Václav Doležal

Über eine Klasse linearer Operatoren

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 200--232

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108197`

ÜBER EINE KLASSE LINEARER OPERATOREN

VÁCLAV DOLEŽAL, Praha

(Eingelangt am 9. Dezember 1959)

In diesem Artikel werden gewisse lineare Operatoren, welche auf dem Systeme der im Intervall $(-\infty, 0)$ verschwindenden Distributionen definiert sind, untersucht. Zuerst ist ein Produkt einer solchen Distribution mit der Funktion von zwei Veränderlichen definiert und seine Eigenschaften ermittelt. Auf Grund dieses Produkts sind dann die Operatoren und der Begriff ihrer Ordnung definiert. Ferner sind Sätze, welche die Eigenschaften der Operatorordnung behandeln, bewiesen. Insbesondere ist ein Satz über die Existenz des inversen Operators bewiesen, wobei zwei Konstruktionsverfahren angegeben sind. Zum Schluss wird auf die Anwendung der eingeführten Operatoren zur Lösung der Systeme von Integrodifferentialgleichungen mit glatten Koeffizienten hingewiesen.

Diese Arbeit ist der Untersuchung einer gewissen Klasse von linearen Operatoren gewidmet. Diese Operatoren, die auf dem System der im Intervall $(-\infty, 0)$ verschwindenden Schwartz'schen Distributionen definiert sind, sind insbesondere zur Lösung von Systemen der gewöhnlichen Integrodifferentialgleichungen mit glatten veränderlichen Koeffizienten geeignet. (Durch solche Systeme ist die Dynamik von linearen physikalischen Schaltungen beschrieben.)

Im ersten Teil des Artikels werden Hilfsbetrachtungen durchgeführt, im zweiten wird die eigene Problematik behandelt.

I. Es sei $\mathbf{E}$ die Menge aller reellen Zahlen. Es sei $\mathbf{D}_1$ das System aller Distributionen f, die in $(-\infty, 0)$ verschwinden. Das heisst, dass jede Distribution $f \in \mathbf{D}_1$ folgende Eigenschaft besitzt: für jedes $t_0 \in (-\infty, 0)$ existiert eine Umgebung I_{t_0}, dass für jede Funktion $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ bezeichnet das System aller reellen unbegrenzt differenzierbaren finiten Funktionen, vergl. [1]), die ausserhalb I_{t_0} verschwindet, $(f, \varphi) = 0$ ist.

Wir führen folgende Bezeichnung ein: wenn $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, so sei Q_φ die Menge aller t, für welche $\varphi(t) \neq 0$ ist, (Q_φ ist offenbar eine beschränkte offene Menge) und $\overline{Q}_\varphi$ sei die Abschliessung von Q_φ, die auch „Träger" von $\varphi(t)$ genannt wird.

Es sei noch $\tilde{\mathbf{D}}_1$ das System aller Distributionen f, die folgende Eigenschaft besitzen: wenn $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ und $\overline{Q}_\varphi \subset (-\infty, 0)$ ist, so ist $(f, \varphi) = 0$. Dann gilt folgender Satz:

Satz 1. $\mathbf{D}_1 = \tilde{\mathbf{D}}_1$. Zum Beweis ist folgendes Lemma erforderlich:

Lemma 1. *Es seien I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ beschränkte offene Intervalle; wenn die Funktion $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ ausserhalb der Menge $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ verschwindet, so existieren solche Funktionen $\varphi_i(t) \in \mathbf{K}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dass $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)$ ist, wobei jede $\varphi_i(t)$ ausserhalb I_i verschwindet.*

Beweis. Es sei $a < c < d < b$. Offenbar existiert eine solche im Intervall $(-\infty, \infty)$ unbegrenzt differenzierbare Funktion $\alpha(t)$, dass $\alpha(t) = 0$ für $t \leqq c$, $\alpha(t) = 1$ für $t \geqq d$ ist. Es sei jetzt $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, die ausserhalb (a, b) verschwindet; setzt man $\varphi_1(t) = (1 - \alpha(t))\varphi(t)$, $\varphi_2(t) = \alpha(t)\varphi(t)$, so ist $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbf{K}$, wobei $\varphi_1(t)$ ausserhalb (a, d), $\varphi_2(t)$ ausserhalb (c, b) verschwindet, und gleichzeitig gilt $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Beweis des Satzes 1: Offenbar gilt $\tilde{\mathbf{D}}_1 \subset \mathbf{D}_1$. Es sei umgekehrt $f \in \mathbf{D}_1$; wählt man $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, für welche $\overline{Q}_\varphi \subset (-\infty, 0)$ ist, so folgt aus dem Borel'schen Satze, dass $\overline{Q}_\varphi$ durch ein endliches Intervallsystem $I_1, I_2, \ldots, I_n$ bedeckt wird, wobei für jede $\tilde{\varphi}(t) \in \mathbf{K}$, die ausserhalb irgendeines Intervalls I_i verschwindet, $(f, \tilde{\varphi}) = 0$ gilt. Aus Lemma 1 und der Linearität des Funktionals folgt jedoch, dass dann $(f, \varphi) = 0$ gilt, das heisst dass $f \in \tilde{\mathbf{D}}_1$, w. z. b. w.

Im Weiteren wird folgender Satz erforderlich:

Satz 2. *Es sei $f \in \mathbf{D}_1$; dann gilt für jede $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, für welche $\overline{Q}_\varphi \subset (-\infty, 0\rangle$ ist, dass $(f, \varphi) = 0$ ist.*

Beweis. Es sei $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, für welche $\sup \overline{Q}_\varphi \leqq 0$ ist. Bildet man die Funktionenfolge $\varphi_n(t) = \varphi(t + 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$, so gilt offenbar $(\varphi - \varphi_n) \to 0$ in $\mathbf{K}$ (d. h. im Sinne des im $\mathbf{K}$ eingeführten Konvergenzbegriffs). Da für jedes $n \geqq 1$ $\sup \overline{Q}_{\varphi_n} < 0$ ist, folgt aus Satz 1 und aus der Stetigkeit des Funktionals f, dass $(f, \varphi) = 0$ ist, w. z. b. w.

Es sei $\mathbf{F}_1$ das System aller reellen Funktionen, die im $\langle 0, \infty)$ sämtliche Ableitungen besitzen. (Im Punkte $t = 0$ werden die rechtsseitigen Ableitungen verstanden.)

Es sei $\alpha(t) \in \mathbf{F}_1$. Fie Funktion $\bar{\alpha}(t)$ wird die Fortsetzung von $\alpha(t)$ genannt, falls $\bar{\alpha}(t)$ in $(-\infty, \infty)$ alle Ableitungen besitzt und $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$ für $t \in \langle 0, \infty)$ ist. Man kann beweisen, dass für jedes $\alpha(t) \in \mathbf{F}_1$ eine Forsetzung existiert. (Vergl. [2].)

Wenn jetzt $\alpha(t) \in \mathbf{F}_1, f \in \mathbf{D}_1$ ist, definieren wir das Produkt αf durch die Gleichung

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \bar{\alpha}\varphi) . \tag{1}$$

Von Satz 2 folgt, dass das Produkt αf eindeutig definiert ist.

Aus den eben ausgesprochenen Definitionen folgen unmittelbar folgende offensichtliche Behauptungen:

Satz 3. a) $\alpha(t) \in \mathbf{F}_1, f \in \mathbf{D}_1 \Rightarrow \alpha f \in \mathbf{D}_1$.

b) $f_n \in \mathbf{D}_1$; $n = 1, 2, \ldots$; $f_n \to f$; $\alpha(t) \in \mathbf{F}_1 \Rightarrow f \in \mathbf{D}_1$; $\alpha f_n \to \alpha f$.

c) $f, g \in \mathbf{D}_1; \alpha, \beta \in \mathbf{E} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathbf{D}_1$.

d) $f \in \mathbf{D}_1 \Rightarrow f' \in \mathbf{D}_1$.

Satz 4. *Es sei $f \in \mathbf{D}_1$, $\alpha(t) \in \mathbf{F}_1$; falls $\alpha(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ und $\alpha f = 0$ ist, so gilt $f = 0$.*

Der Beweis dieser Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass zu einer solchen Funktion $\alpha(t)$ eine Fortsetzung $\bar{\alpha}(t)$ existiert, für welche $\bar{\alpha}(t) \neq 0$ in $(-\infty, \infty)$ gilt.

Ferner gilt folgender Satz:

Satz 5. *Falls $f \in \mathbf{D}_1$ eine reguläre Distribution ist, so verschwindet $f(t)$ in $(-\infty, 0)$ fast überall.*

Beweis. Nach der Voraussetzung über f gibt es eine lokal integrable Funktion $f(t)$ derart, dass für jede Funktion $\varphi(t) \in \mathbf{K}$

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \tag{2}$$

gilt, wobei $(f, \varphi) = 0$ ist, falls $\overline{Q}_\varphi \subset (-\infty, 0)$ gilt. Es sei $a < b < 0$; bildet man die Funktion $\varphi_{ab}(t) \in \mathbf{K}$ in der Weise, dass $\overline{Q}_{\varphi_{ab}} = \langle a, b \rangle$ und $0 \leqq \varphi_{ab}(t) \leqq 1$ ist, dann gilt $(\varphi_{ab}(t))^{1/n} \to 1$ fast überall in (a, b). Setzt man für $\varphi(t)$ in Gl. (2) $(\varphi_{ab}(t))^{1/n}$ ein, so folgt hieraus, dass $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = 0$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Wir führen jetzt das Produkt der Distribution mit der Funktion von zwei Veränderlichen ein.

Es sei $\mathbf{F}_1^2$ das System aller reellen Funktionen $W(t, \tau)$, die im Quadrant $t, \tau \geqq 0$ definiert sind und dort alle partiellen Ableitungen besitzen. Offensichtlich gelten folgende triviale Behauptungen:

a) Wenn $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{E}$ ist, so gilt $\alpha_1 W_1(t, \tau) + \alpha_2 W_2(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$.

b) Wenn $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ ist, so gilt für alle ganzen $i, k \geqq 0$: $\dfrac{\partial^{i+k} W(t, \tau)}{\partial t^i \partial \tau^k} \in \mathbf{F}_1^2$; wenn ausserdem $a(t) \in \mathbf{F}_1$ ist, so gilt $a(t)\, W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, $W(t, \tau)\, a(\tau) \in \mathbf{F}_1^2$.

Die Funktion $\overline{W}(t, \tau)$ soll die Fortsetzung von $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ heissen, wenn $\overline{W}(t, \tau)$ in der ganzen Ebene $-\infty < t, \tau < \infty$ alle partiellen Ableitungen besitzt und wenn $\overline{W}(t, \tau) = W(t, \tau)$ für $t, \tau \geqq 0$ ist. (Die Fortsetzung existiert zu jeder Funktion $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, vergl. [2].)

Es sei $f \in \mathbf{D}_1$, $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; definieren wir das Funktional $[Wf]$ durch die Gleichung

$$([Wf], \varphi) = (f, \varphi_W), \tag{3}$$

wo

$$\varphi_W(t) = -\int_{-\infty}^{t} \overline{W}(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) . \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{4}$$

ist, wobei mit $\overline{W}(t, \tau)$ irgendeine Fortsetzung von $W(t, \tau)$ bezeichnet ist, und wo $\varphi_0(t) \in \mathbf{K}$, $\overline{Q}_{\varphi_0} \subset (-\infty, 0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$ ist. Dann besteht folgende Behauptung:

Satz 6. *Das Funktional $[Wf] \in \mathbf{D}_1$, ist von der Fortsetzung $\overline{W}(t, \tau)$ und der Funktion $\varphi_0(t)$ unabhängig, sofern $\overline{Q}_{\varphi_0} \subset (-\infty, 0)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$ gilt.*

Der Beweis wird in drei Schritten durchgeführt.

1. Man überzeugt sich leicht davon, dass $\varphi_W(t)$ nach Gl. (4) zur Menge $\mathbf{K}$ gehört. Offenbar ist $\varphi_W(t) = 0$ für $t \leqq \min [\inf \overline{Q}_\varphi, \inf \overline{Q}_{\varphi_0}]$ und für $t \geqq \xi = \max [\sup \overline{Q}_\varphi, \sup \overline{Q}_{\varphi_0}]$. Hieraus folgt gleichzeitig, dass die Schlussweise $\overline{Q}_\varphi \subset (-\infty, 0) \Rightarrow \overline{Q}_{\varphi_W} \subset$ $\subset (-\infty, 0)$ richtig ist. Da ferner aus Gl. (4) folgt, dass $\varphi_W(t)$ sämtliche Ableitungen besitzt, so gilt $\varphi_W(t) \in \mathbf{K}$.

2. Aus (4) folgt, dass die Zuordnung $\varphi(t) \to \varphi_W(t)$ bei festen $\overline{W}(t, \tau)$, $\varphi_0(t)$ additiv ist, d. h. dass für $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbf{K}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{E}$ gilt

(5) $$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)_W = \alpha_1(\varphi_1)_W + \alpha_2(\varphi_2)_W \, .$$

3. Schliesslich sieht man leicht ein, dass folgende Behauptung richtig ist: wenn $\varphi_n \to 0$ in $\mathbf{K}$ ist, so gilt $(\varphi_n)_W \to 0$ in $\mathbf{K}$. Wirklich, wenn alle Funktionen $\varphi_n(t)$ ausserhalb eines endlichen Intervalls $\langle t_1, t_2 \rangle$ verschwinden, so verschwinden alle $(\varphi_n(t))_W$ ausserhalb irgendeines festen Intervalls $\langle t_1^*, t_2^* \rangle$. Deriviert man k-mals die Gl. (4), so überzeugt man sich leicht, dass es reelle Zahlen $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ gibt, die nur von $t_1^*, t_2^*, \overline{W}(t, \tau), \varphi_0(t)$ abhängen, dass für alle t und alle ganzen $n \geqq 1$

(6) $$|[(\varphi_n(t))_W]^{(k)}| \leqq C_1\mu_n^{(1)} + C_2\mu_n^{(2)} + \ldots + C_{k-1}\mu_n^{(k-1)}$$

gilt, wo $\mu_n^{(i)} = \max\limits_{t \in \langle t_1, t_2 \rangle} |\varphi_n^{(i)}(t)|$ ist. Hieraus folgt, dass $(\varphi_n)_W \to 0$ in $\mathbf{K}$ gilt, so dass $[Wf] \in \mathbf{D}_1$.

