Jan Bílek
Algebraické korespondence

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 83 (1958), No. 1, 33--40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108194`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

# ALGEBRAICKÉ KORESPONDENCE

JAN BÍLEK, Praha

(Došlo dne 26. října 1956) DT:513.6.001

Základní vlastnosti algebraické korespondence mezi dvěma algebraickými varietami definovanými nad tělesem charakteristiky 0 jsou běžně známy. (Viz WAERDEN, Einführung in die alg. Geometrie nebo HODGE - PEDOE, Methods of algebraic Geometry, díl II.) V této práci jest uvažována algebraická korespondence mezi algebraickými varietami nad tělesem libovolné charakteristiky. K studiu této korespondence se užívá methody, jež je rozšířením methody, která ve speciálním případě biracionální korespondence je popsána v knize A. WEIL, Foundations of algebraic geometry, 1946. Specialisací tělesa koeficientů do tělesa charakteristiky 0 dostaneme z našich výsledků výsledky uvedené v citovaných knihách.

V tomto pojednání budeme považovati za známé větu 26 a větu 27 z § 7 na str. 105 z knihy A. WEIL: Foundations of algebraic geometry, 1946 (v dalším značeno W). Tyto dvě věty zde uvedeme pod čísly 1, 2.

**Věta 1.** *Nechť $U$ je podvarieta součinu variet $V \times W$ a nechť $U'$ je její projekce na $V$. Nechť $Z$ je podvarieta variety $U$ s projekcí $Z'$ na $V$. Potom $Z$ je obsažena v $U \cap (Z' \times W)$; každá komponenta $\bar{Z}$ průniku $U \cap (Z' \times W)$ obsahující $Z$ má $Z'$ za projekci na $V$; když $r$, $r'$, $s'$ jsou dimense variet $U$, $U'$, $Z'$, potom každá komponenta $\bar{Z}$ má alespoň dimensi $r + s' - r'$.*

**Věta 2.** *Nechť $U$ je podvarieta součinu variet $V \times W$ mající touž dimensi jako její projekce $U'$ na $V$. Nechť $k$ je těleso z definice pro $U$ a nechť $P'$ je obecný bod $\epsilon\ U'$ nad $k$. Potom $U$ je konečná nad $P'$; body $\epsilon\ U$ s projekcí $P'$ na $V$ jsou všechny k sobě konjugované nad $k(P')$, a když $P$ je jeden z těchto bodů, pak máme $[k(P) : : k(P')] = [U : U']$.*

Poznámka. Definici $U$ je konečná nad $P'$ a definici symbolu $[U : U']$ viz W, 106.

Nechť $U \subset (V \times W)$, $k$ těleso z definice pro $U$, $U'$ projekce $U$ na $V$ a $U$, $U'$ nemají touž dimensi. Nechť $P' = (x)$ je obecný bod $U'$ nad $k$. Na $U$ nemůže existovat konečný počet bodů $P$, které mají bod $P'$ za projekci na $V$. Body $P$ musí tedy vytvořiti alespoň jednu varietu $Z \subset U$, při čemž $\dim (Z) \neq 0$.

**Věta 3.** *Nechť $U \subset (V \times W)$, $U'$ projekce $U$ na $V$ a nechť dimense variety $U$ je $r$, dim. variety $U'$ je $r'$ a nechť $r \neq r'$ a $k$ je společné těleso z definice pro $U, V, W$. Nechť $P$ je obecný bod $\in U'$ nad $k$. Potom maximální podvariety $Z \subset U$, jež mají za projekci na $V$ bod $P$, jsou konjugované obrazy nad $k(P)$.*

Pod maximální podvarietou $Z$ rozumíme, že neexistuje varieta $X \subset U$ taková, aby $Z \subset X$ a aby projekce $Z$ na $V$ a $X$ na $V$ byly rovny bodu $P$.

