Časopis pro pěstování matematiky

Milan Sekanina

O rozkladech eukleidovských prostorů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 70--79

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108181

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O ROZKLADECH EUKLEIDOVSKÝCH PROSTORŮ

MILAN SEKANINA, Brno

DT: 519.51

(Došlo dne 23. ledna 1957)

Věta 1 následujícího článku se zabývá rozkladem eukleidovského prostoru E_n, $n \geqq 2$, na podmnožiny o mohutnosti menší než daná mohutnost $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Věta 2 se zabývá rozkladem prostoru E_{2k+1}, $k \geqq 0$, na podmnožiny přímo shodné s podmnožinami z prostoru E_k.

1

Nechť E_n značí n-rozměrný eukleidovský prostor.[1]) Eukleidovským pohybem neboli shodností v E_n rozumíme isometrické zobrazení E_n na sebe. Je známo, že v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic je eukleidovský pohyb vyjádřen soustavou rovnic

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{1n}x + \ldots + a_{nn}x_n + d_n \,, \end{aligned}$$

kde $\|a_{ik}\|$ je reálná orthogonální matice, $d_1, \ldots, d_n$ jsou reálná čísla. Je-li determinant $|a_{ik}| = 1$, nazveme daný eukleidovský pohyb eukleidovským pohybem 1. druhu (nebo též přímou shodností), je-li $|a_{ik}| = -1$ eukleidovským pohybem 2. druhu (nepřímou shodností). O dvou množinách $M_1, M_2 \subset E_n$ řekneme, že jsou shodné, existuje-li eukleidovský pohyb S tak, že $S(M_1) = M_2$, a píšeme též $M_1 \cong M_2$. Existuje-li S 1. druhu mající tuto vlastnost, píšeme též $M_1 \doteq M_2$ a říkáme, že množiny M_1 a M_2 jsou přímo shodné. Rozkladem na množině M rozumíme systém neprázdných disjunktních podmnožin z M, jehož sjednocení je rovno M.

Definice 1. *Buďiž $M \subset E_n$. Řekneme, že $M_1 \subset E_n$ je rozkladová množina na M, když existuje rozklad $\mathbf{R}$ na množině M v množiny M_ι, pro něž $M_\iota \cong M_1$. Existuje-li $\mathbf{R}$ tak, že platí dokonce $M_\iota \doteq M_1$, řekneme, že M_1 je přímou rozkladovou množinou na M.*

Bezprostředním důsledkem definice 1 je

[1]) Definice základních pojmů z analytické geometrie viz na př. E. ČECH: Základy analytické geometrie I, Praha 1951. 0-rozměrným eukleidovským prostorem rozumíme prostor složený z jediného bodu.

Lemma 1. *Nechť $M_1, M_2, M_3 \subset E_n$. Nechť M_1 je rozkladovou množinou na M_2, nechť M_2 je rozkladovou množinou na M_3. Potom M_1 je rozkladovou množinou na M_3. Tvrzení platí, zaměníme-li pojem „rozkladová množina" za pojem „přímá rozkladová množina".*

2

Věta 1. *Budiž $n \geqq 2$, $\mathfrak{m}$ mohutnost menší než $2^{\aleph_0}$ různá od 0, $\mathfrak{S}$ systém o mohutnosti $2^{\aleph_0}$ neprázdných podmnožin M_ι z E_n, pro něž platí $\overline{\overline{M}}_\iota \leqq \mathfrak{m}$ ($\overline{\overline{M}}$ = mohutnost množiny M). Potom existuje systém $\mathfrak{S}'$ podmnožin M_ι, pro něž platí:*

$$1.\ M^\iota \doteq M_\iota . \quad 2.\ \mathfrak{S}' \text{ je rozklad na } E_n .$$

Důkaz. Nechť V_n značí zaměření prostoru E_n. Je-li v E_n dán souřadnicový systém S, určený bodem o a ortogonálními vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, potom shodnost prostoru E_n definovanou rovnicemi

