Časopis pro pěstování matematiky

Zbyněk Nádeník

Eine Frobeniussche Ungleichung für kantige torusförmige Körper

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 146--156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108146

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

EINE FROBENIUSSCHE UNGLEICHUNG FÜR KANTIGE TORUSFÖRMIGE KÖRPER

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 30. Dezember 1965)

Wir behalten die Bezeichnung aus [13], S. 226–227. Das Polygon $A_1A_2 \dots A_n$ mit der Gesamtlänge l war der Ausgangspunkt für die Konstruktion des Körpers $\mathscr{K}$, welcher aus den Teilen der konvexen achsensymmetrischen Zylinder $K_1, K_2, \dots, K_n$ mit den Achsen $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ zusammengesetzt wurde. Haben die Zylinder $K_1, K_2, \dots, K_n$ eine gemeinsame Breite, so gilt für das Volumen V und die Oberfläche O des Körpers $\mathscr{K}$ die Ungleichung

$$O^2 - 4\pi l V \geqq 0\,, \tag{1}$$

in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn $K_1, K_2, \dots, K_n$ die Rotationszylinder sind (s. [13], S. 227).

Wir konstruieren – unter denselben Voraussetzungen und auf dieselbe Weise wie den Körper $\mathscr{K}$ – aus den Teilen der konvexen achsensymmetrischen Zylinder $K_1^*, K_2^*, \dots, K_n^*$ mit den Achsen in den Geraden $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ einen anderen Körper $\mathscr{K}^*$; die mit diesem Körper verbundenen Grössen werden wir von den analogen dem Körper $\mathscr{K}$ gehörenden Grössen nur durch ein beigefügtes Sternchen unterscheiden. Wir bezeichnen noch mit M_i den gemischten Flächeninhalt der Normalschnitte der Zylinder K_i und K_i^* und wir setzen (durchwegs $A_{n+1} \equiv A_1$)

$$M = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}}\,.\,M_i\,. \tag{2}$$

Wir nehmen an, dass die Körper K_i und K_i^* für jedes $i = 1, 2, \dots, n$ in gewisser (ihrer gemeinsamen Normalebene gehörender) Richtung die Breite $2d$ und $2d^*$ besitzen. Dann gilt für die Volumina V, V^* und die Oberflächen O, O^* der Körper $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}^*$ und für ihr „gemischtes Volumen" M aus (2) die Ungleichung

$$-\frac{V}{O^2} + \frac{2M}{OO^*} - \frac{V^*}{O^{*2}} \geqq \pi l\left(\frac{d}{O} - \frac{d^*}{O^*}\right)^2. \tag{3}$$

Zur Bestimmung der zugehörigen Extremalkörper benutzen wir die Bezeichnung und Terminologie aus der Einleitung in [12], S. 221–222:

In (3) *tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn zwischen den Schnitten* $\varkappa_i$ *und* $\varkappa_i^*$ *der Zylinder* K_i *und* K_i^* *durch eine zu ihrer gemeinsamen Achse* A_iA_{i+1} *senkrechte Ebene folgende Beziehung ist:*

$$\varkappa_i = \mathscr{T}_{\tau_i}\{\mathscr{D}_\delta[\mathscr{H}(\varkappa_i^*)]\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{4}$$

Dabei hat die Ähnlichkeit $\mathscr{H}$ *den Koeffizienten* O/O^* *und ihr Ähnlichkeitspunkt liegt auf der Geraden* A_iA_{i+1}, *die Dilatation* $\mathscr{D}_\delta$ *besitzt die Grösse* $\delta = d - d^*O/O^*$ *und die „teleskopische" Transformation* $\mathscr{T}_{\tau_i}$ *ist immer so zu richten, dass sie zur Richtung, in welcher der Zylinder* K_i *die Breite* $2d$ (*und der Zylinder* K_i^* *die Breite* $2d^*$) *hat, senkrecht ist; dabei noch*

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \,.\, \tau_i = \tfrac{1}{2}\pi l(d^*O/O^* - d)\,. \tag{5}$$

Zum Beweis werden wir eine zweidimensionale Verallgemeinerung des wohlbekannten Lemmas von WIRTINGER benutzen (s. [4], S. 105 oder [1], Kap. V, § 10). Hier sprechen wir aber diese Verallgemeinerung nur für solche speziellen Funktion aus, auf welche wir sie anwenden werden:

Es sei $f(s, \varphi)$ *eine für alle* s *und* φ *definierte Funktion mit folgenden Eigenschaften*: 1) *Sie besitzt die Periode* l *bezüglich der Veränderlichen* s *und die Periode* 2π *in bezug auf die Veränderliche* φ; 2) *in den disjunkten Intervallen*

$$\langle\lambda_{i-1}, \lambda_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{6}$$

deren Vereinigung das Intervall $\langle 0, l)$ *ist, reduziert sich* $f(s, \varphi)$ *immer auf eine stetige Funktion nur der Veränderlichen* φ; 3) *für jedes* s *und* φ *gibt es die symmetrische partielle Ableitung* $\delta f(s, \varphi)/\delta\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} [f(s, \varphi + \varepsilon) - f(s, \varphi - \varepsilon)] : 2\varepsilon$; 4) *diese Ableitung ist für jedes feste* s *von endlicher Schwankung auf dem Intervall* $\langle 0, 2\pi\rangle$ *der Veränderlichen* φ; 5) *für jedes* s *ist*

$$f(s, 0) = f(s, \pi) = c = \text{konst.}\,; \tag{7}$$

6) *der Mittelwert von* $f(s, \varphi)$ *auf dem Intervall* $\langle 0, l\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$ *verschwindet:*

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} f(s, \varphi)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}s = 0\,. \tag{8}$$

Dann ist

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} [\delta f(s, \varphi)/\delta\varphi]^2\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}s - \int_0^l \int_0^{2\pi} [f(s, \varphi)]^2\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}s \geqq 2\pi l c^2\,, \tag{9}$$

und die Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn

$$(10) \qquad s \in \langle \lambda_{i-1}, \lambda_i \rangle, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle \Rightarrow f(s, \varphi) = c + \alpha_i \sin \varphi,$$

$$s \in \langle \lambda_{i-1}, \lambda_i \rangle, \quad \varphi \in \langle \pi, 2\pi \rangle \Rightarrow f(s, \varphi) = c + \beta_i \sin \varphi$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo c, α_i, β_i beliebige der Bedingung

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\beta_i - \alpha_i) = \pi l c$$

unterworfene Konstanten sind.

Das Lemma werden wir in den Abschn. 1 ind 2 auf Grund der Relation von Parseval für doppelte Fouriersche Reihen beweisen. Eine andere Beweismethode beruht auf der Übertragung des Verfahrens aus [14] auf die Funktionen zweier Variablen. Der Abschn. 3 enthält den Beweis der Ungleichung (3) und im Abschn. 4 werden die Extremalkörper festgestellt.

Die erste Analogie des Lemmas von Wirtinger für die auf der Einheitskugelfläche Ω definierte Funktion hat schon W. Blaschke [4], S. 108 bewiesen (s. auch [5], S. 13), und zwar mittels der Vollständigkeitsrelation für das System der Kugelflächenfunktionen. Für eine Kugelfläche von beliebiger Dimension hat seinen Beweis A. Dinghas [5], S. 25–28, verallgemeinert; anders – mit Hilfe der Integralidentitäten und der Induktion – hat A. Dinghas in [7] verfahren. Elementar hat wieder A. Dinghas [6], S. 3–6, die Blaschkesche Analogie des Lemmas von Wirtinger hergeleitet, aber unter einer stärkeren Voraussetzung: Das Verschwinden des Mittelwertes der Funktion auf Ω hat er durch das Verschwinden ihres Mittelwertes auf jedem Parallelkreis von Ω ersetzt. Ein Seitenstück von ähnlicher Form zu Wirtingers Lemma wird auch in [15], Absch. 7 gefunden.

Die Relationen zwischen den über ein ebenes Gebiet D erstreckten Integralen $\iint_D g^2 \, dx \, dy$ und $\iint_D (g_x^2 + g_y^2) \, dx \, dy$ kann man für ein „symmetrisches" zweidimensionales Analogon zum Lemma von Wirtinger halten. Solche Ungleichungen haben einen physikalischen Sinn (Grundfrequenz der Membran), s. besonders [16], Kap. 5; weitere Literaturangaben bezüglich der physikalischen Anwendungen in [8], S. 74 und [1], Kap. V, § 21. Betreffs der Verallgemeinerungen s. [2] oder [1], Kap. V, § 15. Unser Lemma können wir als ein „unsymmetrisches" Seitenstück zur Ungleichung Wirtingers im zweidimensionalen Fall bezeichnen.