Um zu beweisen, dass $[Wf]$ von der Auswahl der Fortsetzung $\overline{W}(t, \tau)$ und von $\varphi_0(t)$ unabhängig ist, lassen wir zuerst $\overline{W}(t, \tau)$ fest und wählen $\tilde{\varphi}_0(t) \in \mathbf{K}$, für welche $\overline{Q}_{\tilde{\varphi}_0} \subset (-\infty, 0)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_0(\tau)\, d\tau = 1$ ist, und bilden die Funktion

(7) $$\tilde{\varphi}_W(t) = -\int_{-\infty}^{t} \overline{W}(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau\right) . \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varphi}_0(\tau)\, d\tau \, .$$

Hieraus folgt

$$\varphi_W(t) - \tilde{\varphi}_W(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau\right) \psi(t) \, , \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^{t} (\varphi_0(\tau) - \tilde{\varphi}_0(\tau))\, d\tau \, ,$$

wo offenbar $\psi(z) \in \mathbf{K}$ ist, da $\psi(t) = 0$ für $t \geqq \zeta$, $\zeta = \max [\sup \overline{Q}_{\varphi_0}, \sup \overline{Q}_{\tilde{\varphi}_0}] < 0$ gilt, sodass $\overline{Q}_\psi \subset (-\infty, 0)$ ist. Laut Satz 1 gilt also

$$(f, \varphi_W) - (f, \tilde{\varphi}_W) = (f, \varphi_W - \tilde{\varphi}_W) = 0 \, .$$

Ganz analog beweist man mit Hilfe des Satzes 2, dass $[Wf]$ von der Auswahl der Fortsetzung $\overline{W}(t, \tau)$ unabhängig ist, womit Satz 6 bewiesen ist.

Um im Folgenden die Schreibweise zu vereinfachen, wird wegen der eben bewiesenen Eindeutigkeit der Strich, der die Fortsetzung bezeichnet, fortgelassen.

Betrachten wir jetzt den Fall, in welchem f regulär ist. Es gilt der folgende Satz.

Satz 7. *Es sei $f \in \mathbf{D}_1$ regulär, $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; dann ist $[Wf]$ ebenfalls regulär und ist fast überall gleich der Funktion*

$$\int_0^t W(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \, , \quad t \in (-\infty, \infty) \, .$$

Beweis. Laut Definition ist

$$
\tag{8} ([Wf], \varphi) = (f, \varphi_W) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi_W(t)\, \mathrm{d}t =
$$

$$
= \int_0^{\infty} f(t) \left\{ - \int_{-\infty}^{t} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) . \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right\} \mathrm{d}t\, .
$$

Da t im äusseren Integrale nur positive Werte durchläuft, so ist $\int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$, so dass sich

$$
\tag{9} ([Wf], \varphi) = \int_0^{\infty} f(t) \left(\int_t^{\infty} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t
$$

ergibt. Nach dem Satz von Fubini gilt jedoch

$$
\tag{10} ([Wf], \varphi) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\tau} W(\tau, t) f(t)\, \mathrm{d}t \right\} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, ,
$$

w. z. b. w.

Unmittelbar aus der Definition von $[Wf]$ ergeben sich folgende Behauptungen.

Satz 8. a) *Es sei* $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; $f, f_n \in \mathbf{D}_1$, $n = 1, 2, \ldots$; $f_n \to f$; *dann gilt* $[Wf_n] \to [Wf]$.

b) *Wenn* $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; $f, g \in \mathbf{D}_1$; $\alpha, \beta \in \mathbf{E}$ *ist, so gilt* $[W(\alpha f + \beta g)] = \alpha[Wf] + \beta[Wg]$.

c) *Es sei* $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; $f \in \mathbf{D}_1$; *dann gilt* $[(W_1 + W_2) f] = [W_1 f] + [W_2 f]$.

Ferner gilt

Satz 9. *Es sei* $a(t) \in \mathbf{F}_1$, $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2, f \in \mathbf{D}_1$; *dann gilt*

1. $a[Wf] = [(aW) f]$, *wo* $(aW)(t, \tau) = a(t)\, W(t, \tau)$ *ist,*
2. $[W(a f)] = [(Wa_\tau) f]$, *wo* $(Wa_\tau)(t, \tau) = W(t, \tau)\, a(\tau)$ *ist.*

Beweis. Es gilt $(a[Wf], \varphi) = ([Wf], a\varphi) = (f, (a\varphi)_W)$. Aber

$$
(a\varphi)_W = - \int_{-\infty}^{t} W(\tau, t)\, a(\tau)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau +
$$

$$
+ \left(\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, t)\, a(\tau)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) . \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = (\varphi)_{(aW)}\, ,
$$

w. z. b. w. Analog beweist man die Behauptung 2.

Wir führen jetzt folgende Bezeichnung ein: Es seien $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$. Wir definieren die Funktion $(W_1 \times W_2)(t, \tau)$ durch

$$
(W_1 \times W_2)(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} W_1(t, z)\, W_2(z, \tau)\, \mathrm{d}z\, , \quad t, \tau \geqq 0\, .
$$

Offenbar gilt $(W_1 \times W_2)(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$. Jetzt kann man folgenden Satz aussprechen:

Satz 10. *Es sei* $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; $f \in \mathbf{D}_1$; *dann gilt* $[W_1[W_2 f]] = [(W_1 \times W_2) f]$.

Beweis: Laut Definition ist

$$([W_1[W_2 f]], \varphi) = ([W_2 f], \varphi_{W_1}) = (f, (\varphi_{W_1})_{W_2}) .$$

Ferner gilt

$$(11) \qquad (\varphi_{W_1})_{W_2} = -\int_{-\infty}^{t} W_2(\tau, t) \left\{ -\int_{-\infty}^{\tau} W_1(u, \tau) \varphi(u) \, \mathrm{d}u + \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_1(u, \tau) \varphi(u) \, \mathrm{d}u \right) . \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_0(v) \, \mathrm{d}v \right\} \mathrm{d}\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_2(\tau, t) \left\{ -\int_{-\infty}^{\tau} W_1(u, \tau) \varphi(u) \, \mathrm{d}u + \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_1(u, \tau) \varphi(u) \, \mathrm{d}u \right) . \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_0(v) \, \mathrm{d}v \right\} \mathrm{d}\tau \right) . \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(v) \, \mathrm{d}v .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(u, \tau) \varphi(u) \, \mathrm{d}u , \quad \Phi_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(v) \, \mathrm{d}v ,$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{t} W_2(\tau, t) \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} W_1(u, \tau) \varphi(u) \, \mathrm{d}u \right\} \mathrm{d}\tau .$$

Nach dem Fubinischen Satz gilt

$$(12) \qquad I_1 = -\int_{-\infty}^{t} \left\{ \int_{t}^{u} W_1(u, \tau) \, W_2(\tau, t) \, \mathrm{d}\tau \right\} \varphi(u) \, \mathrm{d}u = -\int_{-\infty}^{t} (W_1 \times W_2)(u, t) \, \varphi(u) \, \mathrm{d}u .$$

Für das erste Integral der Gl. (11) gilt also

$$(13) \qquad I = -\int_{-\infty}^{t} (W_1 \times W_2)(u, t) \, \varphi(u) \, \mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{t} W_2(\tau, t) \, \Phi(\tau) \, \Phi_0(\tau) \, \mathrm{d}\tau .$$

Um das zweite Integral der Gl. (11), das die Grenzen $-\infty, \infty$ durchläuft, spalten zu können, wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass der Ausdruck in Klammern $\{\ldots\}$ für $\tau \geqq h = \max [\sup \overline{Q}_\varphi, 0]$ verschwindet. Die Grenze ∞ kann dann durch h ersetzt werden, so dass sich für den ersten Glied I_2 des zweiten Integrals der Gl. (11)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{h} W_2(\tau, t) \left\{ -\int_{-\infty}^{\tau} W_1(u, \tau) \varphi(u) \, \mathrm{d}u \right\} \mathrm{d}\tau$$

ergibt. Nach dem Fubinischen Satz folgt jedoch

$$I_2 = \int_{-\infty}^{h} \left(\int_{h}^{u} W_1(u, \tau)\, W_2(\tau, t)\, d\tau \right) \varphi(u)\, du = \tag{14}$$

$$= \int_{-\infty}^{h} \left(\int_{h}^{t} \ldots + \int_{t}^{u} \ldots \right) \varphi(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} (W_1 \times W_2)(u, t)\, \varphi(u)\, du +$$

$$+ \int_{-\infty}^{h} \left(\int_{h}^{t} W_1(u, \tau)\, W_2(\tau, t)\, d\tau \right) \varphi(u)\, du\,.$$

Das zweite Integral in Gl. (14) ist offenbar gleich dem Integral

$$\int_{h}^{t} W_2(\tau, t) \left(\int_{-\infty}^{h} W_1(u, \tau)\, \varphi(u)\, du \right) d\tau = \int_{h}^{t} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, d\tau\,. \tag{15}$$

Hieraus ergibt sich schliesslich, dass $(\varphi_{W_1})_{W_2} = \xi(t) + \psi(t)$ ist, wo

$$\xi(t) = -\int_{-\infty}^{t} (W_1 \times W_2)(u, t)\, \varphi(u)\, du + \tag{16}$$

$$+ \left(\int_{-\infty}^{\infty} (W_1 \times W_2)(u, t)\, \varphi(u)\, du \right) . \Phi_0(t)\,,$$

$$\psi(t) = -\int_{-\infty}^{t} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, \Phi_0(\tau)\, d\tau + \left(\int_{h}^{t} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, d\tau \right) \Phi_0(t) + \tag{17}$$

$$+ \left(\int_{-\infty}^{h} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, \Phi_0(\tau)\, d\tau \right) . \Phi_0(t)\,.$$

Offenbar gilt $\xi(t) = (\varphi)_{W_1 \times W_2}$ und folglich ist $\xi(t) \in \boldsymbol{K}$. Da aber $(\varphi_{W_1})_{W_2} \in \boldsymbol{K}$ ist, so folgt hievon, dass $\psi(t)$ als Differenz von zwei Funktionen aus $\boldsymbol{K}$ wieder zu $\boldsymbol{K}$ gehört.

Man überzeugt sich jetzt leicht, dass $\overline{Q}_\Psi \subset (-\infty, 0\rangle$ gilt. Wirklich, für $t \geqq 0$ gilt

$$\psi(t) = -\int_{-\infty}^{t} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, \Phi_0(\tau)\, d\tau + \int_{h}^{t} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{h} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, \Phi_0(\tau)\, d\tau = \int_{t}^{h} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, \Phi_0(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_{t}^{h} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, d\tau = \int_{t}^{h} W_2(\tau, t)\, \Phi(\tau)\, (\Phi_0(\tau) - 1)\, d\tau = 0\,,$$

da $\Phi_0(\tau) = 1$ für $\tau \geqq 0$ ist und sogar $h, t \geqq 0$ ist.

Laut Satz 2 gilt also

$$([W_1[W_2 f]], \varphi) = (f, \varphi_{W_1 \times W_2} + \psi) = (f, \varphi_{W_1 \times W_2}) = ([(W_1 \times W_2) f], \varphi)\,,$$

womit Satz 10 bewiesen ist.

Aus der Definition des „Produktes“ $W_1 \times W_2$ und aus dem Fubinischen Satze ergibt sich unmittelbar folgender Satz:

Satz 11. *Es seien* $W_1, W_2, W_3 \in \mathbf{F}_1^2$; *dann gilt*

$$W_1 \times (W_2 \times W_3) = (W_1 \times W_2) \times W_3 .$$

Wir definieren jetzt für $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ die „Potenz“ $W^{\times k}(t, \tau)$ durch die Gleichung

$$W^{\times k} = (W^{\times (k-1)}) \times W, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad W^{\times 1} = W. \tag{18}$$

Aus (18) und aus Satz 11 folgt

Satz 12. *Es seien* $W(\tau, t) \in \mathbf{F}_1^2$; $m, n \geqq 1$ *ganze Zahlen; dann gilt* $W^{\times n} \times W^{\times m} = W^{\times (n+m)}$.

Folgender Satz ist ersichtlich.

Satz 13. *Wenn* $W_1, W_2, W_3 \in \mathbf{F}_1^2$ *ist, so gilt*

$$W_1 \times (W_2 + W_3) = W_1 \times W_2 + W_1 \times W_3 .$$

Wir definieren jetzt die Funktionen $U_k(t, \tau)$ durch die Gleichung

$$U_k(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{k-1}}{(k-1)!}; \quad k = 2, 3, \ldots; \quad U_1(t, \tau) \equiv 1 . \tag{19}$$

Offenbar ist $U_k(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; man überzeugt sich leicht, dass für ganze Zahlen $k, r \geqq 1$ gilt

$$U_k \times U_r = U_{k+r} . \tag{20}$$

Wenn jetzt $f \in \mathbf{D}_1$ ist, definieren wir für $k = 1, 2, 3, \ldots$ das Symbol $f^{(-k)}$ durch die Gleichung

$$f^{(-k)} = [U_k f] . \tag{21}$$

Es seien $k, r \geqq 1$ ganze Zahlen; laut Gl. (21), (20) und Satz 10 gilt

$$(f^{(-k)})^{(-r)} = [U_r[U_k f]] = [(U_r \times U_k) f] = [U_{r+k} f] = f^{(-k-r)} . \tag{22}$$

Ferner gilt

Satz 14. *Wenn* $f \in \mathbf{D}_1$ *ist, so gilt* $(f')^{(-1)} = f$, $(f^{(-1)})' = f$.

Beweis. Laut Definition ist

$$((f')^{(-1)}, \varphi) = ([U_1 f'], \varphi) = (f', \varphi_{U_1}) = (f, -(\varphi_{U_1})') .$$

Weiter gilt

$$-(\varphi_{U_1})' = -\left\{-\int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau\right) \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau\right\}' =$$

$$= \varphi(t) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau\right) \varphi_0(t) .$$

Da aber $\overline{Q}_{\varphi_0} \subset (-\infty, 0)$ ist, bekommt man $((f')^{(-1)}, \varphi) = (f, \varphi)$. Ganz analog beweist man die zweite Gleichung des Satzes.

Wenn $k, r \geqq 1$ ganze Zahlen sind, so gilt für die Ableitung von $f \in \mathbf{D}_1$ die Gleichung $(f^{(k)})^{(r)} = f^{(k+r)}$. Definiert man also $f^{(0)} = f$, so können Satz 14 und Gl. (22) folgendermassen zusammengefasst werden:

Satz 15. *Es sei $f \in \mathbf{D}_1$, k, r ganze Zahlen; dann gilt* $(f^{(k)})^{(r)} = f^{(k+r)}$.