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\varphi \,.\, x_1 - \sin\varphi \,.\, x_2 \,, \\ y_2 &= \sin\varphi \,.\, x_1 + \cos\varphi \,.\, x_2 \,, \\ y_3 &= x_3 \,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= x_n \,, \end{aligned}$$

kde $0 \leqq \varphi < 2\pi$, y_i resp. x_i jsou souřadnice bodu y resp. x v S, označme (S, φ) [tedy $(S, \varphi)(x) = y$]. Budiž Ω počáteční ordinální číslo patřící k mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Uspořádejme body prostoru E_n v transfinitní posloupnost

$$x_0, x_1, \ldots, x_\tau, \ldots, \tau < \Omega .$$

Rovněž $\mathfrak{S}$ uspořádejme v transfinitní posloupnost typu Ω (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množina indexů ι je množinou ordinálních čísel menších než Ω):

$$M_0, \ldots, M_\tau, \ldots, \tau < \Omega .$$

Věta bude dokázána, když sestrojíme transfinitní posloupnost podmnožin z E_n

$$M^0, M^1, \ldots, M^\tau, \ldots, \tau < \Omega , \tag{2.1}$$

takovou, že platí

$$1.\ \tau < \Omega \Rightarrow M^\tau \doteq M_\tau , \tag{2.2}$$

$$2.\ 0 \leqq \sigma < \tau < \Omega \Rightarrow M^\tau \cap M^\sigma = \emptyset , \tag{2.3}$$

$$3.\ x_\tau \in \bigcup_{\sigma \leqq \tau} M^\sigma . \tag{2.4}$$

V dalším sestrojíme posloupnost (2.1) s vlastnostmi (2.2) až (2.4) transfinitní indukcí.

Nechť $x \in M_0$. Nechť T je translace, pro niž platí $T(x) = x_0$. Označme $T(M_0) = M^0$. (2.2)—(2.4) je triviálně splněno. Budiž nyní $\nu < \Omega$, $\nu \geqq 1$. Předpokládejme, že pro $\sigma < \nu$ je definováno M^σ s vlastnostmi (2.2) až (2.4). Položme $N_\nu = \bigcup_{\sigma<\nu} M^\sigma$. Poněvadž $\overline{\overline{M^\sigma}} \leqq \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, $\overline{\nu} < 2^{\aleph_0}$, je $E_n - N_\nu \neq \emptyset$. Nechť ν_1 je prvý index $\varkappa$, pro nějž platí $x_\varkappa \in E_n - N_\nu$. Z (2.4) plyne, že $\nu_1 \geqq \nu$. Zvolme $x \in M_\nu$ a proveďme translaci T, pro niž $T(x) = x_{\nu 1}$. Položme $M_\nu^* = T(M_\nu)$. Nyní ukážeme, že existuje lineární podprostor dimense $n - 2$ (označíme jej U) takový, že

$$x_{\nu_1} \in U \quad \text{a} \quad U \cap N_\nu = \emptyset\,. \tag{2.5}$$

Nechť nejprve $n = 2$. Potom za U položíme bod x_{ν_1}. Nechť $n > 2$. Označme podprostor, skládající se jen z bodu x_{ν_1}, jako U^0. Potom U^0 je dimense 0 a platí pro U^0 (2.5). Předpokládejme, že existuje lineární podprostor dimense $k < n - 2$ U^k tak, že splňuje (2.5). Nechť V^k značí zaměření prostoru U^k, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ nechť je base ve V^k, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ base ve V_n, která vznikne doplněním base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ (pro $k = 0$ je množina těchto vektorů prázdná). Nechť γ je reálné číslo. Položme

$$U_\gamma = \underset{y}{\mathrm{E}}[y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma \mathbf{v}_{k+1})\,\lambda + \mathbf{v}_k\lambda_k + \ldots + \mathbf{v}_1\,.\,\lambda_1, \lambda, \lambda_k, \ldots, \lambda_1 \text{ reálná čísla}]\,.$$

Nechť $\gamma \neq \gamma'$ a $y \in U_\gamma \cap U_{\gamma'}$. Je

$$y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma \mathbf{v}_{k+1})\,\lambda + \mathbf{v}_k\lambda_k + \ldots + \mathbf{v}_1\lambda_1\,,$$
$$y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma' \mathbf{v}_{k+1})\,\lambda' + \mathbf{v}_k\lambda_k' + \ldots + \mathbf{v}_1\lambda_1'\,.$$

