Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

Rozklad konečného pravidelného grafu nepárneho stupňa na dva faktory

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 27--32

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108192`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ROZKLAD KONEČNÉHO PRAVIDELNÉHO GRAFU NEPÁRNEHO STUPŇA NA DVA FAKTORY

ANTON KOTZIG. Bratislava

DT:513.19.001

(Došlo dne 8. října 1956)

V článku odvodzuje sa nutná a postačujúca podmienka pre existenciu rozkladu konečného pravidelného grafu $(2n + 1)$-ého stupňa na dva faktory a to na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa pri ľubovolnom prirodzenom čísle n.

1

Najstaršie problémy z teorie konečných grafov[1]), ktoré boli riešené, sú problémy tohoto druhu: aké podmienky musí splňovat graf G, aby v G existoval uzavretý ťah (nazývaný tiež eulerovskou čiarou) obsahujúci všetky hrany grafu G. Už L. EULER v r. 1736 dokázal, že nutnou podmienkou pre existenciu takéhoto ťahu je táto podmienka: G je súvislý graf, v ktorom každý uzol je uzlom párneho stupňa. Dôkaz, že uvedená podmienka je tiež postačujúca, vykonal HIERHOLZER r. 1873. Iný základný problém z teorie grafov rieši známa Listingova veta z r. 1847 o rozklade grafu na systém otvorených ťahov (jej dôkaz podal až LUCAS v r. 1882), ktorá hovorí, že v súvislom grafe G, ktorý má $2m$ ($m > 0$) uzlov nepárneho stupňa, existuje vždy taký systém otvorených ťahov $\mathfrak{S} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, že každá hrana grafu G je hranou práve jedného ťahu $\in \mathfrak{S}$ a systém $\mathfrak{S}$ s touto vlastnosťou obsahuje najmenej m otvorených ťahov. Systému $\mathfrak{S}$ otvorených ťahov s uvedenou vlastnosťou, ktorý má práve m ťahov, budeme ďalej hovoriť *Listingov systém ťahov.*

Vzhľadom na to, že počet uzlov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe je párny (dôkaz tohoto tvrdenia vykonal už EULER r. 1736), pripomenuté vety riešia úplne problém existencie takého rozkladu súvislého grafu na minimálny počet ťahov, že každá hrana grafu je hranou práve jednoho ťahu (odkazy na príslušnú literatúru najde čitateľ v [1]).

Na možnosti použitia týchto dávno známych poznatkov pri riešení niektorých problémov z teorie pravidelných grafov poukázal som v nedávno uverejnených článkoch (Poznámky k Listingovej vete o rozkladoch grafu na ťahy,

[1]) V celom článku pod grafom rozumie sa vždy konečný graf.

Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), 396—404 a práca [2]). V tomto článku odvodím — vychádzajúc z pripomenutých poznatkov a naväzujúc na oba svoje články — nutnú a postačujúcu podmienku pre existenciu rozkladu pravidelného grafu $(2n + 1)$-ého stupňa na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa pri ľubovoľnom prirodzenom čísle n.

Chcem tak ukázať, že štúdium ťahov (otvorených i uzavrených, najmä eulerovských čiar) z rôznych hľadísk skrýva ešte veľa možností rozvoja teórie grafov i keď niektoré zo základných otázok v tomto smere sú už dávno zodpovedané.

Poznamenajme, že napr. o podmienkach pre existenciu rozkladu pravidelného grafu nepárného stupňa aspoň na dva faktory — až na malé výnimky — nie je takmer nič známe. Výnimku tu tvoria pravidelné grafy tretieho stupňa neobsahujúce mosty, o ktorých dokázal PETERSEN v r. 1891, že sa dajú vždy rozložiť na dva faktory a tak zvané párne pravidelné grafy (pod párnym grafom sa rozumie graf, ktorý neobsahuje žiadnu kružnicu s nepárnym počtom hrán), o ktorých je známe (pozri [1]), že sa dajú vždy rozložiť na n lineárnych faktorov. Pokiaľ ide o ostatné pravidelné grafy nepárneho stupňa, dali sa skoro všetky doteraz známe poznatky o možnostiach ich rozkladu na dva faktory zhrnúť do niekoľko málo poznámok (ako to urobil napr. König v [1], str. 195) týkajúcich sa najmä úlohy, ktorú hrajú mosty pri takýchto rozkladoch. Domnienka Petersenova z r. 1891, podľa ktorej pravidelný graf nepárneho stupňa nedá sa rozložiť na faktory (t. j. takýto graf je primitívny) len vtedy, keď obsahuje mosty, nebola doteraz ani vyvrátená, ani potvrdená, ačkoľvek už dlhú dobu púta pozornosť mnohých matematikov.