1. Die Funktion $f(s, \varphi)$ aus unserem Lemma ist – in Hinsicht auf die dritte Voraussetzung – für jedes feste s von endlicher Schwankung auf dem Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ der Variablen φ (s. [12], S. 222). Ohne Schwierigkeiten kann man einsehen, dass die Funktion $f(s, \varphi)$ auf dem Rechteck $\langle 0, l \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ von doppelter endlicher Variation im Sinne von L. Tonelli (Funzione a variazione doppia finita [17], S. 470) und auch von beschränkter Schwankung im Sinne von G. H. Hardy und M. Krause

([9] und [11]; s. auch [10], B. I, S. 345 und [17], S. 472) ist. Nach der zweiten Voraussetzung ist weiter

$$\tfrac{1}{4}[f(s+0, \varphi+0) + f(s+0, \varphi-0) + f(s-0, \varphi+0) + f(s-0, \varphi-0)] =$$
$$= \tfrac{1}{2}[f(s, \varphi) + f(s-0, \varphi)] .$$

Das bedeutet im Ganzen (s. [17], S. 472; auch [10], B. II, S. 710 und [18], Kap. VII, § 4), dass die Funktion $f(s, \varphi)$ in eine doppelte konvergente Fouriersche Reihe[1])

$$\begin{aligned}
(1,1) \qquad & \tfrac{1}{2}[f(s, \varphi) + f(s-0, \varphi)] = \\
& = \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m0} \cos(2\pi ms/l) + b_{m0} \sin(2\pi ms/l)] + \\
& + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{0n} \cos n\varphi + c_{0n} \sin n\varphi] + \\
& + \sum_{m,n=1}^{\infty} [a_{mn} \cos(2\pi ms/l) \cos n\varphi + b_{mn} \sin(2\pi ms/l) \cos n\varphi + \\
& + c_{mn} \cos(2\pi ms/l) \sin n\varphi + d_{mn} \sin(2\pi ms/l) \sin n\varphi]
\end{aligned}$$

(in Hinsicht auf (8) das absolute Glied verschwindet) entwickelbar ist und dass diese – immer mit derselben Summe – auch nach den Spalten summierbar ist (s. [17], S. 473 und 480–481).

Das ermöglicht die Bedingung $f(s, 0) = c$ aus (7) folgends auszudrücken:

$$\tfrac{1}{2}a_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 0 , \quad \tfrac{1}{2}b_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) ,$$
$$c = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} .$$

Ähnlich die zweite Bedingung aus (7) bedeutet, dass

$$\tfrac{1}{2}a_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{mn} = 0 , \quad \tfrac{1}{2}b_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{mn} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) ,$$
$$c = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{0n} .$$

[1]) Nach [19], S. 142 genügt dazu folgende Eigenschaft: Die Funktion $f(s, \varphi)$ ist von doppelter endlicher Variation im Sinne von Tonelli und noch für gewisses $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ von endlicher Variation auf dem Intervall $\langle 0, l \rangle$ der Veränderlichen s und für gewisses $s \in \langle 0, l)$ von endlicher Schwankung auf dem Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ der Variablen φ; denn dann ist nämlich $f(s, \varphi)$ von beschränkter Variation im Sinne von G. H. Hardy und M. Krause – s. dazu [10], B. I, S. 345 und [17], S. 472.

Also einerseits

$$(1,2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,2n-1} = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{m,2n-1} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{0,2n-1} = 0\,,$$

anderseits

$$(1,3) \qquad a_{m,0} = -2\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,2n}\,, \quad b_{m0} = -2\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,2n} \quad (m = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$(1,4) \qquad c = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{0,2n}\,.$$

Nach der zu [12], S. 222 analogen Überlegung verifizieren wir auch jetzt, dass

$$(1,5) \qquad \delta f(s, \varphi)/\delta\varphi \sim \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n[-a_{0n}\sin n\varphi + c_{0n}\cos n\varphi] +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty} n[-a_{mn}\cos(2\pi ms/l)\sin n\varphi - b_{mn}\sin(2\pi ms/l)\sin n\varphi +$$

$$+ c_{mn}\cos(2\pi ms/l)\cos n\varphi + d_{mn}\sin(2\pi ms/l)\cos n\varphi]\,.$$