Odtud $\lambda = \lambda'$, $\gamma\lambda = \gamma'\lambda'$, z čehož plyne $\lambda = \lambda' = 0$, tedy $y \in U^k$. Když $\gamma \neq \gamma'$, $y \in N_\nu$, $y \in U_\gamma$, potom je $y \operatorname{non} \in U_{\gamma'}$. Poněvadž $\overline{\overline{N_\nu}} < 2^{\aleph_0}$, existuje γ_1 tak, že $U_{\gamma_1} \cap N_\nu = \emptyset$. Položíme $U^{k+1} = U_{\gamma'}$. U^{k+1} zřejmě splňuje (2.5). Odsud plyne existence podprostoru U dimense $n - 2$ s vlastností (2.5). Nechť $\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \ldots, \mathbf{w}_n$ tvoří orthonormální basi v U (pro $n = 2$ je množina těchto vektorů prázdná). Existují vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ tak, že $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \ldots, \mathbf{w}_n$ tvoří orthonormální basi v E_n. Souřadnicový systém S budiž určen bodem x_{ν_1} jako počátkem a vektory $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Označme nyní transformaci (S, φ) jako R_φ, $R_\varphi(M_\nu^*)$ označme kratčeji $M_{\nu,\varphi}^*$. Budiž nyní $x = (x_1, \ldots, x_n) \in N_\nu$. Protože $x \operatorname{non} \in U$, je $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Připusťme, že existuje φ_1 tak, že $x \in M_{\nu,\varphi_1}^*$. Potom existuje $x' = (x_1', \ldots, x_n') \in M_\nu^*$ tak, že $R_{\varphi_1}(x') = x$. Je

$$x_1 = \cos\varphi_1\,.\,x_1' - \sin\varphi\,.\,x_2'\,,\quad x_2 = \sin\varphi_1\,.\,x_1' + \cos\varphi\,.\,x_2'\,. \tag{2.6}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} x_1x_1' + x_2x_2' &= \cos\varphi_1[(x_1')^2 + (x_2')^2]\,,\\ x_1x_2' - x_2x_1' &= -\sin\varphi_1[(x_1')^2 + (x_2')^2]\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Je $(x_1')^2 + (x_2')^2 \neq 0$ (plyne z (2.6)). Tedy rovnicemi (2.6) a (2.7) je $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ jednoznačně určeno. Odtud plyne, že $x \in N_\nu$ je prvkem maximálně $\overline{\overline{M_\nu}}$ množin $M_{\nu,\varphi}^*$. Poněvadž $\overline{\overline{M_\nu}} < 2^{\aleph_0}$ a $\overline{\overline{N_\nu}} < \mathfrak{m}\,.\,\overline{\nu} < 2^{\aleph_0}$, je mohutnost množiny těch φ, pro něž $M^*_{\nu,\varphi} \cap N_\nu \neq \emptyset$, menší než $2^{\aleph_0}$, existuje tedy $\varphi' \in [0, 2\pi)$ tak, že $M^*_{\nu,\varphi'} \cap N_\nu = \emptyset$. Nechť $M^\nu = M^*_{\nu,\varphi}$. Je $M^\nu \doteq M_\nu$, $M^\nu \cap M^\sigma = 0$ pro $\nu > \sigma$, podle definice ν_1 je $x_\nu \in \bigcup_{\sigma \leqq \nu} M^\sigma$. Tedy M^ν splňuje (2.2)—(2.4). Tím je věta dokázána.

Důsledek věty 1. *Každá podmnožina $M \subset E_n$, $n \geqq 2$, pro níž $0 < \overline{\overline{M}} < 2^{\aleph_0}$, je přímá rozkladová množina na E_n.*

3

Lemma 2. *Budiž $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Budiž v $(2k+1)$-rozměrném eukleidovském prostoru E_{2k+1} $(k \geqq 0)$ dáno $\mathfrak{m}$ lineárních podprostorů E^ι_k (ι probíhá množinu I o mohutnosti $\mathfrak{m}$) dimense k. Budiž $\iota_1 \in I$, budiž x libovolný, ale pevně zvolený prvek z E'_k takový, že x non $\in E^\iota_k$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_k$. Potom existuje k-rozměrný podprostor E^ι_k, pro nějž platí:*

$$1.\ E'_k \subset E_{2k+1},\quad 2.\ E'_k \cap E^{\iota_1}_k = \{x\},\quad 3.\ E'_k \cap E^\iota_k = \emptyset \text{ pro } \iota \in I,\ \iota \neq \iota_1.$$

Důkaz. Pro $k = 0$ je tvrzení triviální, nechť tedy dále $k > 0$. Nechť V^ι_k značí zaměření prostoru E^ν_k. Nechť (E^ι_k, x) je nejmenší (ve smyslu množinové inkluse) z lineárních prostorů z E_{2k+1} obsahujících E^ι_k i x. Poněvadž $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ a E_{2k+1} nemůže být sjednocením množiny o mohutnosti menší než $2^{\aleph_0}$ lineárních prostorů dimense nanejvýš rovné $k+1$, existuje $x_1 \in E_{2k+1} - \bigcup_{\iota \in I} (E^\iota_k, x)$. Tedy speciálně $x_1 \neq x$. Body x_1 a x určují přímku p_1 (její zaměření nechť má basi $\mathbf{p}_1$), která má tyto vlastnosti:

α) $p_1 \cap E^{\iota_1}_k = \{x\}$.