2

Dokážme platnosť tejto vety:

Pravidelný graf $(2n + 1)$-ého stupňa G (kde n je ľubovoľné prirodzené číslo) o $2m$ uzloch dá sa rozložiť na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa práve vtedy, keď v G existuje Listingov systém ťahov, ktorého každý ťah má nepárny počet hrán

Dôkaz. I. Nech v G existuje Listingov systém ťahov $\mathfrak{S} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán, a nech ťah $P_i \in \mathfrak{S}$ je popísaný touto postupnosťou prvkov $\in G$:

$$P_i = u_1(i), h_{1,2}(i), u_2(i), \ldots, h_{2r_i-1,2r_i}(i), u_{2r_i}(i) ; \quad (i = 1, 2, \ldots, m) ,$$

kde $u_x(i)$ sú uzly, $h_{x,x+1}(i)$ sú hrany a hrana $h_{x,x+1}(i)$ je incidentná s uzlami $u_x(i) \neq u_{x+1}(i)$ $(x = 1, 2, \ldots, 2r_i - 1)$.

V grafe $\overline{G}$, ktorý pozostáva z prvkov a len prvkov istého otvoreného ťahu grafu G, sú koncové uzly ťahu uzlami nepárneho stupňa v $\overline{G}$ a ostatné uzly $\in \overline{G}$ sú uzlami párneho stupňa v $\overline{G}$. Pretože ľubovoľný uzol $u \in G$ je uzlom nepárneho stupňa v G a ľubovoľná hrana ϵ G patrí práve do jedného ťahu Listingovho systému, je každý uzol ϵ G nepárny počet krát (tedy najmenej raz) koncovým uzlom ťahov ϵ $\mathfrak{S}$. Ak označíme ϱ_t počet uzlov ϵ G, ktoré sú koncové práve v t ťahoch, platí $\varrho_0 = 0$ a ďalej: $2m = \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot \varrho_r = (\sum_{r=0}^{\infty} \varrho_r) + \varrho_2 + 2\varrho_3 + 3\varrho_4 + \ldots$; avšak $\sum_{r=0}^{\infty} \varrho_r = 2m$, preto $\varrho_r = 0$ pre $r > 1$. Výsledok $\varrho_1 = 2m$. Ľubovoľný uzol $u \in G$ je koncovým uzlom práve jedného ťahu ϵ $\mathfrak{S}$.

Medzi symbolmi $u_x(i)$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $x \in \{2, 3, \ldots, 2r_i - 1\}$ musí byť práve n takých, ktoré označujú uzol u, lebo každý iný uzol otvoreného ťahu než koncový uzol súsedí s dvoma hranami v postupnosti P_i, s ktorými je incidentný, a pretože $u \in G$ je uzlom $(2n + 1)$-ého stupňa v G, musí byť (okrem toho, že je raz koncovým uzlom) práve n-krát vnútorným uzlom ťahov ϵ $\mathfrak{S}$.

Rozdeľme hrany grafu G do tried H_0, H_1 takto: do triedy H_1 zaraďme všetky hrany $h_{2x-1,2x}(i)$, kde $i = 1, 2, \ldots, m$; $x = 1, 2, \ldots, r_i$, a do triedy H_0 zaraďme všetky ostatné hrany ϵ G.