Aus den Sätzen 8,7 ergeben sich speziell für $f^{(-1)}$ unmittelbar folgende Behauptungen:

Satz 16. a) *Für $f_1, f_2 \in \mathbf{D}_1$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{E}$ gilt* $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)^{(-1)} = \alpha_1 f_1^{(-1)} + \alpha_2 f_2^{(-1)}$.

b) *Wenn $f_n \in \mathbf{D}_1$; $n = 1, 2, \ldots$ und $f_n \to f$ ist, so gilt* $f_n^{(-1)} \to f^{(-1)}$.

c) *Wenn $f \in \mathbf{D}_1$ regulär ist, so ist $f^{(-1)}$ regulär und fast überall gleich der Funktion* $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$.

Aus der Formel für die Ableitung des Produktes und aus dem Satze 14 ergibt sich die „Integrationsregel per-partes“:

Satz 17. *Es sei $a(t) \in \mathbf{F}_1, f \in \mathbf{D}_1$; wenn $a^{(-1)} = \int_0^t a(\tau)\,d\tau + C$ ist, wo C eine beliebige reelle Konstante ist, so gilt* $(af)^{(-1)} = a^{(-1)}f - (a^{(-1)}f')^{(-1)}$.

Folgender Satz wird zum Eindeutigkeitsbeweis erforderlich sein.

Satz 18. *Es seien $c_0, c_1, \ldots, c_n$ reelle Zahlen, $T \geqq 0$, $f \in \mathbf{D}_1$ reguläre Distribution. Wenn*

$$c_n\delta_T^{(n)} + c_{n-1}\delta_T^{(n-1)} + \ldots + c_0\delta_T + f = 0 \tag{23}$$

ist, so gilt $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0, f = 0$.

Beweis. Wenn

$$c\delta_T + f = 0 \tag{24}$$

gilt, wo c reell und f regulär ist, so sieht man leicht ein, dass dann $c = 0, f = 0$ ist. Tatsächlich, Gl. (24) besagt, dass für jedes $\varphi(t) \in \mathbf{K}$

$$c\varphi(T) + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = 0 \tag{25}$$

gilt. Bildet man die Funktion $\psi(t) \in \mathbf{K}$, welche ausserhalb $(T-1, T+1)$ verschwindet und die Bedingungen $0 < \psi(t) < 1$ für $t \in (T-1, T) \cup (T, T+1)$, $\psi(T) = 1$ erfüllt, und setzt man in (25) $\varphi(t) = (\psi(t))^n$; $n \geqq 1$ ein, so gilt offenbar

$$c = -\int_{T-1}^{T+1} f(\tau)(\psi(\tau))^n\,d\tau \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

Es sei jetzt die Gl. (23) erfüllt. Laut Satz 15 und 16 gilt dann

$$\begin{aligned}(c_n\delta_T^{(n)} + c_{n-1}\delta_T^{(n-1)} + \ldots + c_0\delta_T + f)^{(-n)} &= c_n\delta_T + c_{n-1}H_T + \ldots + \\ &+ \ldots + c_0H_T^{(-n+1)} + f^{(-n)} = 0\,,\end{aligned}$$

wo H_T regulär ist, $H_T(t) = 1$ für $t > T$, $H(t) = 0$ für $t \leqq T$. Aus der eben bewiesenen Behauptung folgt, dass $c_n = 0$ ist. Durch Wiederholung des Prozesses ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Wir betrachten jetzt den Fall, im welchen $W(t, \tau)$ entartet ist, d. h. wenn $W(t, \tau) = \sum_{i=1}^{r} a_i(t)\, b_i(\tau)$ ist. Für $a(t), b(t) \in \mathbf{F}_1$, $W(t, \tau) = a(t)\, b(\tau)$ gilt $([Wf], \varphi) = (f, \varphi_W) = (f, -\int_{-\infty}^{t} a(\tau)\, b(t)\, \varphi(\tau)\, d\tau + (\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\, b(t)\, \varphi(\tau)\, d\tau) \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau) = (bf, (a\varphi)_{U_1}) = ((bf)^{(-1)}, a\varphi) = (a(bf)^{(-1)}, \varphi)$. Laut Satz 8 gilt also

Satz 19. *Es sei* $a_i(t), b_i(t) \in \mathbf{F}_1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $W(t, \tau) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\, b_i(\tau)$; *dann gilt* $[Wf] = \sum_{i=1}^{r} a_i(b_i f)^{(-1)}$.

Führen wir jetzt folgende Bezeichnung ein: Wenn $H(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ ist, sei $H^* = H(t, t)$. Offenbar gilt $H^* \in \mathbf{F}_1$.

Jetzt gilt der folgende Satz:

Satz 20. *Es seien* $a(t) \in \mathbf{F}_1$, $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, $f \in \mathbf{D}_1$, $k \geqq 1$ *ganze Zahl; dann gilt*

$$(26) \qquad [W(af^{(k)})] = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i (Wa_\tau)}{\partial \tau^i}\right)^* f^{(k-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k (Wa_\tau)}{\partial \tau^k} f\right],$$

wo $Wa_\tau = W(t, \tau)\, a(\tau)$ *ist.*

Beweis. Laut Definition gilt $([Wf^{(k)}], \varphi) = (f^{(k)}, \varphi_W) = (f, (-1)^k (\varphi_W)^{(k)})$, wo

$$(27) \quad (\varphi_W)^{(k)} = \left\{-\int_{-\infty}^{t} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau\right) \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau\right\}^{(k)}$$

ist. Bezeichnet man $-I$ das erste, L das zweite Glied in Klammern der Gl. (27), so bekommt man

$$(28) \qquad I^{(k)} = (W^*\varphi)^{(k-1)} + \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)^* \varphi\right)^{(k-2)} + \ldots + \left(\frac{\partial^{k-1} W}{\partial \tau^{k-1}}\right)^* \varphi + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial^k W(\tau, t)}{\partial t^k} \varphi(\tau)\, d\tau\,.$$

Weiter gilt $L^{(k)} = (\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau)^{(k)} \cdot \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau + \Phi(t)$, wo $\Phi(t)$ eine bilineare Form in $\varphi_0, \varphi_0', \ldots, \varphi_0^{(k-1)}$ und in Ableitungen der Funktion $\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau$ darstellt, so dass $\overline{Q}_\Phi \subset (-\infty, 0)$ gilt. Da endlich

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau\right)^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k W(\tau, t)}{\partial t^k} \varphi(\tau)\, d\tau$$

gilt, bekommt man durch Einsetzen

$$(29) \quad ([Wf^{(k)}], \varphi) = \left(f, (-1)^k \left\{-(W^*\varphi)^{(k-1)} - \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)^* \varphi\right)^{(k-2)} - \ldots - \left(\frac{\partial^{k-1} W}{\partial \tau^{k-1}}\right)^* \varphi - \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial^k W(\tau, t)}{\partial t^k} \varphi(\tau)\, d\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k W(\tau, t)}{\partial t^k} \varphi(\tau)\, d\tau\right) \int_{-\infty}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau\right\}\right) =$$

$$= \left(W^* f^{(k-1)} - \left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)^* f^{(k-2)} + \ldots + (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial^{k-1} W}{\partial \tau^{k-1}}\right)^* f + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} f\right], \varphi \right).$$

Laut Satz 9 gilt jedoch $[W(af^{(k)})] = [(Wa_\tau) f^{(k)}]$, so dass aus Gl. (29) unmittelbar Gl. (26) folgt.

Ganz ähnlich beweist man

Satz 21. *Es sei* $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, $f \in \mathbf{D}_1$, $k \geqq 1$ *eine ganze Zahl; dann gilt*

$$[Wf]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^* f \right\}^{(k-i-1)} + \left[\frac{\partial^k W}{\partial t^k} f\right]. \tag{30}$$

Ferner wird folgender Satz erforderlich sein:

Satz 22. *Es sei* $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, $T \geqq 0$; *dann ist* $[W\delta_T]$ *regulär, fast überall gleich der Funktion* $w(t) = W(t, T)$ *für* $t > T$, $w(t) = 0$ *für* $t \leqq T$.

B e w e i s. Laut Definition gilt

$$([W\delta_T], \varphi) = (\delta_T, \varphi_W) = \varphi_W(T) = - \int_{-\infty}^{T} W(\tau, T)\, \varphi(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \left(\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, T)\, \varphi(\tau)\, d\tau \right) . 1 = \int_{T}^{\infty} W(\tau, T)\, \varphi(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau ,$$

w. z. b. w.

Wir widmen uns jetzt der Klassifikation der Distributionen aus $\mathbf{D}_1$ nach ihrer Ordnung.

Es sei $f \in \mathbf{D}_1$; die kleinste ganze Zahl n, für welche eine lokal integrable Funktion $F(t)$ existiert, dass $f^{(-n)} = F$ gilt, soll die Ordnung von f heissen, und wird mit Symbol $r(f)$ bezeichnet. (Offensichtlich verschwindet eine solche Funktion $F(t)$ in $(-\infty, 0)$ fast überall.) Wenn $f \in \mathbf{D}_1$ regulär ist, und die entsprechende Funktion $f(t)$ in $(-\infty, \infty)$ (im üblichen Sinne) unbeschränkt differenzierbar ist, wird $r(f) = -\infty$ gesetzt. (Man beachte, dass speziell $r(0) = -\infty$ ist.) Wenn für $f \in \mathbf{D}_1$ keine solche Zahl n existiert, heisst dies, dass f keine endliche Ordnung besitzt.

Das System aller Distributionen aus $\mathbf{D}_1$, welche die Ordnung besitzen, wird mit $\mathbf{D}_1^*$ bezeichnet.

Aus der eben ausgesprochenen Definition ist offensichtlich, dass folgende triviale Behauptung gilt:

Satz 23. *Es sei* $f(t)$ *eine Funktion, die im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *fast überall gleich der stetigen Funktion* $\tilde{f}(t)$ *ist, welche für* $t < 0$ *verschwindet;* $\tilde{f}(t)$ *habe überall in* $(-\infty, \infty)$ *die (gewöhnliche)* $(k-1)$*-te Ableitung* $f^{(k-1)}(t)$, *welche fast überall die Ableitung* $F(t)$ *besitzt, wobei* $F(t)$ *in* $(-\infty, \infty)$ *keine primitive Funktion darstellt; dann gilt* $r(f) = -k$.

Ganz klar ist auch folgender Satz:

Satz 24. *Es sei* $f \in \mathbf{D}_1^*$, $C \in \mathbf{E}$, $C \neq 0$, *und* k *sei eine ganze Zahl; dann gilt*
1. $r(Cf) = r(f)$, 2. $r(f^{(k)}) = k + r(f)$.
Weiter gilt

Satz 25. *Es sei* $f, g \in \mathbf{D}_1^*$; *dann ist* $f + g \in \mathbf{D}_1^*$ *und es gilt*
a) $r(f + g) = \max\,[r(f), r(g)]$ *falls* $r(f) \neq r(g)$ *ist*,
b) $r(f + g) \leqq r(f)$ *falls* $r(f) = r(g)$ *ist*.
(Man beachte, dass aus der Behauptung a) folgt: Wenn $r(f) \neq r(g) \Rightarrow f + g \neq 0$.)

Beweis. Es sei $r(f) = n$, $r(g) = m$, $F^{(n)} = f$, $G^{(m)} = g$, und es gelte $n > m$. Dann ist $f + g = (F + G^{(m-n)})^{(n)}$. Es ist klar, dass die Voraussetzung über die Existenz einer lokal integrablen Funktion $H(t)$, für welche $\int_0^t H(\tau)\,d\tau = F(t) + G^{(m-n)}(t)$ wäre, zum Widerspruch führt. Folglich ist n für $f + g$ die kleinste mögliche Zahl, woraus die Behauptung a) folgt. Für b) braucht das offenbar nicht der Fall zu sein, und desshalb kann die Ordnung von $f + g$ kleiner als n sein.

Satz 26. *Es sei* $f \in \mathbf{D}_1^*$, $\alpha(t) \in \mathbf{F}_1$; *dann gilt* $r(\alpha f) \leqq r(f)$. *Wenn ausserdem* $\alpha(t) \neq 0$ *in* $\langle 0, \infty)$ *ist, so gilt* $r(\alpha f) = r(f)$.

Zum Beweis wird folgendes Lemma angewendet:

Lemma 2. *Es sei* $a(t) \in \mathbf{F}_1$, $f \in \mathbf{D}_1$, $n \geqq 0$ *eine ganze Zahl; dann gilt*

$$af^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (a^{(i)} f)^{(n-i)}. \tag{31}$$

Beweis. Für $n = 0, 1$ ist (31) offenbar richtig. Aus der Gültigkeit von (31) für irgendeine Zahl $n > 0$ und alle a, f folgt durch Derivieren

$$a' f^{(n)} + a f^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (a^{(i)} f)^{(n-i+1)}. \tag{32}$$

Setzt man in (31) a' anstatt a, und subtrahiert die so enstandene Gleichung von (32), so ergibt sich Gleichung (31) für $n + 1$, womit das Lemma bewiesen ist.

Beweis des Satzes 26. Es sei also $r(f) = n$, $f = F^{(n)}$ und es gelte $n \geqq 0$. Laut Lemma 2 gilt

$$af = \alpha F^{(n)} = (\alpha F)^{(n)} - \binom{n}{1} (\alpha' F)^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n \alpha^{(n)} F. \tag{33}$$

Beachtet man die Tatsache, dass die Funktion $\alpha^{(k)}(t)\,F(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ eine primitive sein kann, so folgt aus Gl. (33), dass jede Distribution $(\alpha^{(k)} F)^{(n-k)}$ die Ordnung höchstenst $n - k$ besitzt. Aus dem Satze 25 ergibt sich die erste Behauptung des Satzes 26.

Es sei jetzt $\alpha(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$. Man sieht leicht ein, dass dann αF keine primitive Funktion ist. Setzt man nämlich im Gegenteil voraus, dass eine lokal integrable Funktion $H(t)$ existiert, für welche $\alpha(t)\,F(t) = \int_0^t H(\tau)\,d\tau$ gilt, so ergibt sich, dass $\int_0^t N(\tau)\,d\tau = F(t)$ gilt, wo $N(t) = (\alpha(t)\,H(t) - \alpha'(t)\,H^{(-1)}(t))/\alpha^2(t)$ gesetzt wurde, was einen Widerspruch darstellt. Hieraus folgt, dass $(\alpha F)^{(n)}$ die Ordnung n besitzt, und da die Ordnungen der anderen Glieder der rechten Seite von (33) höchstens $n - 1$ sind, gilt laut Satz 25, dass $r(\alpha F^{(n)}) = r(\alpha f) = n$, womit der Satz 26 für $n \geqq 0$ bewiesen ist.