Důkaz. Nechť tedy $Z \subset U$ je taková, že má za projekci na $V$ bod $P$. Pak je $Z \subset U \cap (P \times W)$. Podle věty 1 každá komponenta $\bar{Z}$ průniku $U \cap (P \times \times W)$, jež obsahuje $Z$, má také za projekci na $V$ bod $P$. Poněvadž $\bar{Z} \subset U$, musí nutně $Z = \bar{Z}$. $Z$ je tedy nějaká komponenta průniku $U \cap (P \times W)$. Podle theoremu 8, W, 89 existuje soustava (bunch) variet $B$, která je normálně algebraická nad společným tělesem z definice variet $U$ a $P \times W$. Bodu $P$ jako nuldimensionální varietě nad tělesem $k(P)$ přísluší těleso z definice $k(P)$ a za těleso z definice pro $U$ i $W$ můžeme vzíti $k(P)$, neboť $k \subset k(P)$. Součin variet $P \times W$ má těleso z definice podle theoremu 5, W, 79 také těleso $k(P)$. Je tedy zmíněná soustava variet normálně algebraická nad tělesem $k(P)$. Každá komponenta soustavy variet $B$ je algebraická nad $k(P)$ a je proto $Z$ varieta algebraická nad $k(P)$.

Je-li nyní $M$ obecný bod $\in Z$ nad $\overline{k(P)}$, pak je $M = (P \times Q)$, kde $Q$ je nějaký bod $\in W$. Potom každá obecná specialisace bodu $M$ nad $k(P)$ je obecný bod nad $\overline{k(P)}$ jediného konjugovaného obrazu nad $k(P)$ (theorem 4, W, 76). Každá obecná specialisace bodu $M$ nad $k(P)$ má tvar $M' = (P \times Q')$, kde $Q'$ je bod $\in W$ a $M'$ je obecný bod konjugovaného obrazu $Z'$ nad $k(P)$ variety $Z$ (th. 4, W, 76). Projekce variety $Z'$ na $V$ je bod $P$. Konjugovaný obraz $Z'$ nad $k(P)$ variety $Z$ je také komponenta soustavy $B$ (th. 8. W, 89).

Musíme ještě dokázat, že soustava variet $B = U \cap (P \times W)$ obsahuje jen tyto komponenty a žádné jiné. Nechť tedy $B$ obsahuje komponentu $Z_1$, která je různá od všech konjugovaných obrazů nad $k(P)$ k varietě $Z$. Obecný bod $\in Z_1$ nad $\overline{k(P)}$ je tvaru $P \times Q_1$, kde bod $Q_1 \in W$. Označme $d_1$ dimensi variety $Z_1$ nad $\overline{k(P)}$. Potom podle věty 1 dostáváme $d_1 \geqq r - r'$. Dimense $Z_1$ nad $\overline{k(P)}$ je $\dim_{\overline{k(P)}} (P \times Q_1) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q_1) = \dim_{k(P)}(Q_1) = d_1$. Avšak

$$\dim_k(P, Q_1) = \dim_k(P) + \dim_{k(P)}(Q_1) = r' + d_1 .$$

Poněvadž bod $(P, Q_1) \in U$, plyne z toho, že $\dim_k(P, Q_1) \leqq r$. Proto $r \geqq r' + d_1$, a poněvadž dříve jsme dokázali, že $d_1 \geqq r - r'$, plyne z těchto dvou vztahů, že $r = r' + d_1$ a tudíž bod $(P \times Q_1)$ je obecný bod $\in U$ nad $k$. Stejným způsobem bychom dokázali, že bod $(P \times Q)$ je obecný bod $\in U$ nad $k$. Proto bod $(P \times Q)$ má za obecnou specialisaci nad $k$ bod $(P \times Q_1)$ a tudíž bod $(P \times Q)$

má za obecnou specialisaci nad $k(P)$ bod $(P \times Q_1)$ (W, 29, věta 2). Potom podle th. 4, W, 76 plyne, že $Z_1$ splyne s některým konjugovaným obrazem variety $Z$, což je proti předpokladu. Tím je věta 3 dokázána.