Ľubovoľný uzol $u \in G$ je incidentný práve s n hranami triedy H_0, lebo vnútorný uzol ťahu ϵ $\mathfrak{S}$ je incidentný práve s jednou hranou ťahu patriacou do H_0 a hrana ťahu ϵ $\mathfrak{S}$, s ktorou je incidentný koncový uzol ťahu, patrí do H_1 (vieme už, že ľubovoľný uzol $u \in G$ je $n$krát vnútorným uzlom ťahov ϵ $\mathfrak{S}$). Množina hrán H_0 je preto množinou hrán istého faktora n-tého stupňa G_0 grafu G. Množina H_1 ostatných hrán grafu G je množinou hrán faktora G_1, ktorý je zrejme faktorom $(n + 1)$-ého stupňa grafu G.

Ak teda existuje v G Listingov systém ťahov $\mathfrak{S}$, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán, potom G se dá rozložiť na dva faktory G_0, G_1, z ktorých G_0 je n-tého, G_1 je $(n + 1)$-ého stupňa.

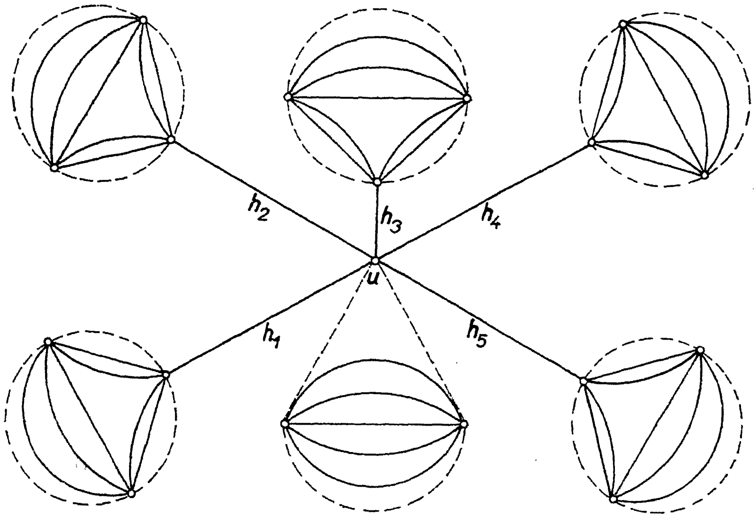
II. Nech existuje rozklad grafu G na faktory G_0, G_1, pričom G_0 je faktorom n-tého stupňa v G (a teda G_1 je faktorom $(n + 1)$-ého stupňa v G).

Označme znakom H_0 resp. H_1 množinu hrán faktora G_0 resp. G_1. Označme uzly grafu G znakmi $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ a utvorme graf G' z grafu G tak, že spojíme novou hranou h'_i uzly u_i, u_{i+m} pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Označenie uzlov ϵ G voľme pritom tak, aby graf G' bol súvislý. Toho vždy možno docieliť, lebo G má najviac m komponent a ku G pridávame m nových hrán; teda dvojice uzlov, ktoré spájame, možno voliť tak, aby G' bol súvislý graf.

Položme $H'_0 = H_0 + \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$; $H'_1 = H_1$. Platí: graf G' má tie isté uzly ako graf G a ľubovoľný uzol $u \in G'$ je incidentný práve s $(n + 1)$ hranami ϵ H'_0 a je incidentný práve s $(n + 1)$ hranami ϵ H'_1. Pretože množiny H'_0, H'_1 sú zrejme disjunktné, sú tieto množiny množinami hrán faktorov G'_0, G'_1, ktoré sú oba faktormi $(n + 1)$-ého stupňa v G'.

V práci [2] som dokázal, že v grafe G' existuje taká eulerovská čiara E, že ak obiehame po jej hranách, striedavo prechádzame cez hranu ϵ H'_0 a cez hranu ϵ H'_1.

