerciální systém, v němž je hmotná partikulè v klidu.*

b) *Je-li* $Q \equiv 0$ *podél dané světočáry, avšak* P *není identicky rovno nule, potom existuje takový inerciální systém, v němž hmotná partikule se pohybuje nerovnoměrně v přímce.*

c) *Je-li* $R \equiv 0$ *podél dané světočáry, avšak* Q *není identicky rovno nule, potom existuje takový inerciální systém, v němž hnotná partikule se pohybuje v rovinné křivce (nikoliv přímce).*

Tyto výsledky, které lze ostřeji formulovat jako nutné a postačující podmínky pro příslušný typ pohybu, podávají tedy určitou základní klasifikaci světočar v Minkowského mechanice.

Fr. Nožička, Praha