**Věta 4.** *Všechny maximální variety $Z$ ve větě 3, jež mají za projekci na $V$ bod $P$, mají stejnou dimensi.*

Důkaz. To plyne z toho, že obecné body variet $Z$, $Z'$ jsou obecné specialisace nad $k(P)$ a tudíž mají stejnou dimensi (th. 3. W. 28). Rovněž platí, že $\dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$. $P \times Q$ je obecný bod $\in Z$ nad $\overline{k(P)}$, $\dim_{k(P)}(P \times Q) = \dim_{k(P)}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q)$. $P \times Q'$ je obecný bod $\in Z'$ nad $\overline{k(P)}$, $\dim_{k(P)} . (P \times Q) = \dim_{k(P)}(P \times Q') = \dim_{k(P)}(Q') = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$. $\dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$.

**Věta 5.** *Maximálních variet $Z \subset U$* (viz větu 4), *jež mají za projekci na $V$ obecný bod $P$ nad $k$ z variety $U'$, je konečný počet a je roven $[k_1 : k(P)]_s$.*

Důkaz. Ze všech těles z definice pro nějakou komponentu $Z$, která obsahují těleso $k(P)$, existuje jedno nejmenší — označíme je $k_1$ — a toto těleso $k_1$ je algebraické rozšíření tělesa $k(P)$ a počet různých konjugovaných obrazů variety $Z$ nad $k(P)$ je právě roven $[k_1 : k(P)]_s$. (Věta 5, W, 76.) Symbol $[k_1 : : k(P)]_s$ viz W, 9.

Poznámka. Konečný počet variet $Z$ plyne také z definice soustavy variet (W, 84).

**Definice 1.** *Podvarietu $T \subset (V \times W)$ jmenujeme algebraickou korespondencí mezi varietami $V$ a $W$, když projekce $T$ na $V$ je rovna $V$ a projekce $T$ na $W$ je rovna $W$.*

Nechť $k$ je společné těleso variet $T$, $V$, $W$. Nechť $P$ je obecný bod variety $V$ nad tělesem $k$. Potom podle věty 3, 4, 5 existuje na $T$ $\alpha = [k_1 : k(P)]_s$ konjugovaných variet $L_i$ $(i = 1, \ldots, \alpha)$ nad $k(P)$, které jsou stejné dimense nad $\overline{k(P)}$. Projekce těchto $L_i$ variet na $W$ označme $L_i^W$ a tyto variety vezmeme za odpovídající variety bodu $P \in V$ na $W$. Podobně existuje na $T$ $\beta = [k_1' : : k(Q)]_s$ konjugovaných variet $M_j$ $(j = 1, \ldots, \beta)$ nad $k(Q)$, které jsou stejné dimense nad $\overline{k(Q)}$, a bod $Q$ je obecný bod $\in W$ nad $k$. Projekce těchto $M_j$ variet na $V$ označme $M_j^V$ a tyto variety vezmeme za odpovídající variety bodu $Q \in W$ na varietě $V$.

**Věta 6.** *Buď $T \subset (V \times W)$ algebraická korespondence mezi varietami $V$ a $W$, $k$ společné těleso z definice pro $T$, $V$, $W$. Nechť $P$ je obecný bod $\in V$ na $k$ a $L_i^W$ jemu odpovídající variety na $W$. Nechť dále $Q$ je obecný bod $\in W$ nad $k$ a $M_j^V$ jemu odpovídající variety na $V$. Potom všechny variety $L_i^W (M_j^V)$ jsou algebraické nad $k(P)$ $(k(Q))$ a jsou konjugovanými obrazy nad $k(P)$ $(k(Q))$. Všechny variety $L_i^W$ mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{k(P)}$ a podobně všechny variety $M_j^V$ mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{k(Q)}$.*