β) $\mathbf{p}_1$ non $\in V^\iota_k$, $\iota \in I$.

γ) $p_1 \cap E^\iota_k = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

Ad α) Kdyby $x \neq y \in p_1 \cap E^{\iota_1}_k$, potom $p_1 \subset E^{\iota_1}_k$, tedy $x_1 \in E^{\iota_1}_k$, což je spor s volbou x_1.

Ad β). Připusťme, že $\mathbf{p}_1 \in V^\iota_k$, $\iota \in I$. Potom $x + \alpha \,.\, \mathbf{p}_1 \in (E^\iota_k, x)$, α reálné číslo. Tedy $x_1 \in (E^\iota_k, x)$, což je spor s volbou x_1.

Ad γ). Připusťme, že $z \in p_1 \cap E^\iota_k$, $\iota \neq \iota_k$. Potom vektor určený body z a x patří do zaměření prostoru (E^ι_k, x) a odtud jako v ad β) $x_1 \in (E^\iota_k, x)$, což je spor.

Nechť $\varkappa$ je přirozené číslo splňující nerovnost $0 < \varkappa < k$. Předpokládejme, že v E_{2k+1} existují přímky $p_1, \ldots, p_\varkappa$ (base v jejich zaměřeních nechť tvoří vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$) s těmito vlastnostmi:

$1^\varkappa$. $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$ jsou lineárně nezávislé vektory.

$2^\varkappa$. Pro lineární prostor $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$ určený vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$ a bodem x platí:

a) $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x) \cap E^{\iota_1}_k = \{x\}$,

b) $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa\, x)$, $\cap E^\iota_k = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

$3^{\varkappa}$. Pro vektorový prostor $(\mathbf{p}_k, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa)$ určený vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$ platí $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa) \cap V_k^\iota = \{\mathbf{o}\}$, $\iota \in I$, $\mathbf{o}$ je nulový vektor.

p_1 splňující shora uvedené podmínky α) až γ) splňuje též zřejmě 1^1, 2^1, 3^1. $(E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$ budiž nejmenší lineární podprostor v E_{2k+1}, obsahující E_k^ι a x a jehož zaměření obsahuje vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$. Dimense prostoru $(E_k^\iota, \mathbf{p}_k, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$ je $k + \varkappa + 1$ pro $\iota \neq \iota_1$, $k + \varkappa$ pro ι_1. Poněvadž těchto podprostorů je m a $k + \varkappa + 1 < 2k + 1$, existuje $x_{\varkappa+1} \in E_{2k+1} - \bigcup\limits_{\iota \in I} (E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$. Body $x_{\varkappa+1}$ a x určují přímku $p_{\varkappa+1}$ (basi v jejím zaměření označme $\mathbf{p}_{\varkappa+1}$), pro niž platí:

$1^{\varkappa+1}$. Vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, \mathbf{p}_{\varkappa+1}$ jsou lineárně nezávislé.

$2^{\varkappa+1}$. Pro lineární prostor $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}, x)$ určený bodem x a vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}$ platí:

a) $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^{\iota_1} = \{x\}$,

b) $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^\iota = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota$.

$3^{\varkappa+1}$. Pro vektorový prostor $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+k})$ platí

$$(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}) \cap V_k^\iota = \{\mathbf{o}\}\,.$$

Ad $1^{\varkappa+1}$. Připusťme, že $l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_\varkappa\mathbf{p}_\varkappa + l_{\varkappa+1}\mathbf{p}_{\varkappa+1} = \mathbf{o}$, $\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} l_k^2 \neq 0$. Poněvadž podle $1^\varkappa$ $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}^\varkappa$ jsou nezávislé vektory, je $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Potom $\mathbf{p}_{\varkappa+1}$ je prvkem zaměření lineárního prostoru $(E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$ a tedy $x_{\varkappa+1} \in (E_\varkappa^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Ad $2^{\varkappa+1}$. a) Připusťme, že $x \neq y \in (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^{\iota_1}$. Nechť vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_1$ tvoří basi ve $V_k^{\iota_1}$. Potom platí $l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_{\varkappa+1}\mathbf{p}_{\varkappa+1} = h_1\mathbf{v}_1 + \ldots + h_k\mathbf{v}_k$ pro vhodná reálná čísla $l_1, \ldots, l_{\varkappa+1}, h_1, \ldots, h_k$, kde $\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} l_i^2 \neq 0$. Protože platí $3^\varkappa$, je $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Tedy $\mathbf{p}_{\varkappa+1}$ patří do zaměření prostoru $(E_k^{\iota_1}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$, odkud plyne $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