Unsere Funktion $f(s, \varphi)$ und ihre partielle symmetrische Ableitung erfüllen die Voraussetzungen für die Anwendung der Relation von Parseval (s. [17], S. 509 oder [10], B. II, S. 718) und folglich nach (1,1) und (1,5)

$$(2/\pi l)\int_0^l\int_0^{2\pi} f^2(s, \varphi)\,d\varphi\,ds = \tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{m0}^2 + b_{m0}^2) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{0n}^2 + c_{0n}^2) + \sum_{m,n=1}^{\infty}(a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2)\,,$$

$$(2/\pi l)\int_0^l\int_0^{2\pi}[\delta f(s, \varphi)/\delta\varphi]^2\,d\varphi\,ds = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_{0n}^2 + c_{0n}^2) +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty} n^2(a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2)\,.$$

Gemäss (1,4) ist dann noch

$$(2/\pi l)\int_0^l\int_0^{2\pi} c^2\,d\varphi\,ds = [\sum_{n=1}^{\infty} a_{0,2n}]^2\,.$$

Aus den letzten drei Gleichungen erhalten wir, wenn wir noch (1,3) benutzen:

$$(1,6) \qquad (2/\pi l) \int_0^l \int_0^{2\pi} \{[\delta f/\delta\varphi]^2 - f^2 - c^2\} \, d\varphi \, ds =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-1)^2 - 1] \, a_{0,2n-1}^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [n^2 - 1] \, c_{0,n}^2 +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty} [(2n-1)^2 - 1] \, (a_{m,2n-1}^2 + b_{m,2n-1}^2) + \sum_{m,n=1}^{\infty} [n^2 - 1] \, (c_{mn}^2 + d_{mn}^2) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n)^2 - 1] \, a_{0,2n}^2 - [\sum_{n=1}^{\infty} a_{0,2n}]^2 +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty} [(2n)^2 - 1] \, a_{m,2n}^2 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,2n}]^2 +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty} [(2n)^2 - 1] \, b_{m,2n}^2 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,2n}]^2 .$$

Wie wir sofort zeigen werden, können wir die drei letzten Zeilen in (1,6) folgends schreiben:

$$(1,7) \qquad \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-1) \, a_{0,2n} - 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} a_{0,2r}]^2 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-1) \, a_{m,2n} - 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} a_{m,2r}]^2 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-1) \, b_{m,2n} - 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} b_{m,2r}]^2 .$$

In der Tat, die Umschrift der vierten Zeile aus (1,6) in die erste Zeile aus (1,7) ist eine ummittelbare Folge der Relationen (1,4) und (1,5) aus [12], S. 223.

Die fünfte Zeile aus (1,6) können wir nach (1,4) aus [12], S. 223 gegen folgende Summen austauschen

$$(1,8) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} [(2n-1) \, a_{m,2n} - 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} a_{m,2r}]^2 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} (4n^2 - 1) \, a_{m,2n}^2 - \sum_{m=1}^{\infty} (4k + 2) \, [\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{m,2n}]^2 ;$$

aus diesen die zweite und dritte für $k \to \infty$ gegen Null konvergieren. Betreffs der zweiten Summe in (1,8) ist das evident. – Auf ähnliche Weise wie in [12], S. 223 finden wir auch jetzt, dass

$$(1,9) \qquad \int_0^{2\pi} f \cos 2n\varphi \, d\varphi = - (1/4n^2) \int_0^{2\pi} \cos 2n\varphi \, d(\delta f/\delta\varphi) ;$$

das Stieltjessche Integral rechts – wir bezeichnen es mit $S_n(s)$ – soll man natürlich in bezug auf die Veränderliche φ nehmen und seine wohlbekannte Abschätzung führt zur Ungleichung $|S_n(s)| \leqq V(s)$, in der $V(s)$ die totale Variation im Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ der Funktion $\delta f / \delta \varphi$ für festes s bedeutet; die Funktionen $V(s)$ und $S_1(s), S_2(s), \ldots$ sind freilich in jedem Intervall (6) konstant. Daraus ergibt sich schon leicht die Existenz einer solchen Zahl C, dass $\mathbf{V}_0^l S_n(s) \leqq C$. Wenden wir auf den Ausdruck für den Fourierschen Koeffizienten $a_{m,2n}$ fortschreitend die Relation (1,9), dann den Übergang zum Stieltjesschen Integral und endlich die partielle Integration an, so erhalten wir, dass $a_{m,2n} = (1/4\pi^2 mn^2) \int_0^l \sin(2\pi ms/l) \, \mathrm{d}S_n(s)$. Wenn wir dieses Stieltjessche Integral wieder auf bekannte elementare Weise abschätzen, so gewinnen wir die Ungleichungen $|a_{m,2n}| \leqq (1/4\pi^2 mn^2) \, . \, \mathbf{V}_0^l S_n(s) < (1/mn^2) \, . \, K$, wo K eine von m und n unabhängige Konstante ist. Auf Grund dieses Ergebnisses überzeugen wir uns schon leicht, dass auch die dritte Summe in (1,8) für $k \to \infty$ gegen Null strebt.