Důkaz. Z věty 3 plyne, že všechny variety $L_i$ jsou konjugované obrazy nad $k(P)$. Z theoremu 6, W, 81 plyne, že všechny $L_i^W$ jsou algebraické nad tělesem $k(P)$. Je-li nyní $P \times Q_i$ obecný bod $\epsilon\, L_i$ nad $\overline{k(P)}$, je $Q_i$ obecný bod $\epsilon\, L_i^W$ nad $\overline{k(P)}$. Je-li $P \times Q_{i_1}$, $i \neq i_1$, obecný bod $\epsilon\, L_{i_1}$ nad $\overline{k(P)}$, je $Q_{i_1}$ obecný bod $\epsilon\, L_{i_1}^W$ nad $\overline{k(P)}$. Poněvadž $P \times Q_{i_1}$ je obecnou specialisací bodu $P \times Q_i$ nad $k(P)$, je také $Q_{i_1}$ obecnou specialisací bodu $Q_i$ nad $k(P)$ a mají tedy $L_i^W$ a $L_{i_1}^W$ nad $\overline{k(P)}$ touž dimensi a podle th. 4 W., 76 je $Q_i$ obecným bodem nad $k(P)$ jediného konjugovaného obrazu variety $L_i^W$ nad $k(P)$ a je tedy $L_{i_1}^W$ konjugovaný obraz variety $L_i^W$ nad $k(P)$. Podobně provedeme důkaz pro variety $M_j^V$. Označíme-li nyní dimensi variety $L_i^W$ nad $\overline{k(P)}$ $d$ a dimensi variety $M_j^V$ nad $k(Q)$ $\delta$, můžeme algebraickou korespondenci $T$ nad $k$ mezi $V$ a $W$ značit $T(\delta_\beta, d_\alpha)$.

**Věta 7.** *Nechť $T$ je alg. korespondence mezi $V$ a $W$ a nechť $k$ je těleso z definice pro $T$. Nechť $P \times Q$ je obecný bod $\epsilon\, T$ nad $k$. Potom $P$ je obecný bod $\epsilon\, V$ nad $k$ a $Q$ obecný bod $\epsilon\, W$ nad $k$.*

Důkaz. Nechť $P \times Q$ je obecný bod $\epsilon\, T$ nad $k$, potom podle theoremu 6, W 81 $P$, $Q$ jsou obecné body $\epsilon\, V$ a $\epsilon\, W$ nad $k$ a tedy také nad každým jiným tělesem z definice.

**Věta 8.** *Nechť $T^t$ je alg. korespondence mezi $V^r$ a $W^s$ a nechť $k$ je těleso z definice pro $T$. Nechť $P$ je obecný bod $\epsilon\, V$ nad $k$. Nechť bod $P$ je projekcí maximální variety $L \subset T$ na $V$ a bod $P \times Q$ její obecný bod nad $\overline{k(P)}$. Potom bod $P \times Q$ je obecným bodem algebraické korespondence $T$ nad $k$.*

Varieta $L \subset T$ je jeden z konjugovaných obrazů variet nad $k(P)$, které mají za svou projekci na $V$ bod $P$. Projekce $L^W$ variety $L$ na $W$ má bod $Q$ za obecný nad $\overline{k(P)}$. Podle věty 1 dimense variety $L$ nad $\overline{k(P)}$ je $d \geqq t - r$, neboť $k(P)\,.\,(P \times Q) = k(P)\,(Q)$ a podobně $\overline{k(P)}\,(P \times Q) = \overline{k(P)}\,(Q)$. $\mathrm{Dim}_{k(P)}(Q) = \mathrm{dim}_{\overline{k(P)}}(Q)$ podle věty 2, W, 3. Bod $P \times Q$ je však bod z variety $T$, proto jeho dimense nad $k$ je $\leqq t$. Poněvadž $\mathrm{dim}_k(P \times Q) = \mathrm{dim}_{k(P)}(Q) + \mathrm{dim}_k(P) = d + r$, dostáváme $t \geqq d + r$. Máme $t \leqq d + r$ a $t \geqq d + r$, čili $t = d + r$. Obecný bod $P \times Q \,\epsilon\, L$ nad $\overline{k(P)}$ má nad $k$ dimensi $t$ a tedy je obecným $\epsilon\, T$ nad $k$. Projekce tohoto bodu je obecný bod $\epsilon\, W$ nad $k$ podle věty 7. Stejná úvaha pro obecný bod $R \,\epsilon\, W$ nad $k$ vede k rovnici $t = s + \delta$ a proto $r + d = s + \delta$. Poslední rovnice vyjadřuje tak zvaný princip sčítání konstant v algebraické korespondenci, který vyslovíme větou:

Když v $t$ dimensionální alg. korespondenci $T^t$ mezi varietami $V^r$ a $W^s$ o společném tělese z definice $k$ obecnému bodu $P$ nad $k \,\epsilon\, W$ odpovídá na $W$ $\alpha$ $d$-dimensionálních nad $k(P)$ konjugovaných variet a obráceně obecnému bodu $Q$ nad $k \,\epsilon\, W$ odpovídá na $V$ $\beta$ $\delta$-dimensionálních nad $k(Q)$ konjugovaných variet, pak je $t = r + d = s + \delta$.

Z předchozího plyne, že v algebr. korespondenci $T^t$ mezi $V^r$ a $W^s$ o společném tělese z definice $k$ obecnému bodu $P$ nad $k$ z variety $V$ odpovídá na $W$ $\alpha$

$(t - r)$-dimensionálních nad $k(P)$ konjugovaných variet a obecnému bodu $Q$ nad $k \in W$ odpovídá $\beta$ $(t - s)$-dimensionálních nad $k(Q)$ konjugovaných variet.

**Věta 9.** *Buď $T \subset (V \times W)$ alg. korespondence mezi varietami $V$ a $W$, $k$ společné těleso z definice pro $T$, $V$, $W$. Když obecnému bodu $\in V$ nad $k$ odpovídají $d$-dimensionální variety $L_i^W$, tak každému bodu $\in V$ odpovídají nejméně $d$-dimensionální variety na $W$. Podobný výsledek platí pro body variety $W$.*

Důkaz. Nechť $P'$ je nějaký bod $\in V$. Pak komponenty průniku $T \cap (P' \times W)$, které mají za projekci na $V$ bod $P'$, mají podle věty 1 dimensi aspoň $t - r = d$. Podobně pro body variety $W$.

**Věta 10.** *Nechť $V$ a $W$ jsou dvě variety definované nad tělesem $k$; nechť $P$, $Q$ jsou obecné body $\in V$ a $\in W$ nad $k$. Potom existuje alg. korespondence $T$, definovaná nad $k$ mezi $V$ a $W$ taková, že bod $P \times Q$ je obecný bod nad $k \in T$, když a jen když $k(P, Q)$ je regulární rozšíření nad $k$.*

Důkaz. Když $k(P, Q)$ je regulární rozšíření nad $k$, pak bod $P \times Q$ má locus $T$ nad $k$, a poněvadž $P \times Q \in V \times W$, je $T \subset V \times W$. $P \times Q$ je obecný bod $\in T$ nad $k$. Projekce $T$ na $V$ a $W$ je zase $V$ a $W$, tedy podle definice 1 je $T$ algebraická korespondence nad $k$ mezi $V$ a $W$.

Obráceně, když $P \times Q$ je obecný bod nad $k$ z alg. korespondence $T \subset V \times W$, pak $T$ je locus bodu $P \times Q$ nad $k$ a rozšíření $k(P, Q)$ je regulární nad $k$ (W, 68).

Poznámka. Jestliže bod $P$ je obecný bod $\in V$ nad $k$ a $Q$ je obecný bod $\in W$ nad $k$, které jsou nezávislé nad $k$, pak algebraická korespondence $T = V \times W$, v níž každému bodu $P \in V$ odpovídá celá varieta $W$ a každému bodu $Q \in W$ odpovídá celá varieta $V$. Takovouto alg. korespondenci mezi varietami $V$ a $W$ nad $k$ nazýváme triviální. Jestliže tedy mezi varietami $V$ a $W$, které jsou definovány nad tělesem $k$, existuje netriviální alg. korespondence nad $k$, pak obecný bod $P \in V$ nad $k$ a obecný bod $Q \in W$ nad $k$ jsou takové, že $k(P, Q)$ je regulární rozšíření tělesa $k$ a body $P$, $Q$ jsou závislé nad $k$. (Definici nezávislých bodů viz W, 3.)