b) Připusťme, že $y \in (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^\iota$ pro jisté $\iota \neq \iota_1$. Potom $y = x + l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_{1+1}\mathbf{p}_{\varkappa+k}$. Z $2^\varkappa$ b) plyne, že $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Tedy $\mathbf{p}_{\lambda+1}$ je prvkem zaměření prostoru $(E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$, tedy $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Ad $3^{\varkappa+1}$. Připusťme, že $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} \in (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{\varkappa+1}) \cap V_k^\iota$ pro jisté ι. Z $3^\varkappa$ plyne, že potom je $\mathbf{p}_{\varkappa+1}$ prvkem zaměření prostoru $(E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$. Odtud plyne, že $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Položíme-li $\varkappa = k - 1$, zjistíme podle 1^k, 2^k, 3^k, že prostor $(x, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k)$ splňuje vlastnosti 1, 2, 3 uvedené ve znění lemmatu.

Věta 2. *Budiž I množina indexů, $\bar{\bar{I}} = 2^{\aleph_0}$. Nechť ke každému $\iota \in I$ je přiřazena množina M_ι, $\emptyset \neq M \subset E_k \subset E_{2k+1}$ $(k \geqq 0)$. Potom existuje systém $\mathfrak{S}$ podmnožin M^ι z E_{2k+1} takový, že*

1. *$M^\iota \simeq M_\iota$,* 2. *$\mathfrak{S}$ je rozklad na E_{2k+1}.*

Důkaz. Uspořádejme body z E_{2k+1} v posloupnost typu Ω

$$x_0, x_1, \ldots, x_\tau, \ldots, \tau < \Omega .$$

Můžeme předpokládati, že množina indexů I je množina ordinálních čísel menších než Ω. Ukážeme, že lze sestrojit posloupnost

$$M^0, M^1, \ldots, M^\tau, \ldots, \tau < \Omega , \tag{3.1}$$

podmnožin z E_{2k+1} tak, že platí:

1. $M^\tau \simeq M_\tau$, $M^\tau \cap M^\sigma = \emptyset$, $\sigma < \lambda$.

2. Ke každému $\tau < \Omega$ je přiřazen k-rozměrný lineární podprostor $E_k^\tau \subset E_{2k+1}$ tak, že platí:

$$M^\tau \subset E_k^\tau , \quad E_k^\tau \cap E_k^\sigma \subset \bigcup_{\nu' \leqq \tau} M^{\nu'} , \quad \tau > \sigma . \tag{3.2}$$

3. $x_\tau \in \bigcup_{\sigma \leqq \tau} M^\sigma$.

Posloupnost (3.1) s vlastnostmi (3.2) sestrojíme transfinitní indukcí. Zvolme $x \in M_0$ a nechť T je translace prostoru E_{2k+1}, pro niž $T(x) = x_0$. Položme $T(M_0)$ rovno M^0, $E_k^0 = T(E_k)$. Vlastnosti (3.2) jsou pro M^0 a E_k^0 zřejmě splněny. Nechť $0 < \nu < \Omega$ a nechť jsou definovány M^τ, E_k^τ pro $\tau < \nu$. Protože $\bigcup_{\tau<\nu} M^\tau \neq$ $\neq E_{2k+1}$, existuje bod x_{ν_1}, kde ν_1 je první index $\varkappa$, pro nějž platí $x_\varkappa$ non $\in \bigcup_{\tau<\nu} M^\tau$. Podle vlastnosti (3) je $\nu_1 \geqq \nu$. Mohou nastat dva případy

a) x_{ν_1} non $\in \bigcup_{\tau<\nu} E_k^\tau$,

b) $x_{\nu_1} \in \bigcup_{\tau<\nu} E_k^\tau$.

Definujme nyní E^ν a $\mathfrak{M}_\nu$ takto:

V případě a) nechť E^ν je libovolně, ale pevně zvolený k-rozměrný lineární podprostor v E_{2k+1} takový, že $x_{\nu_1} \in E^\nu$. Systém všech E_k^τ, $\tau < \nu$, označme $\mathfrak{M}_\nu$.