Ganz analog bestätigt man auch die Gleichheit der letzten Zeilen in (1,6) und (1,7).

Die Ungleichung (9) folgt dann unmittelbar aus (1,6) und aus der Umschrift (1,7) der drei letzten Zeilen in (1,6).

2. Daraus ergibt sich zugleich, dass in (9) das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn

(2,1) $$a_{0,2n-1} = c_{0n} = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots) ;$$

(2,2) $$a_{m,2n-1} = b_{m,2n-1} = c_{m,n} = d_{m,n} = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots; \ m = 1, 2, \ldots) ;$$

(2,3) $$(2n - 1) \, a_{m,2n} - 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} a_{m,2r} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots) ;$$

(2,4) $$(2n - 1) \, b_{m,2n} - 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} b_{m,2r} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots) .$$

Nach (2,1), (2,2) und (1,2) ist

(2,5) $$a_{01} = 0, \ a_{m1} = b_{m1} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

und aus (2,3) und (2,4) folgt ebenso wie in [12], Abschn. 2:

(2,6) $$a_{m,2n} = \frac{3}{(2n - 1)(2n + 1)} \, a_{m,2} \quad (m = 0, 1, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots) ;$$

(2,7) $$b_{m,2n} = \frac{3}{(2n - 1)(2n + 1)} \, b_{m,2} \quad (m = 1, 2, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots) .$$

Aus (1,3), (2,6) und (2,7) ergibt sich weiter, dass

(2,8) $$a_{m0} = -3a_{m2} , \quad b_{m0} = -3b_{m2} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

und aus (1,4) und (2,6) für $m = 0$ erhält man, dass

(2,9) $$c = \tfrac{3}{4} a_{02} .$$

Wenn wir nun aus (2,1), (2,2) und (2,5)–(2,8) in (1,1) einsetzen und wenn wir noch von (2,9) und von der Entwicklung (s. [18], Kap. I, § 13)

$$\tfrac{1}{4}(2 - \pi|\sin \varphi|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\varphi}{(2n-1)(2n+1)}$$

Gebrauch machen, so gewinnen wir dieses Ergebnis:

$$\tfrac{1}{2}[f(s, \varphi) + f(s-0, \varphi)] = \tfrac{1}{4}a_{02} +$$

$$+ (\sin \varphi) \sum_{m=1}^{\infty} [c_{m1} \cos (2\pi ms/l) + d_{m1} \sin (2\pi ms/l)] -$$

$$- \tfrac{1}{4}\pi|\sin \varphi| \{\tfrac{1}{2}a_{02} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m2} \cos (2\pi ms/l) + b_{m2} \sin (2\pi ms/l)]\} =$$

$$= c + [A(s) \pm B(s)] \sin \varphi \, ;$$

hier gilt für $\varphi \in (0, \pi)$ bzw. $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ das Zeichen minus bzw. plus und $A(s)$ und $B(s)$ bedeuten gewisse in Hinsicht auf die zweite Voraussetzung unseres Lemmas in den Intervallen (6) konstante Funktionen von s.

Wir erhalten so die Vorschrift (10) für die Funktion, welche das Gleichheitszeichen in (9) realisiert. Wegen der sechsten Voraussetzung soll ihr Mittelwert auf dem Rechteck $\langle 0, l \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ verschwinden und daraus ergibt sich noch (11).