**Definice 2.** *Nechť $T^t \subset V^r \times W^s$ je alg. korespondence nad $k$ mezi $V^r$ a $W^s$. Pak bod $P \in V$, $(Q \in W)$ nazýváme regulární bod korespondence, když mu na varietě $W$, $(V)$ odpovídají variety dimense $t - r$, $(t - s)$.*

Z definice 2 a z věty 8 plyne, že každý obecný bod nad $k \in V$ (nad $k \in W$) je regulární pro alg. korespondenci $T$.

**Věta 11.** *Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad $k$ mezi $V$ a $W$. Nechť $P$ a $P'$ jsou dva body $\in V$ takové, že $P'$ je regulární bod $\in T$ a že $P'$ je specialisací bodu $P$ nad $k$. Potom $P$ je také regulární bod $\in T$.*

Tato věta je bezprostředním důsledkem věty 12.

**Věta 12.** *Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad $k$ mezi $V$ a $W$. Nechť $P$ a $P'$ jsou dva body $\in V$ takové, že $P'$ je konečnou specialisací bodu $P$ nad tělesem* *k. Potom ke každé varietě odpovídající bodu $P$ existuje aspoň jedna varieta odpovídající bodu $P'$, která má větší nebo stejnou dimensi.*

Důkaz. Označme $W(P)$ množinu všech bodů $\epsilon W$, které v korespondenci $T$ odpovídají bodu $P \epsilon V$, a podobně $W(P')$ pro bod $P'$. $W(P)$ dostaneme, když soustavu variet $T \cap (P \times W)$ promítneme na varietu $W$ a podobně $W(P')$ dostaneme, když promítneme na varietu $W$ soustavu variet $T \cap (P' \times W)$. Soustava $T \cap (P \times W)$ je normálně algebraická nad $k(P)$ a soustava $T \cap \cap (P' \times W)$ je normálně algebraická nad $k(P')$. Nechť $C$ je libovolná komponenta soustavy $T \cap (P \times W)$, která má obecný bod $(P, Q)$ nad $\overline{k(P)}$. Nechť nyní $(P', Q')$ je konečná specialisace bodu $(P, Q)$ nad $k$ a taková, že bod $Q'$ je nějakou isolovanou specialisací bodu $Q$ nad specialisací $P \to P'$ nad $k$. Pak podle věty 13 (W, 65) $\dim_{k(P')}(Q') \geqq \dim_{k(P)}(Q)$. Projekce bodu $(P', Q')$ na varietu $V$ je rovna bodu $P'$; proto bod $(P', Q') \epsilon T \cap (P' \times W)$. Bod $(P', Q')$ leží tedy aspoň na jedné komponentě soustavy variet $T \cap (P' \times W)$. Označme jednu takovou z nich $C'$, takže $(P', Q') \epsilon C'$. Nechť obecný bod nad $\overline{k(P')}$ variety $C'$ je $P' \times \overline{Q}$. Potom $\dim_{\overline{k(P')}}(P', \overline{Q}) \geqq \dim_{\overline{k(P')}}(P', Q')$. Z poslední relace plyne, $\dim_{k(P')}(P', \overline{Q}) \geqq \dim_{k(P')}(P', Q')$. Vzhledem k dříve dokázané relaci $\dim_{k(P')}(Q') \geqq \dim_{k(P)}(Q)$, dostáváme $\dim_{k(P')}(P'\overline{Q}) \geqq \dim_{k(P)}(Q)$. Označme $\overline{C}, \overline{C}'$ projekce variety $C$, $C'$ na varietu $W$. Poněvadž $\dim_{\overline{k(P)}}(P, Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}\overline{C}$ a podobně $\dim_{\overline{k(P')}}(P', \overline{Q}) = \dim_{\overline{k(P')}}(\overline{Q}) = \dim_{k(P')}(\overline{Q}) = \dim_{\overline{k(P')}}C'$, plyne odtud, že $\dim_{\overline{k(P')}}\overline{C}' \geqq \dim_{k(P)}\overline{C}$.

Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad $k$ mezi $V$ a $W$ a nechť $T$ a $V$ mají touž dimensi nad $k$. Potom obecnému bodu $P$ nad $k \epsilon V$ odpovídá $\alpha$ bodů na $W$, jež jsou algebraické nad $k(P)$. Obecnému bodu $Q$ nad $k \epsilon W$ odpovídá $\beta$ variet, jež jsou algebraické nad $k(Q)$. $T$ je konečná nad $P$ (W, 106), což plyne z věty 2.

**Definice 3.** *$T \subset V \times W$ jmenujeme algebraickou korespondencí $(\beta, \alpha)$-značnou nad tělesem $k$ mezi varietami $V$, $W$, když projekce $T$ na $V$ rovná se $V$ a projekce $T$ na $W$ rovná se $W$ a když $T$ je konečná nad $P$ a nad $Q$, kde $P$ je obecný bod nad $k \epsilon V$ a $Q$ je obecný bod nad $k \epsilon W$.*

Zavedeme-li ještě pojem „*projekce z $T$ k $V$ a z $T$ k $W$ je regulární*", dostáváme se tak k definici biracionální korespondence $T$ na $k$ mezi varietami $V$ a $W$. (W, 190.) Vlastnosti biracionálních korespondencí nalezne čtenář ve W, 109 a násl.

Jako příklady na užití principu sčítání konstant dokážeme následující věty.

**Věta 13.** *Nechť $V^r$ $(r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem $k$ v prostoru $S^n$. Pak komponenty průniku obecné nadroviny $(u_1, \ldots, u_n)$ prostoru $S^n$ a variety $V^r$ jsou $(r - 1)$-dimensionální variety, algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_n)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tělesem $k(u_1, \ldots, u_n)$.*

Důkaz. Nechť $(\xi)$ je obecný bod $\epsilon V$ nad tělesem $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Uvažujme všechny nadroviny z prostoru $S^n$, které tímto bodem procházejí, což je vyjádřeno rovnicí $u_1\xi_1 + \ldots + u_n\xi_n + 1 = 0$. Poněvadž $(\xi)$ je obecný bod $\epsilon V$ nad $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$, plyne z toho, že $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1})$ je regulární rozšíření nad $k$. Ukážeme nyní, že existuje alg. korespondence s obecným bodem $(\xi, u_1, \ldots \ldots, u_n)$ nad $k$ mezi $V$ a $S^n$, kde $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$. Soustavu souřadnicovou jsme volili tak, že $\xi_n \neq 0$ a $\xi_n$ je transcend. nad $k$. Musíme proto dokázat, že bod $(\xi, u_1, \ldots, u_n)$ má locus $T$ nad $k$, t. j., že $k(\xi, u_1, \ldots \ldots, u_n)$ je regulární rozšíření nad $k$ a že projekce $T$ na $V$ je $V$ a projekce $T$ na $S^n$ je $S^n$.

Dosadíme-li do $k(\xi, u_1, \ldots, u_n)$ za $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$, dostaneme, že $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1}) = k(\xi, u_1, \ldots, u_n)$, a poněvadž $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1})$ je regulární rozšíření, je takové také $k(\xi, u)$ a bod $(\xi, u)$ má tedy locus nad $k$, který jsme označili $T$. Projekce $T$ na $V$ je zase zřejmě $V$. Projekce $T$ na $S^n$ je také $S^n$, neboť $u_1, \ldots, u_n$ je množina $n$ nezávislých veličin nad $k$. Předpokládejme, že $u_1, \ldots, u_n$ jsou algebraicky závislé nad $k$, pak $u_n$ je algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Potom $f(u_n) = u_n^\alpha + a_1 u_n^{\alpha-1} + \ldots + a_\alpha = 0$, kde $f(x) \epsilon k[u_1, \ldots \ldots, u_{n-1}][x]$ je irreducibilní polynom. Dosadíme-li za $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$, dostaneme

$$[-(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n]^\alpha + a_1[\ldots]^{\alpha-1} + \ldots = 0 .$$