V případě b) existuje právě jedno τ_1 tak, že $x_{\nu_1} \in E_k^{\tau_1}$, jak plyne z 2. Položme $E^\nu = E_k^{\tau_1}$ a systém $\{E_k^\tau\}_{\tau<\nu} - \{E_k^{\tau_1}\}$ označme $\mathfrak{M}_\nu$.

Podle lemmatu 2 existuje k-rozměrný lineární podprostor E' v E_{2k+1} tak, že

1'. $x_{\nu_1} \in E'$,

2'. $E' \cap E = \emptyset$, $E \in \mathfrak{M}_\nu$,

3'. $E^\nu \cap E' = \{x_{\nu_1}\}$.

Zvolme $x \in M_\nu$. Existuje přímá shodnost T' v E_{2k+1} tak, že $T'(x) = x_{\nu_1}$, $T'(E_k) = E'$. Nechť $M^\nu = T'(M_\nu)$, $E_k^\nu = E'$. Ukážeme, že pro M^ν, E_k^ν platí (3.2).

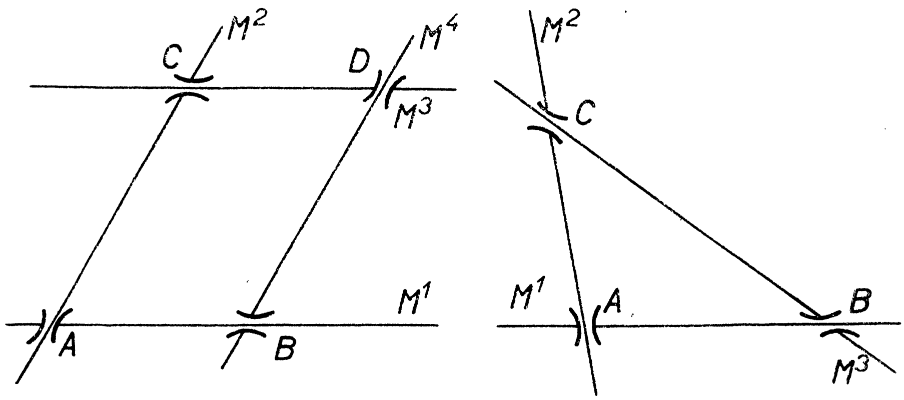
Ad 1. $M^\nu \simeq M_\nu$ plyne ihned z definice M^ν. $M^\nu \cap M^\sigma = \emptyset$ pro $\nu > \sigma$ plyne z inklusí $M^\sigma \subset E_k^\sigma$ pro $\sigma \leqq \nu$, z definice E_k^ν a z vlastností 1', 2', 3' pro E_k^ν.

Ad 2. Plyne z 2' a 3'.

Ad 3. Plyne ihned z definice bodu x_{ν_1}.

Tím je dokázána existence posloupnosti (3.1). Vlastnosti 1 a 3 ukazují, že množiny této posloupnosti tvoří rozklad na E_{2k+1} s žádanými vlastnostmi.

Důsledek věty 2. *Budiž $\emptyset \neq M \subset E_k \subset E_{2k+1}$. Potom M je přímá rozkladová množina prostoru E_{2k+1}.*



Obr. 1.

Ukažme ještě, že existuje neprázdná podmnožina přímky, která není rozkladovou množinou na rovině. Příkladem takové množiny je množina, kterou dostaneme, když z přímky vypustíme bod. Označme tuto množinu jako M. Připusťme, že existuje rozklad na rovině E_2 na množiny shodné s M. Potom nastane jeden z případů naznačených na obrázku 1. Zvolíme-li bod X uvnitř rovnoběžníka $ABCD$, resp. trojúhelníka ABC, vidíme, že pro každou $M' \cong M$, pro niž $X \in M'$, je aspoň jeden z průniků $M' \cap M^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ neprázdný. To je spor. M tedy není rozkladová množina roviny.

4

Věta 1 pro $n = 1$ neplatí. To se ihned zjistí na př. v případě, že se $\mathfrak{S}$ skládá z množin přímo shodných s množinou $\{0, 1, 3\}$ (pokládáme E_1 za číselnou osu).[2])

Pro přímku platí na př. tato věta:

Věta 3. *Budiž M množina bodů na číselné ose, $\overline{\overline{M}} \geqq \aleph_0$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $N \supset M$ tak, že $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{M}}$, N je přímou rozkladovou množinou na přímce a $d(N) \leqq d(M) + \varepsilon$ ($d(M)$ značí průměr množiny M).*

[2]) Rozkladovými množinami na přímce se zabývá připravovaný článek Koutský-Sekanina: O rozkladových množinách na přímce.