Es sei nun $n = -k < 0, f = F^{(-k)}$. Laut Satz 15 kann man

$$\alpha f = \alpha F^{(-k)} = (\alpha F)^{(-k)} + \binom{k}{1}(\alpha' F^{(-1)})^{(-k)} + \binom{k}{2}(\alpha'' F^{(-2)})^{(-k)} + \ldots + (\alpha^{(k)} F^{(-k)})^{(-k)}$$

schreiben, woraus durch ähnliche Überlegung der Beweis folgt.

Um die Ordnung von $[Wf]$ untersuchen zu können, wird folgende Bezeichnung eingeführt:

Die Funktion $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ besitzt die Ordnung $-n$ soll heissen, dass eine ganze Zahl $n \geqq 1$ derart existiert, dass in $\langle 0, \infty)$

$$W^* \equiv \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^* \equiv \ldots \equiv \left(\frac{\partial^{n-2} W}{\partial t^{n-2}}\right)^* \equiv 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^{n-1} W}{\partial t^{n-1}}\right)^* \neq 0 \tag{34}$$

gilt. Wenn es keine solche Zahl n gibt, so wird der Funktion $W(t, \tau)$ keine Ordnung zugeordnet.

Im Weiteren wird folgendes Lemma erforderlich:

Lemma 3. *Es sei $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, $k \geqq 1$ eine ganze Zahl; dann gilt*

$$\left(\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k}\right)^* = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^{*(k-i)}, \tag{35}$$

$$\left(\frac{\partial^k W}{\partial t^k}\right)^* = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^{*(k-i)}.$$

Bemerkung. Man beachte, dass beispielsweise das Symbol $\left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^{*(k-i)}$ die Operation $\frac{\mathrm{d}^{k-i}}{\mathrm{d}t^{k-i}} \left\{ \left(\frac{\partial^i W(t, \tau)}{\partial t^i}\right)_{\tau = t} \right\}$ bedeutet.

Der Beweis ist analog dem Beweise von Lemma 2; man muss allerdings die Tatsache in Erwägung ziehen, dass $W(t, \tau)$ alle vollständigen Differentiale besitzt und infolge dessen alle ihre gemischten partiellen Ableitungen vertauschbar sind.

Eine triviale Folgerung vom Lemma 3 ist:

Satz 27. *Es sei $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$. Notwendig und hinreichend dafür, dass $W(t, \tau)$ die Ordnung $-n$ besitze, ist das Bestehen von folgenden Gleichungen*

$$W^* \equiv \left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)^* \equiv \ldots \equiv \left(\frac{\partial^{n-2} W}{\partial \tau^{n-2}}\right)^* \equiv 0, \quad \left(\frac{\partial^{n-1} W}{\partial \tau^{n-1}}\right)^* \neq 0 \quad \textit{in } \langle 0, \infty).$$

Weiter gilt:

Satz 28. a) *Es habe $W_1(t, \tau), W_2(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ die Ordnung $-n_1$, bzw. $-n_2$; wenn $n_1 \neq n_2$, so besitzt $W_1 + W_2$ die Ordnung* $\max[-n_1, -n_2]$.

b) *Wenn* $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ *die Ordnung* $-n$ *besitzt und* $\alpha \in \mathbf{E}$, $\alpha \neq 0$ *ist, so besitzt* αW *die Ordnung* $-n$.

Der Beweis ist offensichlich. Wichtig ist folgender Satz:

Satz 29. *Es habe* $W_1, W_2 \in \mathbf{F}_1^2$ *die Ordnung* $-n_1$, *bzw.* $-n_2$; dann *besitzt* $W_1 \times W_2$ *die Ordnung* $-(n_1 + n_2)$.

Beweis. Nach Definition gilt

$$M = (W_1 \times W_2)(t, \tau) = \int_\tau^t W_1(t, z)\, W_2(z, \tau)\, dz\,.$$

Offenbar ist $M^* \equiv 0$. Für eine beliebige ganze Zahl $k > 0$ gilt

$$\frac{\partial^k M}{\partial t^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left(W_1^* W_2\right) + \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}}\left(\left(\frac{\partial W_1}{\partial t}\right)^* W_2\right) + \ldots + \left(\frac{\partial^{k-1} W_1}{\partial t^{k-1}}\right)^* W_2 + \int_\tau^t \frac{\partial^k W_1(t, z)}{\partial t^k}\, W_2(z, \tau)\, dz\,. \tag{36}$$

Es sei zuerst $k \leqq n_1 + n_2 - 2$. Vor Allem ist klar, dass in der Gl. (36) alle Glieder verschwinden, in welchen $\left(\frac{\partial^i W_1}{\partial t^i}\right)^*$ für $i \leqq n_1 - 2$ auftritt. Folglich ist $\left(\frac{\partial^k M}{\partial t^k}\right)^* \equiv 0$, falls $k \leqq n_1 - 2$ ist. Für $n_1 - 2 < k \leqq n_1 + n_2 - 2$ bekommt man aus (36):

$$\left(\frac{\partial^k M}{\partial t^k}\right)^* = \left\{\frac{\partial^{k-n_1}}{\partial t^{k-n_1}}\left(\left(\frac{\partial^{n_1-1} W_1}{\partial t^{n_1-1}}\right)^* W_2\right) + \frac{\partial^{k-n_1-1}}{\partial t^{k-n_1-1}}\left(\left(\frac{\partial^{n_1} W_1}{\partial t^{n_1}}\right)^* W_2\right) + \ldots + \left(\frac{\partial^{k-1} W_1}{\partial t^{k-1}}\right)^* W_2\right\}^*. \tag{37}$$

Führt man die Ableitung $\frac{\partial^{k-n_1-i}}{\partial t^{k-n_1-i}}\left(\left(\frac{\partial^{n_1+i-1} W_1}{\partial t^{n_1+i-1}}\right)^* W_2\right)$ durch, so tritt offenbar in dem so gewonnenen Ausdruck die Funktion W_2 höchstens in der $k - n_1 - i$-ten Ableitung auf. Da in (37) das betrachte Glied für $i = 0, 1, \ldots, k - n_1$ vorkommt, so tritt dort W_2 höchstens in $k - n_1$-ter Ableitung, also nach obiger Voraussetzung über k höchstens in der $n_2 - 2$-ten Ableitung auf. Setzt man endlich $\tau = t$ ein, so verschwinden alle Glieder.

Es gilt also

$$\left(\frac{\partial^k M}{\partial t^k}\right)^* \equiv 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n_1 + n_2 - 2\,. \tag{38}$$

Weiter gilt

$$\left(\frac{\partial^{n_1+n_2-1} M}{\partial t^{n_1+n_2-1}}\right)^* = \left\{\frac{\partial^{n_2-1}}{\partial t^{n_2-1}}\left(\left(\frac{\partial^{n_1-1} W_1}{\partial t^{n_1-1}}\right)^* W_2\right) + \frac{\partial^{n_2-2}}{\partial t^{n_2-2}}\left(\left(\frac{\partial^{n_1} W_1}{\partial t^{n_1}}\right)^* W_2\right) + \ldots + \left(\frac{\partial^{n_1+n_2-2} W_1}{\partial t^{n_1+n_2-2}}\right)^* W_2\right\}^*. \tag{39}$$

Durch ähnliche Überlegung bekommt man schliesslich, dass

$$\left(\frac{\partial^{n_1+n_2-1}M}{\partial t^{n_1+n_2-1}}\right)^* = \left(\frac{\partial^{n_1-1}W_1}{\partial t^{n_1-1}}\right)^* \cdot \left(\frac{\partial^{n_2-1}W_2}{\partial t^{n_2-1}}\right)^* \neq 0 \quad \text{im Intervall} \quad \langle 0, \infty)$$

gilt, was gemeinsam mit (38) den Satz beweist.

Jetzt kann folgender Satz ausgesprochen werden:

Satz 30. *Es sei* $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, $f \in \mathbf{D}_1^*$; *dann gilt*

$$r([Wf]) \leqq r(f) - 1 . \tag{40}$$

Wenn ausserdem $W(t, \tau)$ *die Ordnung* $-n$ *besitzt, so gilt*

$$r([Wf]) = r(f) - n . \tag{41}$$

Beweis. Es sei $r(f) = k$, $f = F^{(k)}$. Betrachten wir zuerst den Fall $k = 0$. Laut Satz 7 ist dann $[Wf]$ regulär und fast überall gleich der Funktion $\Phi(t) = \int_0^t W(t, \tau) . F(\tau) \, d\tau$. Offenbar $\Phi(t)$ ist die primitive Funktion zu

$$\Phi_1(t) = W(t, t) F(t) + \int_0^t \frac{\partial W(t, \tau)}{\partial t} F(\tau) \, d\tau ,$$

sodass (40) gilt. Wenn jetzt $W(t, \tau)$ die Ordnung $-n$ besitzt, so ist klar, dass $\Phi(t)$ eine absolut stetige Ableitung $\Phi^{(n-1)}(t)$ besitzt, welche die primitive Funktion zu

$$\Phi_n(t) = \left(\frac{\partial^{n-1}W}{\partial t^{n-1}}\right)^* F(t) + \int_0^t \frac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial t^n} F(\tau) \, d\tau \tag{42}$$

darstellt.

Man überzeugt sich leicht, dass $\Phi_n(t)$ keine primitive Funktion darstellt; wenn das nämlich nicht der Fall wäre, dann wäre $\psi(t) = \left(\frac{\partial^{n-1}W}{\partial t^{n-1}}\right)^* F(t)$ eine primitive Funktion, d. h. es wäre $r(\psi) < 0$; da aber $\left(\frac{\partial^{n-1}W}{\partial t^{n-1}}\right) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ ist, so gilt laut Satz 26, dass $r(\psi) = r(F) = 0$ ist, was einen Widerspruch bildet. Hieraus folgt, dass $r([Wf]) = -n$ ist und (41) gilt.

Es sei jetzt $k > 0$. Laut Satz 20 gilt dann

$$[Wf] = [WF^{(k)}] = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* F^{(k-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} F\right]. \tag{43}$$

Nach Satz 26 ist

$$r\left(\left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* F^{(k-i-1)}\right) \leqq r(F^{(k-i-1)}) = k - i - 1 \leqq k - 1$$

für $i = 0, 1, \ldots, k - 1$. Nach der vorigen Überlegung gilt gleichzeitig $r\left(\left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} F\right]\right) \leqq$ $\leqq -1$, so dass laut Satz 25 $r([Wf]) \leqq k - 1$ ist, und somit (40) gilt. Es habe jetzt W die Ordnung $-n$. Wir betrachten zuerst den Fall, im welchen $n \leqq k$ ist. Dann beginnt die Entwicklung (43) mit dem Glied $(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial^{n-1}W}{\partial\tau^{n-1}}\right)^* F^{(k-n)}$, (Folgerung des Satzes 27), wobei nach Satz 26 dieses Glied die Ordnung $k-n$ besitzt. Die folgenden Glieder der Entwicklung (43) besitzen Ordnungen, die höchstens $k-n-1$ gleich sind. Laut Satz 25 ist also $r([Wf]) = k-n$ und (41) gilt.

Es sei jetzt $n > k$; dann ist $[Wf] = (-1)^k\left[\frac{\partial^k W}{\partial\tau^k} F\right]$, so dass $[Wf]$ regulär ist und fast überall gleich

$$\xi(t) = (-1)^k \int_0^t \frac{\partial^k W(t,\tau)}{\partial\tau^k} F(\tau)\,d\tau\,.$$

Wieder überzeugt man sich leicht, dass $\xi(t)$ die $n-k-1$-te Ableitung besitzt, welche die primitive Funktion zu

$$\xi_{n-k}(t) = (-1)^k\left(\frac{\partial^{n-1}W}{\partial\tau^{n-1}}\right)^* F(t) + (-1)^k \int_0^t \frac{\partial^n W(t,\tau)}{\partial\tau^n} F(\tau)\,d\tau$$

ist. Auf gleiche Weise sieht man leicht ein, dass $\xi_{n-k}(t)$ keine primitive Funktion darstellt, sodass $r([Wf]) = k-n$ ist und somit (41) gilt.

Es bleibt noch übrig, denn Fall $k < 0$ zu ermitteln. Setzt man $-k = l$, so kann man $f = F^{(-l)} = [U_l F]$ schreiben, wo $U_l(t,\tau)$ durch die Gl. (19) definiert ist. Es ist klar, dass U_l die Ordnung $-l$ besitzt. Es gilt also $[Wf] = [W[U_l F]] = [(W \times U_l) F]$, so dass $[Wf]$ regulär und fast überall gleich $w(t) = \int_0^t \tilde{W}(t,\tau)\,.$ $.\,F(\tau)\,d\tau$ ist, wo

$$\tilde{W}(t,\tau) = (W \times U_l)(t,\tau) = \int_\tau^t W(t,z)\frac{(z-\tau)^{l-1}}{(l-1)!}\,dz \tag{44}$$

gesetzt wurde. Aus (44) folgt, dass

$$\tilde{W}^* \equiv \left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\tau}\right)^* \equiv \ldots \equiv \left(\frac{\partial^{l-1}\tilde{W}}{\partial\tau^{l-1}}\right)^* \equiv 0\,, \quad \left(\frac{\partial^l\tilde{W}}{\partial\tau^l}\right)^* = (-1)^l\, W(t,t)$$

sit, also dass (nach Lemma 3) dieselben Gleichungen für die partiellen Ableitungen nach t gelten. Das heisst jedoch, dass $w(t)$ eine absolut stetige l-te Ableitung besitzt, welche die primitive Funktion zu

$$w_{l+1}(t) = (-1)^l\, W(t,t)\, F(t) + \int_0^t \frac{\partial^{l+1}\tilde{W}(t,\tau)}{\partial t^{l+1}} F(\tau)\,d\tau$$

ist, so dass $r([Wf]) \leqq -l-1 = k-1$ und somit (40) gilt.

Wenn schliesslich $W(t,\tau)$ die Ordnung $-n$ besitzt, so besitzt $W \times U_l$ laut Satz 29 die Ordnung $-n-l$; da schon früher bewiesen wurde, dass für $r(f) = 0$ die Ordnung von $[Wf]$ gleich der Ordnung von W ist, so gilt in unserem Falle $r([Wf]) = r([(W \times U_l) F]) = -n-l = k-n$, sodass (41) gilt. Damit ist Satz 30 bewiesen.