3. Wir kehren zu den Körpern $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^*$ aus der Einleitung zurück. Es sei $h_i(\varphi)$ bzw. $h_i^*(\varphi)$ die Stützfunktion des Normalschnittes des Zylinders K_i bzw. K_i^*, welche in der Ebene v_i dieses Schnittes definiert ist (durchwegs $i = 1, 2, \ldots, n$); der Nullpunkt ist der Durchschnitt der Ebene v_i und der Achse A_iA_{i+1} (wir setzen $A_{n+1} \equiv A_1$) der Zylinder K_i und K_i^* und $\varphi = 0$ ist die Richtung, in der die Zylinder K_i und K_i^* die Breiten $2d$ und $2d^*$ besitzen. Wir wählen noch eine solche Teilung $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = l$ des Intervalls $\langle 0, l \rangle$ der Variablen s, dass

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} = \overline{A_iA_{i+1}} \, . \tag{3,1}$$

Wir erklären die Funktionen $h(s, \varphi)$ und $h^*(s, \varphi)$ folgendermassen: Sie besitzen die Periode l in bezug auf die Veränderliche s und

$$s \in \langle \lambda_{i-1}, \lambda_i) \Rightarrow h(s, \varphi) = h_i(\varphi) \, , \quad h^*(s, \varphi) = h_i^*(\varphi) \, . \tag{3,2}$$

Diese Funktionen erfüllen die erste und zweite Voraussetzung unseres Lemmas und nach [3] (S. 228–231; s. auch [12], Abschn. 3) erfüllen sie auch die dritte und vierte Annahme. Wegen der Wahl der Nullpunkte und der Richtungen $\varphi = 0$ in den Ebenen $v_i = 0$ ist in Hinsicht auf (3,2)

$$h(s, 0) = h(s, \pi) = d \, , \quad h^*(s, 0) = h^*(s, \pi) = d^* \, . \tag{3,3}$$

Aus der zweiten Formel (1) in [13], S. 227 und aus (3,1) und (3,2) ergibt sich

$$(3,4) \qquad O = \int_0^l \int_0^{2\pi} h(s, \varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s\,, \quad O^* = \int_0^l \int_0^{2\pi} h^*(s, \varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s\,,$$

sodass die Funktion

$$(3,5) \qquad f(s, \varphi) = h(s, \varphi)/O - h^*(s, \varphi)/O^*$$

alle Bedingungen 1–6 unseres Lemmas befriedigt; dabei ist nach (7), (3,5) und (3,3)

$$(3,6) \qquad c = d/O - d^*/O^*\,.$$

Analog zu (3,4) folgt aus der ersten Formel (1) in [13], S. 227, dass

(3,7)

$$V = \tfrac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} [h^2 - (\delta h/\delta\varphi)^2]\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s\,, \quad V^* = \tfrac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} [h^{*2} - (\delta h^*/\delta\varphi)^2]\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s$$

und nach (2) ist noch

$$(3,8) \qquad M = \tfrac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} [hh^* - (\delta h/\delta\varphi)(\delta h^*/\delta\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s\,.$$

Das Einsetzen aus (3,5) und (3,6) in (9) bietet – in Hinsicht auf (3,4), (3,7) und (3,8) – sofort die Ungleichung (3).

4. Das zugehörige Paar der Extremalkörper erhalten wir aus (3,5) und (10) mit (11). Weil $h_i(\varphi) = h_i(\varphi + \pi)$, $h_i^*(\varphi) = h_i^*(\varphi + \pi)$, so ist nach (3,2) und (3,5) auch $f(s, \varphi) = f(s, \varphi + \pi)$ und in (10) ist folglich $\alpha_i + \beta_i = 0$. Deshalb können wir die „Extremalfunktion" der Ungleichung (9) in unserem Fall folgends definieren:

$$(4,1) \qquad s \in \langle \lambda_{i-1}, \lambda_i), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \Rightarrow f(s, \varphi) = c + \alpha_i |\sin \varphi|\,,$$

wo c in (3,6) bestimmt ist und die Konstanten α_i erfüllen die Relation

$$(4,2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i A_{i+1}}\,.\,\alpha_i = -\tfrac{1}{2}\pi l c\,.$$

Setzen wir aus (3,5) in (4,1) ein und benutzen wir die obenerwähnte Symbolik aus der Einleitung in [12], S. 221–222, so verifizieren wir schon mühelos (vgl. [12], Abschn. 4), dass $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}^*$ die Extremalkörper der Ungleichung (3) gerade dann sind, wenn für die Normalschnitte $\varkappa_i$ und $\varkappa_i^*$ der Zylinder K_i und K_i^* die Beziehung (4) gilt; dabei $\tau_i = O\alpha_i$, sodass aus (4,2) und (3,6) die Bedingung (5) folgt.