Důkaz. Položme $M_1 = M$ v případě, že M je neohraničená, $M_1 = M \cup \{d(M) + \varepsilon\}$, je-li M ohraničená. Nechť N' značí aditivní grupu vytvořenou množinou M_1. Je $N' \supset M$. Třídy mod N' v aditivní grupě všech reálných čísel jsou množiny přímo shodné s N'. Je-li M neohraničené, položíme $N = N'$. Buď M ohraničená množina. Položme $A = N' \cap [\inf M - \frac{\varepsilon}{2}, \sup M + \frac{\varepsilon}{2})$. Nechť T je translace, pro niž $T(0) = d(M) + \varepsilon$. Poněvadž $d(M) + \varepsilon \in N'$, je $T^k(A) \subset N'$ pro k celé (T^k značí k-tou mocninu translace T v grupovém slova smyslu, při čemž násobení je definováno jako skládání zobrazení). Je zřejmě $T^{k_1}(A) \cap T^{k_2}(A) = 0$ pro $k_1 \neq k_2$. Konečně pro $x \in N'$ existuje k tak, že $x \in T^k(A)$. Tvoří tedy $\{T^k(A)\}$, k celé, rozklad na N'. Je tedy A přímou rozkladovou množinou na N' a, podle lemmatu 1, je též přímou rozkladovou množinou na přímce. Můžeme položit $N = A$. Jest zřejmé, že $d(A) \leq d(M) + \varepsilon$. Tím je věta dokázána.

Ukažme ještě na Cantorově množině, že tvrzení věty 3 nelze v podstatě zesílit. Cantorova množina C je množina reálných čísel c s triadickým rozvojem

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}, \quad \text{kde } c_i = 0 \text{ nebo } 2.$$

Je dobře známo, že $\mu(C) = 0$.[3]) H. Steinhaus dokázal následující větu:[4])

(S) *Ke každému číslu $0 \leq \alpha \leq 1$ existují v C čísla x, y tak, že*

$$x - y = \alpha . \tag{4.1}$$

Z (S) plyne

Lemma 3. *Nechť $\alpha \in [-1, 1]$. Nechť T je translace reálné osy o číslo α. Nechť $M \supset C$. Potom $M \cap T(M) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Z (4.1) plyne, že existují $x, y \in C$ tak, že $x - y = \alpha$. Poněvadž $0 \in C$, je $0 \in M$ a $T(0) = \alpha \in T(M)$ a též $\alpha + y \in T(M)$. Poněvadž $\alpha + y = x$, je $x \in T(M) \cap M$.

Na základě lemmatu 3 dokážeme toto tvrzení:

Věta 4. *Nechť $M \supset C$ je přímá rozkladová množina na číselné ose. Potom*

$$1.\ d(M) \geq 1, \qquad 2.\ \mu^*(M) \geq 1.$$

Důkaz. Nechť $M \supset C$, M je přímá rozkladová množina na číselné ose. Existuje rozklad $\boldsymbol{R} = \{T_\iota(M)\}$, kde T_ι je translace, ι probíhá jistou množinu I. Nechť $t_\iota = T_\iota(0)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $M \in \boldsymbol{R}$.

Ad 1. Připusťme, že $d(M) < 1$. Potom $M \subset [0, 1]$. Protože interval $[0, 1]$ není rozkladovou množinou na přímce, existuje $z \in [0, 1]$ tak, že z non $\in M$. Existuje

[3]) $\mu(M)$ značí Lebesgueovu míru množiny M, $\mu^*(M)$ vnější Lebesgueovu míru množiny M.

[4]) H. Steinhaus: Nowa własność mnogości G. Cantora, Wektor 7 (1917), citováno dle Fortschritte d. Math. XLVI, 1. díl, s. 300 (1916–18).

$M_{\iota_1} \neq M$ tak, že $z \in M_{\iota_1}$. Poněvadž předpokládáme, že $d(M) = 1$ a je $M_{\iota_1} \cap \cap [0, 1] \neq \emptyset$, je $t_{\iota_1} \in [-1, 1]$. Podle lemmatu 3 je $M_{\iota_1} \cap M \neq \emptyset$, což je spor.