Für die Inversion der Operatoren wird später folgender Satz wichtig sein:

Satz 31. *Es sei* $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; *dann existiert eine einzige für* $t, \tau \geqq 0$ *stetige Funktion* $H(t, \tau)$, *welche die Gleichung*

$$(45) \qquad H(t, \tau) + W(t, \tau) + \int_\tau^t H(t, z)\, W(z, \tau)\, dz = 0\,, \quad t, \tau \geqq 0\,,$$

erfüllt. Ausserdem gilt:

$$(46) \quad \text{a)} \quad H(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (W(t, \tau))^{\times i}\,, \quad (W(t, \tau))^{\times 1} = W(t, \tau)\,, \quad t, \tau \geqq 0\,,$$

wobei die Reihe (46) *in jedem Quadrat* $0 \leqq t, \tau \leqq T < \infty$ *gleichmässig konvergiert.*

b) $H(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$. c) *Für* $t, \tau \geqq 0$ *gilt die Gleichung*

$$(47) \qquad H(t, \tau) + W(t, \tau) + \int_\tau^t W(t, z)\, H(z, \tau)\, dz = 0\,.$$

Beweis. Wir definieren die Funktionenfolge $H_k(t, \tau)$ durch die Gleichung

$$(48) \qquad H_k(t, \tau) = -\int_\tau^t H_{k-1}(t, z)\, W(z, \tau)\, dz - W(t, \tau)\,; \quad t, \tau \geqq 0\,;$$
$$k = 2, 3, \ldots\,; \quad H_1(t, \tau) = -W(t, \tau)\,.$$

Man überzeugt sich leicht mit Hilfe von Satz 12, dass

$$(49) \qquad H_n(t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (W(t, \tau))^{\times i}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gilt. Wählt man jetzt $T > 0$, so sieht man leicht ein, dass die Reihe (46) im Quadrate $0 \leqq t, \tau \leqq T$ gleichmässig konvergiert; wirklich, auf Grund des Satzes 11 bestätigt man durch einfache Rechnung, dass für $(W(t, \tau))^{\times n}$ die Abschätzung

$$(50) \qquad |(W(t, \tau))^{\times n}| \leqq \frac{M^n |t - \tau|^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t, \tau \leqq T, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gilt, wo $M = \max\limits_{0 \leqq t, \tau \leqq T} |W(t, \tau)|$ ist, woraus schon die Behauptung folgt.

Es sei $H(t, \tau)$ die Summe der Reihe (46); infolge der gleichmässigen Konvergenz ist $H(t, \tau)$ stetig, und daneben ergibt sich durch Grenzübergang in Gl. (48) die Gl. (45), sodass $H(t, \tau)$ die gesuchte Lösung bildet.

Um die Eindeutigkeit zu beweisen, setzen wir voraus, dass im Quadrant $t, \tau \geqq 0$ eine stetige Funktion $\tilde{H}(t, \tau)$ existiert, welche die Gl. (45) erfüllt. Setzt man $Q(t, \tau) = H(t, \tau) - \tilde{H}(t, \tau)$ und bezeichnet man $N = \max\limits_{0 \leqq t, \tau \leqq T} |Q(t, \tau)|$, so überzeugt man sich auf ähnliche Weise davon, dass für alle ganzen $n \geqq 1$ die Abschätzung $|Q(t, \tau)| \leqq M^n N |t - \tau|^n / n!$ gilt, woraus $Q(t, \tau) \equiv 0$ folgt und die Unizität bewiesen ist.

Um die Behauptung c) des Satzes 31 zu beweisen, bilden wir das Integral

$$I = \int_\tau^t W(t, z)\, H(z, \tau)\, dz = \int_\tau^t W(t, z) \left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (W(z, \tau))^{\times i} \right) dz\,.$$

Infolge der gleichmässigen Konvergenz der Reihe (46) und der Behauptung des Satzes 12 gilt

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \int_{\tau}^{t} W(t,\tau)(W(z,\tau))^{\times i} \, dz = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (W(t,\tau))^{\times (i+1)} =$$
$$= -H(t,\tau) - W(t,\tau),$$

was allerdings die Gl. (47) darstellt.

Es bleibt noch übrig, die Behauptung c) zu beweisen. Durch formales Derivieren der Gleichungen (45) und (47) überzeugt man sich leicht davon, dass folgende Behauptung gilt:

Wenn die Funktion $H(t,\tau)$ für $t, \tau \geqq 0$ alle partiellen Ableitungen der Ordnungen $\leqq p$ besitzt und diese stetig sind, so besitzt $H(t,\tau)$ für $t, \tau \geqq 0$ alle partiellen Ableitungen von der Ordnung $p + 1$, die ebenfalls stetig sind.

Hieraus folgt, dass $H(t,\tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ ist, womit der Satz 31 vollkommen bewiesen ist.

Widmen wir jetzt einige Zeilen dem Zusammenhang zwischen den angegebenen Tatsachen und der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen, was später brauchbar sein wird.

Es seien $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ in $\langle 0, \infty)$ stetige reelle Funktionen, wobei $a_n(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ ist. Das Funktionensystem $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ soll das Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung

$$a_n(t)\, x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, x = 0 \tag{51}$$

heissen, wenn

1. jede Funktion $\xi_i(t)$ in $\langle 0, \infty)$ die n-te Ableitung besitzt und dort überall die Gl. (51) erfüllt,

2. die Funktionen $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ in $\langle 0, \infty)$ linear unabhängig sind.

Es ist wohlbekannt, dass dann die Wronski'sche Determinante des Systems $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ in $\langle 0, \infty)$ von Null verschieden ist.

Es ist klar, dass im Falle $a_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$, $i = 0, 1, \ldots, n$ auch $\xi_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt.

Es sei jetzt $a_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$; $i = 0, 1, \ldots, n$; $f \in \boldsymbol{D}_1$. Die Distribution x soll die Lösung der Gleichung

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = f \tag{52}$$

„bei verschwindenden Anfangsbedingungen" heissen, wenn $x \in \boldsymbol{D}_1$ ist und (52) erfüllt. (Es sei bemerkt, dass die eben ausgesprochene Definition nur von Hilfscharakter ist, da später der Begriff der Lösung für allgemeinere Fälle ausgesprochen wird.) Dann gilt folgender Satz:

Satz 32. *Es sei* $a_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_n(t) \neq 0$ *im Intervall* $\langle 0, \infty)$, $f \in \boldsymbol{D}_1$;

für die Lösung x der Gl. (52) *bei verschwindenden Anfangsbedingungen gilt dann* $x = [Wf]$, *wo*

$$(53) \qquad W(t, \tau) = \frac{1}{a_n(\tau)\, w(\tau)} \begin{vmatrix} \xi_1(\tau), & \xi_2(\tau), & \ldots, & \xi_n(\tau) \\ \xi_1'(\tau), & \xi_2'(\tau), & \ldots, & \xi_n'(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{(n-2)}(\tau), & \xi_2^{(n-2)}(\tau), & \ldots, & \xi_n^{(n-2)}(\tau) \\ \xi_1(t), & \xi_2(t), & \ldots, & \xi_n(t) \end{vmatrix}$$

ist, wobei mit $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *das Fundamentalsystem der entsprechenden homogenen Gleichung* (51), *mit* $w(t)$ *die zugehörige Wronski'sche Determinante bezeichnet ist. Ausserdem gilt*: 1. $W(t, \tau)$ *besitzt die Ordnung* $-n$, 2. x *ist die einzige Lösung der Gl.* (52).

Der Beweis wird hier nur angedeutet, da er der wohlbekannten Lagrange'schen Methode der „Konstantenvariation" analog ist. Definiert man die Distributionen $g_i \in \mathbf{D}_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ durch das Gleichungssystem

$$(54) \qquad \xi_1^{(i)} g_1' + \xi_2^{(i)} g_2' + \ldots + \xi_n^{(i)} g_n' = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, n-2\,,$$

$$\xi_1^{(n-1)} g_1' + \xi_2^{(n-1)} g_2' + \ldots + \xi_n^{(n-1)} g_n' = \frac{1}{a_n} f\,,$$

so überzeugt man sich leicht davon, dass $x = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \ldots + \xi_n g_n$ die Lösung der Gl. (52) bildet; infolge der Bedingung $w(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ besitzt (54) immer eine einzige Lösung; drückt man die einzelnen g_i' durch die Subdeterminanten der Wronski'schen Determinante aus und macht man von dem Satze 19 Gebrauch, so bekommt man unmittelbar die Gl. (53). Die Behauptung 1. folgt augenblicklich aus der Ordnungsdefinition und der Determinantenform (53). Die Unizität der Lösung von (52) ist eine offensichtliche Folgerung der Sätze 25., 26.

II. Wenden wir jetzt die Aufmerksamkeit der Einführung von Operatoren zu. Zuerst werden einige allgemeine Eigenschaften betrachtet und dann wird die beabsichtigte Operatorenklasse eingeführt.

Es sei $\Omega \subset \mathbf{D}_1$, $\Omega \neq \emptyset$. Die Menge Ω soll Bereich heissen, wenn für jedes $x, y \in \Omega$; $\alpha, \beta \in \mathbf{E}$; $\alpha x + \beta y \in \Omega$ ist.

Es sei Ω_A ein Bereich; die Abbildung A der Menge Ω_A in die Menge $\mathbf{D}_1$ wird Operator genannt. Der Operator A soll linear heissen, wenn für beliebige $x, y \in \Omega_A$ und α, $\beta \in \mathbf{E}$ die Gleichung $A(\alpha x + \beta y) = \alpha(Ax) + \beta(Ay)$ gilt.

Die Menge Ω_A wird Originalbereich, die Menge ${}_A\Omega$, die aus allen Elementen Ax, $x \in \Omega_A$ gebildet ist, Bildbereich genannt. (Anstatt „Ω_A ist Originalbereich von A" wird auch die Aussage „A ist auf Ω_A erklärt" benützt).

Offenbar gilt, dass das Bildbereich eines linearen Operators ein Bereich ist.

Es seien A, B Operatoren; die Gleichheit $A = B$ soll bedeuten, dass $\Omega_A = \Omega_B$, und $Ax = Bx$ für jedes $x \in \Omega_A$ ist. Hieraus folgt, dass ${}_A\Omega = {}_B\Omega$ ist.

Der Operator A wird Nulloperator genannt und mit dem Symbol 0 bezeichnet, wenn für jedes $x \in \Omega_A$, $Ax = 0$ ist. Ähnlich wird A Einheitsoperator genannt und mit I bezeichnet, wenn $Ix = x$ für jedes $x \in \Omega_A$ ist.

Sei A ein Operator, $\lambda \in \mathbf{E}$. Der Operator λA wird auf Ω_A durch die Gleichung $(\lambda A)\, x = \lambda(Ax)$ erklärt. Es ist klar, dass für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{E}$ folgende Behauptungen gelten: $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)\, A$; $1 \,.\, A = A$.

Der Operator $(-1)\, A$ wird einfachkeitshalber $-A$ bezeichnet. Da im Weiteren ausschliesslich lineare Operatoren betrachtet werden, wird der Ausdruck „Operator“ einen linearen Operator bezeichnen.

Es seien A, B Operatoren, die dasselbe Originalbereich Ω_A haben. Die Summe $A + B$ wird durch $(A + B)\, x = Ax + Bx$ auf Ω_A erklärt.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass für Operatoren $A, B, C, 0$, die ein gemeinsames Originalbereich Ω_A besitzen, folgende Gleichungen bestehen

$$A + B = B + A\,, \quad (A + B) + C = A + (B + C)\,;$$
$$A + 0 = A\,, \quad A - A = 0\,;$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B\,, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{E}\,.$$

Es sei B auf Ω_B, A auf Ω_A erklärt, wobei sei $\Omega_A \supset {}_B\Omega$; das Produkt AB sei durch $(AB)\, x = A(Bx)$ auf Ω_B erklärt.

Für $\lambda \in \mathbf{E}$ gilt offenbar $\lambda(AB) = (\lambda A)\, B$. Wenn A ein Operator, I der auf ${}_A\Omega$ erklärte Einheitsoperator ist, so gilt $IA = A$. Analog, wenn mit $\bar{I}$ der auf Ω_A erklärte Einheitsoperator bezeichnet ist, so gilt $A\bar{I} = A$.

Es seien jetzt A, B, C Operatoren; dann gelten folgende offensichtliche Behauptungen:

1. ${}_C\Omega \subset \Omega_B$, ${}_B\Omega \subset \Omega_A \Rightarrow A(BC) = (AB)\, C$.
2. $\Omega_A = \Omega_B = {}_C\Omega \Rightarrow (A + B)\, C = AC + BC$.
3. $\Omega_B = \Omega_C$, $\Omega_A \supset {}_{B+C}\Omega$, $\Omega_A \supset {}_B\Omega$, $\Omega_A \supset {}_C\Omega \Rightarrow A(B + C) = AB + AC$.

Wenn für irgendeinen Operator A ${}_A\Omega \subset \Omega_A$ ist, so definiert man die Potenz A^n auf Ω_A durch $A^n = AA^{n-1}$, $A^1 = A$, $n = 2, 3, \ldots$ Offenbar gilt für ganze Zahlen $n, m \geqq 1$, dass $A^n A^m = A^{n+m}$ ist.

Führen wir jetzt den Begriff des inversen Operators ein. Der Operator $A \neq 0$ soll schwach regulär heissen, wenn ein auf ${}_A\Omega$ erklärter Operator A^{-1} existiert, dass $A^{-1}(Ax) = x$ für jedes $x \in \Omega_A$ ist, d. h. dass $A^{-1}A = I$ auf Ω_A ist. Dann gilt folgender Satz:

Satz 33. *Wenn A schwach regulär ist, so gilt*

a) $AA^{-1} = I$ auf ${}_A\Omega$, b) A^{-1} *ist linear und schwach regulär.*

Beweis. Es ist leicht einzusehen, dass dann die durch A vermittelte Abbildung von Ω_A auf ${}_A\Omega$ schlicht ist. Wählt man $y \in {}_A\Omega$ und bezeichnet man $x = A^{-1}y$, so ist $y = Ax$, woraus $y = A(A^{-1}y)$ folgt; laut Definition ist das gleichbedeutend der Gleichung $AA^{-1} = I$ auf ${}_A\Omega$, womit a) bewiesen ist. b): wählt man $y_1, y_2 \in \Omega$ und bildet man $x = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha A^{-1}y_1 - \beta A^{-1}y_2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{E}$, so folgt aus der Linearität von A:

$$Ax = A(A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)) - A(\alpha A^{-1}y_1) - A(\beta A^{-1}y_2) =$$
$$= \alpha y_1 + \beta y_2 - \alpha A(A^{-1}y_1) - \beta A(A^{-1}y_2) = 0 .$$

Hieraus folgt $A^{-1}Ax = x = A^{-1}0 = 0$, womit der Satz bewiesen ist. Weiter gilt

Satz 34. *Der Operator A ist dann und nur dann schwach regulär, wenn die Gleichung $Ax = 0$ die einzige Lösung $x = 0$ besitzt.*

Der Beweis der Notwendigkeit ist trivial; um die Hinlänglichkeit zu beweisen, beachte man, dass jede Gleichung $Ax = y$, $y \in {}_A\Omega$ eine einzige Lösung besitzt. Wirklich, wenn für irgendein $\tilde{x} \neq x$, $A\tilde{x} = y$ wäre, so würde infolge der Linearität von A die Gleichung $A(x - \tilde{x}) = 0$ bestehen, was mit der Voraussetzung einen Widerspruch bildet. Ordnet man also jedem $y \in {}_A\Omega$ die entsprechende Lösung x von $Ax = y$ zu, ist damit auf ${}_A\Omega$ ein Operator definiert, der laut Satz 33 linear ist, w. z. b. w.