Ist der Körper $\mathscr{K}^*$ aus den Rotationszylindern $K_1^*, \ldots, K_n^*$ vom Radius 1 zusammengesetzt, so ist $h^*(s, \varphi) = d^* = 1$, $O^* = 2\pi l$, $V^* = \pi l$, $M = \tfrac{1}{2}O$ und unsere

Ungleichung (3) reduziert sich auf die Ungleichung (3) aus [13]. Die Bestimmungen des Extremalkörpers $\mathcal{K}$ entweder nach (4) oder nach [13], S. 227 sind identisch; besonders ist nun noch $O = 2\pi dl + 4\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \tau_i$, $\tau_i > 0$, sodass die Bedingung (5) für jede τ_i erfüllt ist.

Literatur

[1] *E. F. Beckenbach - R. Bellman:* Inequalities. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961, 1965. (Неравенства. Москва 1965.)

[2] *P. R. Beesack:* Isoperimetric inequalities for the nonhomogeneous clamped rod and plate. J. Math. and Mech. *8* (1959), 471—482.

[3] *W. Blaschke:* Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises. Jber. Deutsch. Math. Vereinig. *23* (1914), 210—234.

[4] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, New York 1949, Berlin 1956.

[5] *A. Dinghas:* Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum. Abh. Preuss. Akad. Wiss. 1939, Nr. 4.

[6] *A. Dinghas:* Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Ibid. 1939, Nr. 11.

[7] *A. Dinghas:* Neuer Beweis eines Satzes von Wirtinger und Blaschke. Math. Zeitschrift *47* (1942), 265—274.

[8] *K. Fan - O. Taussky - J. Todd:* Discrete analogs of inequalities of Wirtinger. Monatsh. für Math. *LIX* (1955), 73—90.

[9] *G. H. Hardy:* On double Fourier series ... Quart. J. 37 (1906), 53—79.

[10] *E. W. Hobson:* The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Cambridge, vol. I: 1926, vol. II: 1927.

[11] *M. Krause:* Über Fouriersche Doppelreihen ... Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 55 (1903), 164—197.

[12] *Z. Nádeník:* Die Verschärfung einer Ungleichung von Frobenius für den gemischten Flächeninhalt der konvexen ebenen Bereiche. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 22—225.

[13] *Z. Nádeník:* Obere und untere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei kantiger Enveloppe von achsensymmetrischen konvexen Zylinderflächen. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 226—229.

[14] *Z. Nádeník:* Elementární důkaz zostřeného Wirtingerova lemmatu. V tisku. — Práce ČVUT.

[15] *Z. Nádeník:* Die Ungleichungen für die Oberfläche, das Integral der mittleren Krümmung und die Breite der konvexen Körper. Čas. pro pěst. mat. *91* (1966),

[16] *G. Pólya - G. Szegö:* Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton 1951. (Изопериметрические неравенства в математической физике. Москва 1962.)

[17] *L. Tonelli:* Serie trigonometriche. Bologna 1928.

[18] *Г. П. Толстов:* Ряды Фурье. Москва—Ленинград 1951, Москва 1960. (Fourierreihen, Berlin 1955; Fourier Series, New York 1962).

[19] *W. H. Young:* On Multiple Fourier series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) *XI* (1912), 133—184.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).

Výtah

NEROVNOST FROBENIOVA TYPU PRO HRANATÁ TĚLESA TVARU TORU

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Nerovnost (1) pro objem V a povrch O těles definovaných v [13] je zobecněna v nerovnostech (3) pro dvojici takových těles. Východiskem — i pro určení extremálních těles — je dvojrozměrná nesymetrická analogie (9) Wirtingerova lemmatu, která je dokázána na základě dvojných Fourierových řad.

Резюме

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ФРОБЕНИЯ ДЛЯ РЕБРИСТЫХ ТЕЛ ФОРМЫ ТОРА

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Неравенство (1) лдя объема V и площади O тел определенных в [13] обобщено для пары таких тел в неравенство (3). Исходный пункт, тоже для определения экстремальных тел — двумерная несимметрическая аналогия (9) леммы Виртингера; эта аналогия доказана посредством двойных рядов Фурье.