Po vynásobení $\xi_n^\alpha$ dostaneme

$$[-(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1})]^\alpha + a_1\xi_n[\ldots]^{\alpha-1} + \ldots = 0 .$$

Poněvadž $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ jsou algebraicky nezávislé nad $k(\xi)$, musí koeficienty u všech monomů v $u_1, \ldots, u_{n-1}$ býti rovny nule. Tato vlastnost platí i pro koeficient u monomu nultého stupně, z čehož plyne $(-1)^\alpha + a_{10}(-1)^{\alpha-1}\xi_n + \ldots \ldots + a_{\alpha 0}\xi_n^\alpha = 0$, kde $a_{i0} \epsilon k$. Poněvadž $\xi_n$ je algebraicky nezávislé nad $k$, musí všechny koeficienty v poslední rovnici býti rovny nule, což vede ke sporu, neboť $(-1)^\alpha \neq 0$. Podle principu konstant platí $r + n - 1 = n + \delta$, odtud plyne $\delta = r - 1$. Tedy obecné nadrovině $\epsilon S^n$ odpovídají $(r-1)$-dimensionální variety algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_n)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tímto tělesem.

Úplně stejně bychom dokázali větu 14.

**Věta 14.** *Nechť $V^r (r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem $k$ v $S^n$. Pak komponenty průniku obecné nadplochy v prostoru $S^n$ a variety $V$ jsou $(r-1)$-dimensionální variety, které jsou algebraické nad $k(u)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tělesem $k(u)$. [$(u)$ je množina koeficientů nějaké obecné nadplochy.]*

**Věta 15.** *Nechť $V^r (r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem $k$ v $S^n$ a $\Pi^{n-1}$ varieta nad týmž tělesem. Potom $V^r \cap \Pi^{n-1} = V^r$ nebo $V^r \cap \Pi^{n-1}$ je soustava variet, jejíž každá komponenta má dimensi $r - 1$ a všechny komponenty jsou algebraicky konjugované nad $k$.*

Důkaz plyne takřka bezprostředním užitím věty 14 a věty 9.

Poznámka. Věta 15 je bezprostředním důsledkem th. 7, W, 86.

## Резюме

## АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ

ЯН БИЛЕК (Jan Bílek), Прага

(Поступило в редакцию 26/X 1956 г.)

Основные свойства алгебраического соответствия между двумя алгебраическими многообразиями, определенными над полем, имеющим характеристику 0, хорошо известны. (См. B. L. van der WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, HODGE-PEDOE, Methods of algebraic Geometry, том II.)

В настоящей работе рассматривается алгебраическое соответствие между двумя алгебраическими многообразиями над полем с произвольной характеристикой. В изучении этого соответствия используется метод, являющийся расширением метода, описанного для частного случая — бирационального соответствия — в книге A. WEIL, Foundations of algebraic geometry, 1946. Если же, в частности, поле коэффициентов заменим полем, имеющим характеристику 0, то из полученных нами результатов получатся результаты, приведенные в цитированных работах.

## Summary

## THE ALGEBRAIC CORRESPONDENCES

JAN BÍLEK, Praha

(Received November 26, 1956)

The fundamental properties of algebraic correspondences between two algebraic varieties defined over the field of zero characteristic are well known (see B. L. van der WAERDEN: Einführung in die algebraische Geometrie, HODGE-PEDOE, Methods of algebraic geometry, vol. II.).

The present paper considers the algebraic correspondence between algebraic varieties over a field of an arbitrary characteristic. To study this correspondence, an extended method is used, which is described in A. WEIL, Foundations of Algebraic Geometry, 1946, for the special case of the birational correspondence. On specialization of the coefficients field into the field of the zero characteristic, the present results are transformed to those shown in the above-cited books.