Der Operator A soll auf Ω_A regulär heissen, wenn A schwach regulär ist und ${}_A\Omega = \Omega_A$ ist. Für einen solchen Operator A folgt dann aus Satz 33, dass $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ auf Ω_A gilt, und insbesondere dass die Gleichung $Ax = y$ für jedes $y \in \Omega_A$ eine einzige Lösung besitzt.

Aus der Tatsache, dass schwach reguläre Operatoren schlichte Abbildungen vermitteln, ergibt sich sofort folgende Behauptung:

Satz 35. *Es sei ${}_B\Omega \subset \Omega_A$, A, B seien schwach regulär; dann ist AB schwach regulär und auf ${}_{AB}\Omega$ gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Wir führen noch die Stetigkeit ein; der Operator A soll im Punkte $x_0 \in \Omega_A$ stetig heissen, wenn für jede Folge $x_n \in \Omega_A$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_n \to x_0$, $Ax_n \to Ax_0$ gilt.

Aus der Linearität von A folgt unmittelbar, dass dann A in jedem Punkte $x \in \Omega_A$ stetig ist, sodass ein solcher Operator kürzlich als stetiger bezeichnet wird.

Eine triviale Folgerung der Definition der Stetigkeit stellt folgender Satz dar.

Satz 36. *Es seien A, B stetig; wenn*

a) $\Omega_A = \Omega_B$ *ist, so ist $A + B$ stetig*; b) ${}_B\Omega \subset \Omega_A$ *ist, so ist AB stetig.*

Wir führen jetzt die beabsichtigte Operatorenklasse ein.

Es sei $\mathfrak{A}$ das System aller Operatoren A, welche auf $\mathbf{D}_1$ durch die Gleichung

$$Ax = [Wx]^{(k)} \tag{55}$$

erklärt sind, wo $k \geqq 0$ eine ganze Zahl und $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ ist.

Es sei $\mathfrak{A}^*$ das System aller Operatoren A, welche auf $\mathbf{D}_1$ durch die Gl. (55) erklärt sind, wobei $k \geqq 0$ eine ganze Zahl ist und $W(t, \tau)$ die Ordnung besitzt. Ist $-q$ die Ordnung von $W(t, \tau)$, so soll die Zahl $k - q$ die Ordnung des Operators A heissen, und wird mit $r(A)$ bezeichnet.

Es ist klar, dass $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ und dass jeder Operator $A \in \mathfrak{A}$ linear ist. (Folgerung aus Satz 8.)

Jetzt soll bewiesen werden, dass die Ordnung des Operators eindeutig definiert ist. Der Operator wurde nämlich als gewisse Abbildung definiert, woraus allerdings keineswegs folgt, dass durch $A \in \mathfrak{A}$ die Funktion $W(t, \tau)$ und die Zahl k eindeutig bestimmt sind.

Bemerkung. Man beachte noch folgende Tatsache: es sei $h > 0$ und die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t) \in \mathbf{F}_1$ seien durch

$$\alpha(t) = \exp\frac{1}{t-h} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < h\,; \qquad \beta(t) = \exp\frac{1}{h-t} \quad \text{für} \quad t > h$$
$$ = 0 \quad \text{für} \quad t \geqq h\,; \qquad\qquad = 0 \quad \text{für} \quad t \leqq h$$

definiert. Setzt man $W(t, \tau) = \alpha(t)\,\beta(\tau)$, so gilt $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; definiert man jetzt auf $\mathbf{D}_1$ den Operator $N \in \mathfrak{A}$ durch $Nx = [Wx]$, so sieht man leicht ein, dass $N = 0$ ist, obwohl $W(t, \tau) \not\equiv 0$ ist.

Es sei also $A \in \mathfrak{A}^*$ durch (55) definiert und es existiere noch die Funktion $\tilde{W}(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, welche die Ordnung $-r$ besitzt, und die ganze Zahl $l \geqq 0$ derart, dass

$$Ax = [\tilde{W}x]^{(l)}\,, \quad x \in \mathbf{D}_1 \tag{56}$$

gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setze man voraus, dass $l \geqq k$ ist. Für jedes $x \in \mathbf{D}_1$ gilt also $[\tilde{W}x]^{(l)} - [Wx]^{(k)} = ([\tilde{W}x] - [Wx]^{(k-l)})^{(l)} = 0$, woraus laut Satz 15 $[\tilde{W}x] - [Wx]^{(k-l)} = 0$ folgt. Aber $[Wx]^{(k-l)} = [Ux]$, wo $U = W$ falls $k = l$ ist, $U = U_{l-k} \times W$ falls $l > k$ ist. Laut Satz 29 gilt dann, dass U die Ordnung $-q-l+k$ besitzt. Setzt man zur Abkürzung $V = \tilde{W} - U$, so gilt offenbar $V \in \mathbf{F}_1^2$ und $[Vx] = 0$ für alle $x \in \mathbf{D}_1$.

Wählt man jetzt die ganze Zahl $n > 0$, so bekommt man laut Satz 21:

$$[Vx]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{\left(\frac{\partial^i V}{\partial t^i}\right)^* x\right\}^{(n-i-1)} + \left[\frac{\partial^n V}{\partial t^n}\, x\right] = 0\,. \tag{57}$$

Setzt man in (57) $x = \delta_T$, $T \geqq 0$ ein, so ist die Distribution $v = \left[\frac{\partial^n V}{\partial t^n}\, \delta_T\right]$ laut Satz 22 regulär, und es ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{\left(\frac{\partial^i V}{\partial t^i}\right)^*\right\}_{t=T} . \, \delta_T^{(n-i-1)} + v = 0\,. \tag{58}$$

Aus der Gl. (58) mit Hilfe des Satzes 18 folgt jedoch, dass $\left\{\left(\frac{\partial^i V}{\partial t^i}\right)^*\right\}_{t=T} = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ist. Da n sowie T beliebig gewählt wurde, so folgt hieraus, dass $V^* \equiv 0$, $\left(\frac{\partial^p V}{\partial t^p}\right)^* \equiv 0$ für jedes ganze p gilt. Das bedeutet, dass die Ordnungen von $\tilde{W}$ und U gleich sind, d. h. dass $-r = -q-l+k$ ist, sodass $l - r = k - q$ gilt, womit die Behauptung bewiesen ist.

Jetzt gilt

Satz 37. *Der Operator A sei auf $\mathbf{D}_1$ durch die Gleichung*

$$Ax = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x + [Wx] \tag{59}$$

erklärt, wo $n \geqq 0$; $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$; $a_i(t) \in \mathbf{F}_1$; $i = 0, 1, \ldots, n$ ist; dann gilt $A \in \mathfrak{A}$. Wenn überdies $a_n(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ ist, so gilt $A \in \mathfrak{A}^*$ und $r(A) = n$.

Ausserdem gilt: Wenn $A \in \mathfrak{A}$ ist, so kann A durch die Gl. (59) definiert werden; falls $A \in \mathfrak{A}^*$ und $r(A) = n \geqq 0$ ist, so gilt $a_n(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$.

Beweis. Es gelte also (59). Schreibt man jedes Glied $a_i x^{(i)}$ in der Form laut Lemma 2, so bekommt man

$$Ax = (a_n x)^{(n)} + (b_{n-1} x)^{(n-1)} + (b_{n-2} x)^{(n-2)} + \ldots + b_0 x + [Wx], \tag{60}$$

wo b_i lineare Kombinationen in den a_i und ihren Ableitungen sind, sodass $b_i \in \mathbf{F}_1$ gilt. Laut Satz 15 kann man schreiben

$$Ax = \{(a_n x)^{(-1)} + (b_{n-1} x)^{(-2)} + \ldots + (b_0 x)^{(-n-1)} + [Wx]^{(-n-1)}\}^{(n+1)} = \\ = [\tilde{W}x]^{(n+1)},$$

wo

$$\tilde{W}(t, \tau) = U_1(t, \tau)\, a_n(\tau) + U_2(t, \tau)\, b_{n-1}(\tau) + \ldots + U_{n+1}(t, \tau)\, b_0(\tau) + \\ + (U_{n+1} \times W)(t, \tau) \tag{61}$$

gesetzt wurde. (Die $U_k(t, \tau)$ sind durch die Gl. (19) definiert.) Offenbar gilt $\tilde{W}(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, womit die erste Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Es sei jetzt $a_n(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$. Es ist klar, dass dann $\tilde{W}(t, \tau)$ die Ordnung -1 besitzt, da $U_1 \equiv 1$, $U_k^* \equiv 0$ für $k = 2, 3, \ldots$ und $(U_{n+1} \times W)^* = 0$ ist, so dass $\tilde{W}^* = a_n(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ gilt. Folglich besitzt der Operator $[\tilde{W}x]^{(n+1)}$ die Ordnung n, womit der zweite Teil der ersten Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Es sei nun $A \in \mathfrak{A}$, $Ax = [Wx]^{(k)}$, $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$. Laut Satz 21 gilt dann

$$[Wx]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \left\{\left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^* x\right\}^{(k-i-1)} + \left[\frac{\partial^k W}{\partial t^k}\, x\right]. \tag{62}$$

Falls die Funktion $W(t, \tau)$ die Ordnung $-q$ besitzt, wobei $r(A) = k - q = n \geqq 0$ ist, so beginnt die Entwicklung (62) mit dem Glied $\left\{\left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* x\right\}^{(k-q)} = \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* x^{(n)} + \ldots$, so dass für den Koeffizienten a_n in Gl. (59) $a_n = \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ gilt, womit die zweite Behauptung bewiesen ist. Weiter gilt folgender Satz:

Satz 38. a) *Es sei $A, B \in \mathfrak{A}$; dann gilt $A + B \in \mathfrak{A}$.* b) *Es sei $A, B \in \mathfrak{A}^*$, $r(A) \neq r(B)$; dann gilt $A + B \in \mathfrak{A}^*$, $r(A + B) = \max\,[r(A), r(B)]$.*

Beweis. a) ist trivial und deshalb beweisen wir b). Es sei $r(A) = n_1$, $r(B) = n_2$ und $n_1 > n_2$. Aus der Überlegung, die bei dem Beweise der Unizität der Operatorordnung durchgeführt wurde, folgt, dass Funktionen $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, welche die Ordnung $-r_1$, bzw. $-r_2$ besitzen, und die ganze Zahl $k \geqq 0$ derart existieren, dass $Ax = [W_1 x]^{(k)}$, $Bx = [W_2 x]^{(k)}$ gilt. Es ist also $k - r_1 = n_1$, $k - r_2 = n_2$, so dass $n_1 - n_2 = r_2 - r_1 > 0$ gilt. Nach Definition der Summe von Operatoren ergibt sich

$$(A + B)\, x = ([W_1 x] + [W_2 x])^{(k)} = [(W_1 + W_2)\, x]^{(k)} .$$

Laut Satz 28 besitzt $W_1 + W_2$ die Ordnung $\max[-r_1, -r_2]$, so dass $A + B \in \mathfrak{A}^*$ ist. Weiter gilt

$$r(A + B) = k + \max[-r_1, -r_2] = \max[k - r_1, k - r_2] = \max[n_1, n_2] ,$$

womit Satz 38 bewiesen ist. Jetzt sei folgender Hilfsatz angeführt:

Satz 39. *Es sei $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$, $k \geqq 0$ eine ganze Zahl; dann existiert $\tilde{W}(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ derart, dass für jedes $f \in \boldsymbol{D}_1$*

$$[Wf]^{(k)} = [\tilde{W} f^{(k)}] \tag{63}$$

gilt, und umgekehrt.

Wenn überdies $W(t, \tau)$ die Ordnung $-r$ besitzt, so besitzt auch $\tilde{W}(t, \tau)$ die Ordnung $-r$, und umgekehrt.

Beweis: Es habe $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ die Ordnung $-r$; laut Satz 21 gilt

$$[Wf]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i} \right)^* f \right\}^{(k-i-1)} + \left[\frac{\partial^k W}{\partial t^k} f \right]. \tag{64}$$

Betrachten wir zuerst den Fall $k \geqq r$. Dann kann man die Gl. (64) in der Form

$$[Wf]^{(k)} = a_{k-r} f^{(k-r)} + a_{k-r-1} f^{(k-r-1)} + \ldots + a_0 f + \left[\frac{\partial^k W}{\partial t^k} f \right] \tag{65}$$

schreiben, wo $a_{k-r} = \left(\dfrac{\partial^{r-1} W}{\partial t^{r-1}} \right)^* \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ ist, und wo die anderen a_i Kombinationen von $\left(\dfrac{\partial^p W}{\partial t^p} \right)^*$ und ihren Ableitungen sind. Aus (65) folgt, dass $[Wf]^{(k)} = [\tilde{W} f^{(k)}]$ gilt, wo

$$\tilde{W}(t, \tau) = a_{k-r}(t)\, U_r(t, \tau) + a_{k-r-1}(t)\, U_{r+1}(t, \tau) + \ldots + a_0(t)\, U_k(t, \tau) + \\ + \left(\frac{\partial^k W}{\partial t^k} \times U_k \right)(t, \tau) \tag{66}$$

gesetzt wurde. Offenbar gilt $\tilde{W}(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$. Man sieht leicht ein, dass $\tilde{W}(t, \tau)$ die Ordnung $-r$ besitzt. Wirklich, vor Allem ist klar, dass $\left(\dfrac{\partial^i}{\partial \tau^i} \left(\dfrac{\partial^k W}{\partial t^k} \times U_k \right) \right)^* = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, r - 1$ ist. Hieraus folgt mit Hilfe von (66), dass $\tilde{W}^* \equiv 0$, $\left(\dfrac{\partial^i \tilde{W}}{\partial \tau^i} \right)^* \equiv 0$ für $i = 1, 2, \ldots, r - 2$ und $\left(\dfrac{\partial^{r-1} \tilde{W}}{\partial \tau^{r-1}} \right)^* = a_{k-r}(t) \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ gilt. Laut Satz 27 gilt dann, dass $\tilde{W}(t, \tau)$ die Ordnung $-r$ besitzt, w. z. b. w.