Ad 2. Připusťme, že existují $\mu, \varkappa \in I$, $\mu \neq \varkappa$ tak, že $|t_\mu - t_\varkappa| \leqq 1$. Potom systém množin $\{T_\mu^{-1} T_\iota(M)\}$, $\iota \in T$ je opět rozklad přímky E_1 na množiny přímo shodné s M. Označme jej $\boldsymbol{R}_1$. Je $T_\mu^{-1}\, T_\mu(M) = M \in \boldsymbol{R}_1$ a $T_\mu^{-1}\, T_\varkappa(M) \in \boldsymbol{R}_1$. Je dále $T_\mu^{-1}\, T_\varkappa(0) = t_\varkappa - t_\mu \in [-1, 1]$. Podle lemmatu 3 je $T_\mu^{-1}\, T_\varkappa(M) \cap M \neq \emptyset$, což je spor. Je tedy pro $\mu \neq \varkappa$

$$|t_\mu - t_\varkappa| > 1\ . \tag{4.2}$$

Odtud plyne, že $\overline{\overline{I}} \leqq \aleph_0$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existoval by hromadný bod množiny $\{t_1\}$, $\iota \in I$, což je ve sporu s (4.2). Nechť $N_\iota = M_\iota \cap [0, 1]$. Uvažme o systému podmnožin $T_\iota^{-1}(N_\iota)$ (kteréžto množiny leží v M). Nechť I_ι značí průnik všech intervalů (z množiny intervalů otevřených) uzavřených i polootevřených) obsahujících $T_\iota^{-1}(N_\iota)$. Z (4.2) plyne, že $I_\mu \cap I_\varkappa = \emptyset$ pro $\mu \neq \varkappa$. Odtud již snadno dostaneme

$$\mu^*(M) \geqq \sum_{\iota \in I} \mu^*[T_\iota^{-1}(N_\iota)] = \sum_{\iota \in I} \mu^*(N_\iota) \geqq 1\ ,$$

odkud $\mu^*(M) \geqq 1$, c. b. d.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 23/I 1957 г.)

Пусть E_n означает n-мерное евклидово пространство, $M_1, M_2 \subset E_n$; $M_1 \doteq M_2$ значит, что существует движение 1-го рода в E_n T такое, что $T(M_1) = M_2$. В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $n \geqq 2$, $0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{S}$ — система непустых множеств M_ι из E_n, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{M}}_\iota \leqq \mathfrak{m}$. [$\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ ($\overline{\overline{M}}_\iota$) означает мощность множества $\mathfrak{S}$ (M_ι)]. Тогда существует система $\mathfrak{S}'$ множеств M^ι, для которой 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. $\mathfrak{S}'$ является разложением пространства E_n.*

Теорема 2. *Пусть I — множество индексов, $\overline{\overline{I}} = 2^{\aleph_0}$. Пусть к каждому $\iota \in I$ соответствует $M_\iota \neq \emptyset$, $M_\iota \subset E_k \subset E_{2k+1}$. Тогда существует система $\mathfrak{S}$ множеств M^ι из E_{2k+1}, для которой: 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. $\mathfrak{S}$ является разложением пространства E_{2k+1}.*

Теоремы 3 и 4 касаются разложения прямой.

Summary

DECOMPOSITIONS OF THE EUCLIDEAN SPACES

MILAN SEKANINA, Brno

(Received January 23, 1957)

E_n means n-dimensional euclidean space. $M_1, M_2 \subset E_n$, $M_1 \doteq M_2$ means, that there exists a movement of the 1. sort in E_n T, so that $T(M_1) = M_2$. In the present article following theorems are proved:

Theorem 1. *Let $n \geq 2$, $0 < \mathfrak{m} \leq 2^{\aleph_0}$, let $\mathfrak{S}$ be a system of the subsets M_ι ($\neq \emptyset$) of E_n, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{M_\iota}} \leq \mathfrak{m}$ [$\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ ($\overline{\overline{M_\iota}}$) means the cardinal number of $\mathfrak{S}$ (M_ι)]. Then there exists a system $\mathfrak{S}'$ of the subsets M^ι of E_n with the following properties: 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. $\mathfrak{S}'$ is a decomposition of E_n.*

Theorem 2. *Let I be a set of indices, $\overline{\overline{I}} = 2^{\aleph_0}$. Let to every $\iota \in I$ belong $M_\iota \neq \emptyset$, $M_\iota \subset E_k \subset E_{2k+1}$. Then there exists a system $\mathfrak{S}$ of the subsets M^ι of E_{2k+1} with following properties: 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. $\mathfrak{S}$ is a decomposition of E_{2k+1}.*

Theorems 3 and 4 are dealing with the decomposition of the straight line.