Ivo Babuška; Rudolf Výborný
O Dirichletově úloze na neomezených oblastech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 104--105

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108193`

ZOBECNĚNÍ POJMU PROSTORU S KONEXÍ

(Referát ALOISE ŠVECE, přednesený v matematické obci pražské dne 30. září 1957.)

Prostor s afinní konexí je definován následujícím způsobem: Každému bodu (u) oblasti parametrů $\Omega \subset A_n$ buď přiřazen cetroafinní lokální prostor $A_n(u)$ s centrem $M(u)$; každému oblouku γ mezi body $\underset{1}{(u)}$, $\underset{2}{(u)}$ buď přiřazena afinita mezi prostory $A_n\underset{1}{(u)}$ a $A_n\underset{2}{(u)}$. Zmíněná konexe mezi lokálními prostory je dána známým způsobem analyticky, což zaručuje její dostatečnou hladkost. Lokální prostory mohou být ovšem i prostory projektivní, eukleidovské a afinity mezi nimi nahrazeny kolineacemi, resp. shodnostmi; pak dostáváme prostory s projektivní a eukleidovskou konexí.

Definice Königovy variety (nebo podle nové Kanitaniho terminologie prostoru s majorantní konexí) je shodná s definicí prostoru s afinní nebo jinou konexí, jenom dimense lokálních prostorů (označme ji m) je různá od dimense n oblasti parametrů Ω. Tyto prostory zavedl R. KÖNIG (Jahresb. D. M. Verein, 28, 1919, 213—228) a upozornil na ně J. A. SCHOUTEN (C. R. 178, 1924, 2044—2046); v novější době studoval prostory s projektivní majorantní konexí $(m > n)$ J. KANITANI (většinou v Mem. Univ. Kyoto, u nás nepřístupné). Königovy prostory se vyskytují přirozeným způsobem při studiu variet v prostorech s konexí: Buď dána na př. varieta V_r v prostoru s projektivní konexí P_n a v každém lokálním prostoru každého jejího bodu buď zvolen bod M; množina těchto bodů je spolu s příslušnými lokálními prostory, mezi nimiž je konexe určena konexí prostoru P_n, Königovým prostorem. Je pravděpodobné, že na př. celou teorii transformací ploch v projektivním prostoru S_3 bude možno zobecniti na plochy v P_3. Ve své nepublikované práci jsem definoval dualisaci π^* plochy $\pi \subset P_3$ (je to opět Königova varieta $n = 2, m = 3$), zjistil geometrickou interpretaci CARTANEM uvažovaných zobecnění Darbouxových křivek a nalezl projektivní lineární elementy plochy π a π^*, jež se zachovávají při jejich projektivní deformaci. Ve své práci „Prostory s konexí II“ (cyklost. MÚČSAV) jsem podrobně studoval plochu v trojdimensionálním prostoru s eukleidovskou konexí, zvláště souvislost mezi hlavními křivkami a rozvinutelnými plochami kongruence normál.

Prostor s konexí je možno zobecniti i jiným způsobem: Každému bodu oblasti Ω buď přiřazen lokální prostor (na př. projektivní) S_μ, jehož centrum je pak nahrazeno podprostorem S_m; mezi lokálními prostory S_μ je pak dána konexe obvyklým způsobem. Tento prostor zobecňuje varietu podprostorů projektivního prostoru právě tak, jako Königův prostor zobecňuje bodovou varietu projektivního prostoru. V práci „Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective“ (Čech. mat. ž. 7 (82), 96—114) jsem studoval případ $n = 4$, $m = 1$, $\mu = 3$, hlavně však dvojdimensionální variety tohoto prostoru, což je vlastně zobecnění teorie kongruencí přímek v P_3. Případem $n = 2$, $m = 1$, $\mu = 3$ jsem se potom podrobně zabýval v práci „Prostory s konexí III“ (cyklost. MÚČSAV).

Domnívám se, že soustavné studium těchto zobecněných prostorů by značně přispělo k větší geometričnosti při studiu variet v prostorech s konexí.

Alois Švec, Liberec

O DIRICHLETOVĚ ÚLOZE NA NEOMEZENÝCH OBLASTECH

(Referát o přednášce IVO BABUŠKY a RUDOLFA VÝBORNÉHO, konané v matematické obci pražské dne 7. října 1957.)

Přednášející nejdříve podali historický přehled o řešení Dirichletovy úlohy při spojité hraniční funkci a nejobecnější hranici. Potom referovali o vlastní práci zobecňující výsledky J. MAŘÍKA (viz Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 257—282).

Byla dokázána existence zobecněného řešení Dirichletovy úlohy pro oblast G (nemusí být omezená) a spojitou hraniční funkci f, jestliže existují funkce φ a ψ spojité na $\overline{G}$; φ je subharmonická, ψ superharmonická, $\varphi \leqq f \leqq \psi$ na hranici G a $\varphi \leqq \psi$ v G. Zobecněným řešením je míněna funkce harmonická, která ve všech regulárních bodech nabývá předepsaných hodnot. Mezi všemi zobecněnými řešeními u, pro které platí $u \geqq \varphi$ existuje nejmenší, označme ho W. Funkci W lze aproximovat řešením Dirichletovy úlohy na oblasti G_1, která aproximuje G a na jejíž hranici je dáno vhodné spojité rozšíření funkce f. Dále byla v přednášce ukázána souvislost funkce W s Perronovou metodou horních a dolních funkcí.

Byla rozřešena otázka jednoznačnosti ve třídě omezených funkcí. Dirichletova úloha je pro oblast $G \subset E_3$ jednoznačně řešitelná tehdy a jen tehdy, jestliže řada $\Sigma\gamma_n\, 2^{-n}$ diverguje. Přitom γ_n je kapacita množiny $\underset{x}{\mathfrak{E}}[x \in G,\ 2^n \leqq |x| \leqq 2^{n+1}]$. Z této věty lze odvodit jednoduché geometrické kriterium jednoznačnosti:

Jestliže komplement oblasti G obsahuje list $L = \underset{x}{\mathfrak{E}}[0 \leqq x_2 \leqq x_1^{-\mu};\ x_1 \geqq 1,\ x_3 = 0]$, μ libovolné reálné, potom je Dirichletova úloha jednoznačně řešitelná ve třídě omezených funkcí.

Z věty řešící otázku jednoznačnosti ve třídě omezených funkcí (na event. neomezené oblasti) lze pomocí Kelvinovy transformace odvodit kriteria jednoznačnosti na omezené oblasti ve třídě funkcí, které nerostou rychleji než elementární řešení. Tak získáme větu zobecňující výsledky Zarembovy.

Věta. *Buď G omezená oblast, x^i $(i = 1, \ldots, s)$, y^j $(j = 1, \ldots, r)$ konečný počet bodů hranice oblasti G. Body x^i buďte regulární. Buď u funkce harmonická ve všech regulárních bodech s výjimkou bodů x^i spojitě prodlužitelná k nule. Nechť dále* $u(x) = O\left(\dfrac{1}{\varrho(x, x^i)}\right)$ a $u(x) = o\left(\dfrac{1}{\varrho(x, y^j)}\right)$; potom $u \equiv 0$.

Rudolf Výborný, Praha