Betrachten wir jetzt den Fall $k < r$. Die Gl. (65) lautet dann

$$[Wf]^{(k)} = \left[\frac{\partial^k W}{\partial t^k} f\right] = \left[\left(\frac{\partial^k W}{\partial t^k} \times U_k\right) f^{(k)}\right].$$

Da offensichtlich $\dfrac{\partial^k W}{\partial t^k}$ die Ordnung $-r + k$ besitzt, so besitzt $\tilde{W}(t, \tau) = \left(\dfrac{\partial^k W}{\partial t^k} \times U_k\right)(t, \tau)$ laut Satz 29 die Ordnung $- r$, womit die direkte Behauptung des Satzes bewiesen ist. (Man beachte, dass durch den eben durchgeführten Beweis gleichzeitig die schwächere Behauptung des Satzes, d. h. wenn die Ordnungsexistenz nicht vorausgesetzt wird, bewiesen wurde.)

Der Beweis der umgekehrten Behauptung ist ganz analog, es genügt nur von den Sätzen 20 und 37 Gebrauch zu machen, und deshalb wird er fortgelassen.

Als einfache Folgerung des eben bewiesenen Satzes erscheint

Satz 40. *Es seien $A, B \in \mathfrak{A}$; dann gilt $AB \in \mathfrak{A}$. Wenn $A, B \in \mathfrak{A}^*$ ist, so gilt $AB \in \mathfrak{A}^*$ und $r(AB) = r(A) + r(B)$.*

Beweis. Es sei $Ax = [W_1 x]^{(k_1)}$, $Bx = [W_2 x]^{(k_2)}$ und $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau)$ habe die Ordnung $- r_1$, bzw. $- r_2$, sodass $r(A) = k_1 - r_1$, $r(B) = k_2 - r_2$ gilt. Nach der Definition des Operatorenproduktes gilt $(AB)\, x = [W_1[W_2 x]^{(k_2)}]^{(k_1)}$. Laut Satz 39 existiert $\tilde{W}_1(t, \tau)$ von der Ordnung $- r_1$ derart, dass

$$(AB)\, x = [\tilde{W}_1[W_2 x]]^{(k_1 + k_2)} = [(\tilde{W}_1 \times W_2)\, x]^{(k_1 + k_2)}$$

gilt. Nach Satz 29 besitzt $W_1 \times W_2$ die Ordnung $- r_1 - r_2$; es gilt also $AB \in \mathfrak{A}^*$ und $r(AB) = k_1 + k_2 - r_1 - r_2 = r(A) + r(B)$, w. z. b. w.

Aus den Sätzen 30 und 24 ergibt sich unmittelbar:

Satz 41. *Es sei $A \in \mathfrak{A}^*$, $f \in \mathbf{D}_1^*$; dann gilt $Af \in \mathbf{D}_1^*$ und $r(Af) = r(A) + r(f)$.*

Eine einfache Folgerung des Satzes 8 ist

Satz 42. *Jeder Operator $A \in \mathfrak{A}$ ist stetig.*

Beweisen wir jetzt folgenden wichtigen Satz:

Satz 43. *Jeder Operator $A \in \mathfrak{A}^*$ ist regulär auf $\mathbf{D}_1$; ausserdem gilt $A^{-1} \in \mathfrak{A}^*$, $r(A^{-1}) = - r(A)$.*

Beweis. Es sei $Ax = [Wx]^{(k)}$, $k \geqq 0$ und $W(t, \tau)$ besitze die Ordnung $- q$, so dass $r(A) = k - q$ ist. Laut Satz 21 gilt

$$[Wx]^{(q)} = \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* x + \left[\frac{\partial^q W}{\partial t^q} x\right], \quad \text{wo} \quad a(t) = \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* \neq 0 \quad \text{in } \langle 0, \infty) \text{ ist.}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$\overline{W}(t, \tau) = \frac{1}{a(t)} \frac{\partial^q W(t, \tau)}{\partial t^q},$$

so bekommt man $[Wx]^{(q)} = a(x + [\overline{W}x])$.

Es seien jetzt die Operatoren A_1, A_2 auf $\mathbf{D}_1$ durch

$$A_1 x = x^{(k-q)}, \quad A_2 x = a(x + [\overline{W}x]) \tag{67}$$

definiert. Offenbar gilt $A_1 A_2 = A$.

Bilden wir nun die für $t, \tau \geqq 0$ stetige Funktion $H(t, \tau)$, die der Gleichung

$$H + \overline{W} + H \times \overline{W} = 0 \tag{68}$$

genügt. Laut Satz 31 $H(t, \tau)$ existiert, ist $H(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$, und überdies gilt

$$H + \overline{W} + \overline{W} \times H = 0\,. \tag{69}$$

Wir definieren weiter auf $\mathbf{D}_1$ die Operatoren B_1, B_2 durch die Gleichungen

$$B_1 x = \frac{1}{a}\, x + \left[H\left(\frac{1}{a}\, x\right)\right], \quad B_2 x = x^{(q-k)} \tag{70}$$

und betrachten den Operator $B = B_1 B_2$, d. h.

$$Bx = \frac{1}{a}\, x^{(q-k)} + \left[H\left(\frac{1}{a}\, x^{(q-k)}\right)\right]. \tag{71}$$

Es ist ersichtlich, dass $B \in \mathfrak{A}^*$ ist. In der Tat, laut Satz 37 gilt $B_1 \in \mathfrak{A}^*$, $r(B_1) = 0$, und offenbar auch $B_2 \in \mathfrak{A}^*$, $r(B_2) = q - k$; nach Satz 40 gilt dann, dass $B = B_1 B_2 \in \in \mathfrak{A}^*$ und $r(B) = r(B_1) + r(B_2) = q - k = -\, r(A)$ ist.

Weiter bekommt man

$$(B_1 A_2)\, x = B_1(A_2 x) = \frac{1}{a}\, a(x + [\overline{W}x]) + \left[H\, \frac{1}{a}\, a(x + [\overline{W}x])\right] =$$
$$= x + [(\overline{W} + H + H \times \overline{W})\, x] = x\,,$$

so dass auf $\mathbf{D}_1$ die Gleichung $B_1 A_2 = I$ gilt. Da offenbar $B_2 A_1 = A_1 B_2 = I$ auf $\mathbf{D}_1$ ist, so ergibt sich $BA = (B_1 B_2)(A_1 A_2) = B_1(B_2 A_1)\, A_2 = B_1 A_2 = I$. Der Operator A ist also schwach regulär.

Analog bekommt man

$$(A_2 B_1)\, x = A_2(B_1 x) = a\left\{\frac{1}{a}\, x + \left[H\left(\frac{1}{a}\, x\right)\right] + \left[\overline{W}\left(\frac{1}{a}\, x + \left[H\left(\frac{1}{a}\, x\right)\right]\right)\right]\right\} =$$
$$= x + a\left[(H + \overline{W} + \overline{W} \times H)\left(\frac{1}{a}\, x\right)\right] = x\,,$$

d. h. dass $A_2 B_1 = I$ auf $\mathbf{D}_1$ gilt. Schliesslich gilt auf $\mathbf{D}_1$:

$$AB = (A_1 A_2)(B_1 B_2) = A_1(A_2 B_1)\, B_2 = A_1 B_2 = I\,.$$

Infolgedessen ist A regulär, d. h. dass ${}_A\Omega = \mathbf{D}_1$, $B = A^{-1}$ und $A^{-1} A = A A^{-1} = I$ auf $\mathbf{D}_1$ gilt, womit der Satz bewiesen ist.

Bemerkung. Man beachte, dass durch den eben bewiesenen Satz bzw. durch die Gl. (71) und durch Satz 31 eine Vorschrift gegeben ist, die in konkreten Fällen ermöglicht, den inversen Operator zu ermitteln. Insbesondere ist die Tatsache von

Bedeutung, dass die Funktion $H(t, \tau)$ durch einen Iterationsprozess feststellbar ist (vergl. mit Gl. (48)), so dass das Rechnungsverfahren den Rechenautomaten angepasst werden kann.

Führen wir jetzt ein einfaches Beispiel an! Der Operator A sei auf $\mathbf{D}_1$ durch die Gleichung $Ax = x + [Wx]$ erklärt, wo $W(t, \tau) = a(t)\, b(\tau);\ a(t), b(t) \in \mathbf{F}_1$ ist. Offenbar ist $A \in \mathfrak{A}^*$. Man soll A^{-1} feststellen.

Laut Gl. (71) gilt $A^{-1}x = x + [Hx]$, wo laut Satz 31 $H = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i}$ ist. Setzt man $\Phi(t) = a(t)\, b(t)$ und bezeichnet man mit $\Phi^{(-1)}(t)$ irgendeine primitive Funktion zu $\Phi(t)$, so sieht man leicht ein, dass

$$(72) \qquad (W(t, \tau))^{\times n} = \frac{a(t)\, b(\tau)}{(n-1)!} (\Phi^{(-1)}(t) - \Phi^{(-1)}(\tau))^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gilt. Aus (72) folgt also $H(t, \tau) = -a(t)\, b(\tau) \exp(\Phi^{(-1)}(\tau) - \Phi^{(-1)}(t))$, so dass mit Hilfe von Satz 19 für

$$(73) \qquad A^{-1}x = x - a e^{-\Phi^{(-1)}} (b e^{\Phi^{(-1)}} x)^{(-1)}$$

gilt.

Es sei jetzt noch eine Methode der Ermittlung von A^{-1} angeführt, welche rechnerisch einfacher ist jedoch stärkere Voraussetzungen über $W(t, \tau)$ erfordert.

Es sei $A \in \mathfrak{A}^*$, $Ax = [Wx]^{(k)}$. Der Operator A erfüllt die Bedingung B heisst, dass

1. $W(t, \tau)$ entartet ist, d. h. dass $W(t, \tau) = \sum_{i=1}^{r} a_i(t)\, b_i(\tau)$, $a_i(t), b_i(t) \in \mathbf{F}_1$ ist,

2. die Wronski'sche Determinante $w(t)$ der Funktionen $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ überall in $\langle 0, \infty)$ von Null verschieden ist.

Zu der Konstruktion werden zwei folgende Lemmas erforderlich:

Lemma 4. *Wenn die Wronski'sche Determinante $w(t)$ der Funktionen $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ in $\langle 0, \infty)$ von Null verschieden ist, so existieren Funktionen $\alpha_i(t) \in \mathbf{F}_1$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$ derart, dass jede Funktion $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ die Lösung (im klassischen Sinne) der Gleichung*

$$(74) \qquad \xi^{(r)} + \alpha_{r-1}\xi^{(r-1)} + \alpha_{r-2}\xi^{(r-2)} + \ldots + \alpha_0 \xi = 0$$

darstellt.

Lemma 5. *Wenn der Operator A die Bedingung B erfüllt und die Funktion $W(t, \tau)$ die Ordnung $-q$ besitzt, so gilt $q \leqq r$.*

Der Beweis des Lemmas 4 ist offensichtlich; es genügt nur, die Determinante $(r+1)$-er Ordnung, deren k-te Reihe $a_1^{(k-1)}, a_2^{(k-1)}, \ldots, a_r^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}$ ist, zu bilden und diese gleich Null zu setzen.

Um Lemma 5 zu beweisen, setze man voraus, dass $q > r$ ist, d. h. dass im Intervall $\langle 0, \infty)$

$$W^* \equiv 0, \quad \left(\frac{\partial^k W}{\partial t^k}\right)^* \equiv 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, q-2, \quad \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* \neq 0$$

gilt. Das bedeutet jedoch, dass im Intervall $\langle 0, \infty)$

$$(75) \qquad \sum_{i=1}^{r} a_i^{(k)}(t)\, b_i(t) \equiv 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1$$

gilt. Laut Voraussetzung B folgt aus (75), dass im Intervall $\langle 0, \infty)$ $b_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ gilt, so dass dort auch $\left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* = 0$ ist, was einen Widerspruch gibt.

Jetzt kann folgender Satz ausgesprochen werden:

Satz 44. *Wenn der Operator $A \in \mathfrak{A}^*$ die Bedingung B erfüllt, so kann A^{-1} durch die Lösung einer linearen Differentialgleichung festgestellt werden.*

Satz 44 wird durch die Konstruktion des entsprechenden Operators A^{-1} bewiesen. Es sei also $Ax = [Wx]^{(k)} = y$, wo $W(t, \tau)$ die Ordnung $-q$ besitzt, und es sei $u = y^{(-k)}$. Dann gilt $[Wx] = u$. Deriviert man diese Gleichung einmal, bis r-mal, so bekommt man laut Satz 21 folgendes System:

$$(76) \qquad [Wx] = u\,, \quad \left[\frac{\partial W}{\partial t}\, x\right] = u' - W^* x,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\left[\frac{\partial^r W}{\partial t^r}\, x\right] = u^{(r)} - \sum_{i=0}^{r-1} \left\{\left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^* x\right\}^{(r-i-1)}.$$

Für jedes ganze $k \geqq 1$ gilt jedoch nach Satz 19

$$\left[\frac{\partial^k W}{\partial t^k}\, x\right] = \left[\left(\sum_{i=1}^{r} a_i^{(k)}(t)\, b_i(\tau)\right) x\right] = \sum_{i=1}^{r} a_i^{(k)} (b_i x)^{(-1)}\,.$$

Multipliziert man jetzt nach Lemma 4 die i-te Gleichung des Systems (76) mit α_{i-1} für $i = 1, 2, \ldots, r$ und addiert man sie mit der letzten, so bekommt man

$$(77) \qquad 0 = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i u^{(i)} + u^{(r)} - \sum_{i=0}^{r-q} \beta_i x^{(i)}\,,$$

wo laut Lemma 5 $r - q \geqq 0$ ist, $\beta_{r-q} = \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* \neq 0$ im $\langle 0, \infty)$ ist und die anderen β_i bilineare Formen in α_k, $\left(\frac{\partial^k W}{\partial t^k}\right)^*$ und ihren Ableitungen darstellen. Löst man jetzt (77) mit Hilfe von Satz 32 nach x auf, und macht von Satz 20 bzw. 17 Gebrauch, ist damit A^{-1} festgestellt.

Es sei bemerkt, dass die Bedeutung des eben angegebenen Verfahrens darin besteht, dass es eine Anzahl von Methoden gibt, welche gewöhnliche Differentialgleichungen mit Hilfe von Analogen-Rechenmaschienen zu lösen gestatten.

Widmen wir jetzt einige Zeilen einer Unterklasse von $\mathfrak{A}^*$, deren Elemente in Anwendungen gewöhnlich als „Heaviside'sche Operatoren" bezeichnet werden.