Všetky hrany h'_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), ktoré sme pridali ku grafu G, aby vznikol graf G', patria do H'_0. Teda medzi dvoma po sebe idúcimi prechodmi cez hrany $\in \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$ pri obiehaní po eulerovskej čiare E prejdeme nepárny počet hrán $\in G$. Ak preto zrušíme v E všetky hrany $\in \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$, rozpadne sa eulerovská čiara E na m otvorených ťahov, z ktorých každý: 1. obsahuje len



Obr. 1.

prvky $\in G$; 2. má nepárny počet hrán (že sú to otvorené ťahy je zrejmé z toho, že každý uzol $\in G$ je incidentný práve s jednou hranou $\in \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$). Pretože ľubovoľná hrana $\in G$ vyskytuje sa práve v jednom z týchto ťahov, uvedeným spôsobom konštruovaný systém otvorených ťahov je Listingovým systémom ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán.

Ak teda v G existuje rozklad na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa, potom existuje v G Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán.

Rozklad grafu G na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa existuje práve vtedy, keď v G existuje Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán. Dôkaz vety je vykonaný.

Poznámka. Ak v pravidelnom grafe $(2n + 1)$-ého stupňa G neexistuje taký Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán, neznamená to ešte, že G je primitívny graf. Graf G znázornený na obrázku 1 je pravidelný graf siedmeho stupňa, ktorý se dá rozložiť na faktor piateho a faktor druhého stupňa (hrany faktora piateho stupňa sú znázornené plnými čiarami, hrany kvadratického faktora čiarami prerušovanými, v. obr. 1); teda G nie je primitívny graf. Avšak G nedá sa rozložiť na faktor tretieho a faktor štvrtého stupňa (z toho podľa našej vety vyplýva, že neexistuje v G taký Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má neparný počet hrán), lebo G obsahuje uzol u, ktorý je incidentný s piatimi mostami h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, a je známe, že faktor nepárneho stupňa ľubovoľného pravidelného grafu obsahuje všetky mosty grafu (pozri [1] str. 195). Podobný graf pre $n > 3$ si čitateľ snadno zostrojí sám.

LITERATÚRA

[1] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[2] *A. Kotzig:* Eulerovské čiary a rozklady pravidelného grafu párneho stupňa a na dva faktory rovnakého stupňa, Mat. fyz. časopis 1956, č. 3.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНОГО ПРАВИЛЬНОГО ГРАФА НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ НА ДВА МНОЖИТЕЛЯ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 3/X 1956 г.)

В работе выводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы существовало разложение конечного правильного графа $(2n + 1)$-ой степени на два множителя (n-той и $(n + 1)$-ой степени). Доказана следующая теорема:

Пусть G — конечный правильный граф $(2n + 1)$-ой степени (где n — произвольное натуральное число), имеющий $2m$ вершин. Граф G разлагается на два множителя (n-той и $(n + 1)$-ой степени) тогда и только тогда, если в G существует система $\mathfrak{S}$, состоящая из открытых ветвей $Z_1, Z_2, \ldots, \ldots, Z_m$, причем

1. *Каждое из ребер графа G принадлежит точно одной ветви из $\mathfrak{S}$,*
2. *Каждая ветвь имеет нечетное число ребер.*

Zusammenfassung

DIE ZERLEGUNG EINES ENDLICHEN REGULÄREN GRAPHEN UNGERADEN GRADES IN ZWEI FAKTOREN

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Eingelangt 8. X. 1956)

In der Arbeit wird die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Zerlegung eines endlichen regulären Graphen $(2n + 1)$-en Grades

in zwei Faktoren (n-ten und $(n + 1)$-en Grades) abgeleitet. Folgender Satz wird bewiesen:

Es sei G ein beliebiger endlicher regulärer Graph $(2n + 1)$-en Grades (n ist eine beliebige ganze positive Zahl), welcher $2m$ Knotenpunkte enthält. Der Graph G zerfällt in zwei Faktoren (n-ten und $(n + 1)$-en Grades) dann und nur dann, wenn in G ein System $\mathfrak{S}$ von offenen Zügen $\mathfrak{S} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ mit den Eigenschaften

1. *jede Kante des Graphen G gehört genau zu einem Zuge aus $\mathfrak{S}$,*
2. *jeder Zug besitzt eine ungerade Anzahl von Kanten, existiert.*