Es sei $\mathfrak{R}$ das System aller Operatoren D_α, die auf $\mathbf{D}_1$ durch die Gleichung

$$D_\alpha x = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x \tag{78}$$

erklärt sind, wobei $n \geqq 0$ und a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ reelle Zahlen sind, welche nicht alle verschwinden. Offenbar gilt $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}^*$. Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass folgende Behauptung besteht: Wenn D_α, $D_\beta \in \mathfrak{R}$ ist, so gilt 1. $D_\alpha + D_\beta \in \mathfrak{R}$, falls $D_\alpha + D_\beta \neq 0$ ist, 2. $D_\alpha D_\beta \in \mathfrak{R}$, 3. $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$.

Führen wir folgende Bezeichnung ein: A ist ein Heaviside'scher Operator heisst, dass Operatoren D_α, $D_\beta \in \mathfrak{R}$ derart existieren, dass $A = D_\alpha^{-1} D_\beta$ gilt. Das System aller solchen Operatoren sei mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Offenbar gilt $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{A}^*$. Aus der Tatsache, dass das Produkt von Operatoren aus $\mathfrak{R}$ kommutativ ist, ergibt sich dann leicht mit Hilfe von Satz 35 folgende Behauptung:

Satz 45. *Es sei $A, B \in \mathfrak{H}$; dann gilt* 1. $A + B \in \mathfrak{H}$ *falls* $A + B \neq 0$ *ist,* 2. $AB \in \mathfrak{H}$, 3. $A^{-1} \in \mathfrak{H}$, 4. $AB = BA$.

Infolgedessen, dass die Heavisidesche Operatoren nach ihrem Produkte kommutativ sind, kann man sie formal wie rationale Funktionen des Operators D $(Dx = x'$, $x \in \mathbf{D}_1)$ behandeln. Insbesondere bleibt hier der Satz über die Partialbruchzerlegung in Gültigkeit, was die Ermittlung des inversen Operators erleichtert. Das sind jedoch allgemeinbekannte Tatsachen und deshalb werden wir nicht näher auf sie eingehen. (Vergl. [3], S. 157.)

Deuten wir jetzt in Kürze die Anwendung von Operatoren aus $\mathfrak{A}$ zur Lösung von Systemen der gewöhnlichen Integro-differentialgleichungen an!

Es sei $\mathbf{D}_r$ das System aller r-dimensionalen Vektoren, deren Elemente Distributionen aus $\mathbf{D}_1$ sind. Es seien weiter $A_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ Quadratmatrizen r-ter Ordnung, deren Elemente zu $\mathbf{F}_1$ gehören, und es sei $W(t, \tau)$ eine Quadratmatrix r-ter Ordnung, deren Elemente zu $\mathbf{F}_1^2$ gehören. Endlich seien c_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ reelle r-dimensionale Zahlenvektoren.

Wenn $f \in \mathbf{D}_r$ ist, dann soll der Vektor x die Lösung von

$$\sum_{i=0}^{n} A_i(t)\, x^{(i)} + \int_0^t W(t, \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau = f \tag{78}$$

bei den Anfangsbedingungen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ heissen, wenn

$x \in \mathbf{D}_r$, und die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} A_i\Big(x^{(i)} - \sum_{k=0}^{i-1} c_k \delta_0^{(i-k-1)}\Big) + [Wx] = f \tag{79}$$

erfüllt ist. (Hier wird $\sum_{k=0}^{-1} \ldots = 0$ gesetzt, die Bedeutung aller anderen Symbole ist gewiss klar.)

Es sei begründet, warum die Lösung von (78) gerade in dieser Weise definiert wurde. Es gilt nämlich folgender Satz

Satz 46. *Wenn f einen Vektor, deren Elemente in $\langle 0, \infty)$ stetige reelle Funktionen sind, darstellt, dann jede klassische Lösung $x(t)$ von (78), definiert als Nullvektor für $t < 0$, ist gleichzeitig die distributive Lösung von (78) bei denselben Anfnagsbedingungen.*

Beweis. Wie bekannt, der Vektor $x(t)$ heisst klassische Lösung von (78), wenn $x(t)$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ stetige n-te Ableitung besitzt, die Gleichung (78) in jedem Punkte $t \in \langle 0, \infty)$ erfüllt ist und überdies $x^{(i)}(0) = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ gilt.

Es sei also $x(t)$ die klassische Lösung von (78) und führen wir bestimmtheitshalber folgende Bezeichnung ein: es sei

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(t) \text{ für } t \geqq 0\,; & x_{(i)} &= x^{(i)}(t) \text{ für } t \geqq 0\,; & \bar{f} &= f(t) \text{ für } t \geqq 0\,, \\ &= 0 \quad \text{für } t < 0\,, & &= 0 \quad \text{für } t < 0\,; & &= 0 \quad \text{für } t < 0\,. \end{aligned}$$

Laut (78) gilt dann für jedes t:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(t)\, x_{(i)} + A_0 \bar{x} + \int_0^t W(t, \tau)\, \bar{x}(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \bar{f}\,. \tag{80}$$

Da die Vektoren $\bar{x}, x_{(i)}, \bar{f}$ lokal integrabel sind und für $t < 0$ verschwinden, so gilt $\bar{x}, x_{(i)}, \bar{f} \in \mathbf{D}_r$, und weil die Gl. (80) in jedem Punkte erfüllt ist, kann sie im distributiven Sinne aufgefasst werden. Laut Satz 7 kann man schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_{(i)} + A_0 \bar{x} + [W\bar{x}] = \bar{f}\,. \tag{81}$$

Für die distributiven Ableitungen von $\bar{x}$ gilt jedoch (vergl. [1])

$$\bar{x}^{(i)} = c_0 \delta_0^{(i-1)} + c_1 \delta_0^{(i-2)} + \ldots + c_{i-1}\delta_0 + x_{(i)}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{82}$$

Setzt man aus (82) für $\bar{x}_{(i)}$ in (81) ein, so bekommt man Gl. (79), womit der Satz bewiesen ist.

Um weitere Überlegungen zu vereinfachen, beachte man, dass vorausgesetzt werden kann, dass die Glieder $A_i c_k \delta_0^{(i-k-1)}$ schon in dem Vektor f enthalten sind, so dass laut Satz 37 die Gleichung (79) in einfacher Form

$$Ax = f \tag{83}$$

geschrieben werden kann, wo A eine Quadratmatrix r-ter Ordnung bezeichnet, deren Elemente zum Systeme $\mathfrak{A}$ gehören.

Um die Frage der Existenz und Unizität der Lösung von (83) beantworten zu können, sei folgende Bezeichnung eingeführt:

Es sei A eine Quadratmatrix q-ter Ordnung, deren Elemente zu $\mathfrak{A}$ gehören; „die Matrix A besitzt die Reduktion $A^{(1)}$" bedeutet, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert eine solche Permutation von Splaten und eine solche Permutation von Reihen der Matrix A, dass in der so entstandenen Matrix $\tilde{A}$ das Element $\tilde{A}_{qq}$ zu $\mathfrak{A}^*$ gehört,

2. wenn $q > 1$ ist, dann enthält die durch

$$A^{(1)} = [A_{ik}^{(1)}] = [\tilde{A}_{ik} - \tilde{A}_{iq}\tilde{A}_{qq}^{-1}\tilde{A}_{qk}], \quad 1 \leqq i, k \leqq r - 1 \tag{84}$$

gebildete Matrix $(r - 1)$-ter Ordnung mindestens ein Element, das zu $\mathfrak{A}^*$ gehört.

Die Quadratmatrix A r-ter Ordnung soll reduzibel heissen, wenn eine Matrizenfolge $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(r-1)}$ existiert, dass jede $A^{(i)}$ eine Reduktion von $A^{(i-1)}$, $i = 2, 3, \ldots, r - 1$ und $A^{(1)}$ eine Reduktion von A darstellt.

Offenbar ist jede Matrix $A^{(i)}$ von $r - i$-ter Ordnung. Jetzt gilt folgender einfache Satz

Satz 47. *Es sei A eine Quadratmatrix r-ter Ordnung, die reduzibel ist, $f \in \mathbf{D}_r$; dann existiert eine einzige Lösung $x \in \mathbf{D}_r$ der Gleichung $Ax = f$.*

Beweis. Es sei p eine ganze Zahl, $1 \leqq p \leqq r - 2$, und es sei $\tilde{A}^{(p)} = [B_{ik}]$, $1 \leqq i, k \leqq \nu = r - p$. Laut der Voraussetzung ist $B_{\nu\nu}$ regulär, sodass $B_{\nu\nu}^{-1}$ existiert. Bildet man die Systeme

$$B_{i1}z_1 + B_{i2}z_2 + \ldots + B_{i\nu}z_\nu = g_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \quad g_i \in \mathbf{D}_1, \tag{85}$$

$$\begin{aligned}(B_{i1} - B_{i\nu}B_{\nu\nu}^{-1}B_{\nu1})\, z_1 + (B_{i2} - B_{i\nu}B_{\nu\nu}^{-1}B_{\nu2})\, z_2 + \ldots +\\ + (B_{i,\nu-1} - B_{i\nu}B_{\nu\nu}^{-1}B_{\nu,\nu-1})\, z_{\nu-1} = g_i - B_{i\nu}B_{\nu\nu}^{-1}g_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu - 1,\end{aligned} \tag{86}$$

so ist klar, dass die Matrix des Systems (86) gerade $A^{(p+1)}$ ist. Man überzeugt sich jetzt leicht, dass folgende Behauptung richtig ist:

Wenn das System $z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1} \in \mathbf{D}_1$ die einzige Lösung von (86) darstellt, so existiert $z_\nu \in \mathbf{D}$ derart, dass das System $z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}, z_\nu$ die einzige Lösung von (85) ist, und umgekehrt.

Hieraus folgt, dass bei passender Nummerierung der Elemente des Vektors x die Gleichung $Ax = f$ dem Systeme

$$\begin{array}{rlllll} x_r = & C_{r,r-1}x_{r-1} + & C_{r,r-2}x_{r-2} & + \ldots + & C_{r1}x_1 + & h_r, \\ x_{r-1} = & & C_{r-1,r-2}x_{r-2} & + \ldots + & C_{r-1,1}x_1 + & h_{r-1}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_2 = & & & & C_{2,1}x_1 + & h_2, \\ x_1 = & & & & & h_1. \end{array} \tag{87}$$

äquivalent ist, womit der Satz 47 bewiesen ist.

Aus dem eben durchgeführten Beweise ergibt sich mit Hilfe von Satz 42 unmittelbar folgende Behauptung:

Satz 48. *Es sei A reduzibel; wenn $f_k \in \mathbf{D}_r$, $k = 1, 2, \ldots$ und $f_k \to f$ ist, dann gilt $x_k \to x$, wo x_k, x die Lösung von $Ax_k = f$ bzw. von $Ax = f$ darstellt.*

Da jede Distribution als Grenze einer Folge von unbeschränkt differenzierbaren Funktionen darstellbar ist, so folgt aus den Sätzen 46 und 48, dass die distributive Lösung von (78) als die Grenze einer Folge der klassischen Lösungen von Gleichung mit denselben Koeffizienten und denselben Anfangsbedingungen aufgefasst werden darf.

Literatur

[1] *Гельфанд И. М.-Шилов Г. Е.*: Обобщенные функции и действия над ними. Гос. изд. физико-матем. лит., Москва 1958.

[2] *Whitney A.*: Analytic Extension of Differentiable Functions Defined in Closed Sets. Transactions of the Amer. Math. Soc., Vol. *36*, (1934), 63—89.

[3] *Сансоне Дж.*: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том II, Изд. иностр. Литер., Москва 1954.

Výtah

O JEDNÉ TŘÍDĚ LINEÁRNÍCH OPERÁTORŮ

VÁCLAV DOLEŽAL, Praha

Článek je věnován vyšetření vlastností jisté třídy lineárních operátorů, definovaných na systému $\mathbf{D}_1$ distribucí rovných nule na intervalu $(-\infty, 0)$.

V první části je zaveden rovnicemi (3) a (4) součin $[Wf]$ distribuce $f \in \mathbf{D}_1$ a hladké funkce W dvou proměnných, který se jeví zobecněním určitého integrálu, jehož jádro je W; jsou dokázány některé pomocné věty o vlastnostech součinu $[Wf]$, které si všímají zejména jeho spojitosti, distributivnosti a asociativnosti.

Ve druhé části jsou zavedeny operátory třídy $\mathfrak{A}$ jako zobrazení A systému $\mathbf{D}_1$ do sebe, která jsou zprostředkována rovnicí $Ax = [Wx]^{(k)}$, $k \geqq 0$ celé, $x \in \mathbf{D}_1$; třída $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ je pak zavedena jako systém všech těch operátorů A, pro něž příslušná W splňují jistou podmínku, přičemž pro každé $A \in \mathfrak{A}^*$ je definován řád. Poté jsou dokázány věty o základních vlastnostech operátorů z $\mathfrak{A}$ resp. z $\mathfrak{A}^*$ a jejich řádech, a zejména pak věta o tom, že ke každému $A \in \mathfrak{A}^*$ existuje inversní operátor $A^{-1} \in \mathfrak{A}^*$. Přitom jsou uvedeny dva způsoby konstrukce A^{-1}, hodící se pro počítací stroje.

Závěrem je poukázáno na užití odvozených výsledků k řešení soustav integro-diferenciálních rovnic (78) s hladkými koeficienty.

Резюме

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Вацлав Долежал (Václav Doležal), Прага

Статья посвящается исследованию свойств одного класса линейных операторов, определенных на системе $\mathbf{D}_1$ обобщенных функций, равных нулю в интервале $(-\infty, 0)$.

В первой части при помощи уравнений (3) и (4) вводится произведение $[Wf]$ обобщенной функции $f \in \mathbf{D}_1$ и гладкой функции W двух переменных, являющееся обобщением определенного интеграла, ядром которого является W; доказываются некоторые вспомогательные теоремы о свойствах произведения $[Wf]$, в которых исследуются главным образом его непрерывность, распределительное и сочетательное свойства.

Во второй части вводятся операторы класса $\mathfrak{A}$ как отображения A системы $\mathbf{D}_1$ до себя, заданные уравнением $Ax = [Wx]^{(k)}$, $k \geqq 0$ — целое, $x \in \mathbf{D}_1$; класс $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ тогда вводится как система всех тех операторов A, для которых соответствующие W выполняют определенное условие, причем для каждого $A \in \mathfrak{A}^*$ определяется порядок. Далее доказываются теоремы об основных свойствах операторов из $\mathfrak{A}$, соотв. из $\mathfrak{A}^*$, и об их порядках, в особенности теорема о том, что для каждого $A \in \mathfrak{A}^*$ существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathfrak{A}^*$. Притом приводятся два способа построения A^{-1}, пригодные для вычислительных машин.

В заключение показано применение полученных результатов к решению систем интегродифференциальных уравнений (78) с гладкими коэффициентами.