Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Mišík

Über die Eigenschaft von Darboux für Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse im topologischen Produkt

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 215--218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108140

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ÜBER DIE EIGENSCHAFT VON DARBOUX FÜR FUNKTIONEN AUS DER ERSTEN BAIRESCHEN KLASSE IM TOPOLOGISCHEN PRODUKT

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

(Eingegangen am 24. März 1966)

In dieser Arbeit befindet sich ein Satz über die Unstetigkeitspunkte einer Funktion, die auf einem topologischen Produkt definiert ist und die Eigenschaft von Darboux nicht hat aber die in jeder einzelnen Veränderlichen die Eigenschaft von Darboux besitzt. Daraus bekommen wir einen Satz über die Eigenschaft von Darboux der Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse, die auf einem topologischen Produkt definiert sind.

In der Arbeit [3] ist die folgende Definition der Eigenschaft von Darboux gegeben: Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis von offenen Mengen in diesem. Eine Funktion f, die auf X definiert ist, hat die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$, wenn für jedes $B \in \mathscr{B}$, jede $x, y \in \bar{B}$ und jede reelle Zahl c, für welche $f(x) < c < f(y)$ gilt, ein Punkt $\xi \in B$ so existiert, daß $f(\xi) = c$ ist.

Es ist Λ eine nicht leere Menge. Es sei X_λ für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein topologischer Raum und $\mathscr{B}_\lambda$ eine Basis von offenen Mengen in diesem. Es sei X das topologische Produkt von X_λ für $\lambda \in \Lambda$. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ soll π_λ die Projektion des topologischen Produktes X auf X_λ bedeuten, d. h. $\pi_\lambda(x) = x_\lambda$ für jedes $x \in X$, wobei x_λ die λ-Koordinate von x ist. Das System aller Mengen $B \subset X$, für welche eine nicht leere endliche Menge $\Lambda_B \subset \Lambda$ so existiert, daß $\pi_\lambda(B) = X_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda - \Lambda_B$ und $\pi_\lambda(B) \in \mathscr{B}_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda_B$ ist, und welche das Produkt von $\pi_\lambda(B)$ ist, bezeichnen wir durch $\mathscr{B}$. Das System $\mathscr{B}$ ist eine Basis von offenen Mengen im topologischen Produkt X. Es sei jetzt $x = (x_\nu)_{\nu \in \Lambda} \in X$ und $\lambda \in \Lambda$. Dann bedeutet $X_{x,\lambda}$ die Teilmenge von X, für welche $\pi_\nu(X_{x,\lambda}) = \{x_\nu\}$ für $\nu \in \Lambda$ und $\nu \neq \lambda$ und $\pi_\lambda(X_{x,\lambda}) = X_\lambda$ gilt. Dabei ist $\{x_\nu\}$ die Menge, welche nur den einzigen Punkt x_ν enthält. Wenn f eine Funktion mit dem Definitionsbereich X ist, dann werden wir die partielle Funktion der Funktion f, die auf der Menge $X_{x,\lambda}$ definiert ist, durch $f_{x,\lambda}$ bezeichnen. Die inverse Abbildung der Abbildung $(\pi_\lambda)_{x,\lambda}$ werden wir durch π_λ^{-1} bezeichnen. In der Arbeit [4] ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Es sei Λ eine endliche nicht leere Menge und f eine solche Funktion, die auf dem topologischen Produkt X definiert ist, für welche $f_{x,\lambda}(\pi_\lambda^{-1})$ für jedes $x \in X$ und $\lambda \in \Lambda$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_\lambda$ hat. Dann hat die Funktion f die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.*

Dort ist auch ein Beispiel gegeben, daß dieser Satz für unendliche Mengen Λ nicht gelten kann. Die in dem Beispiel gegebene Funktion ist aus der zweiten Baireschen, Klasse. In der Arbeit [5] ist folgendes Problem ausgesprochen: Gilt der Satz 1 wenn Λ eine unendliche Menge und f eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse ist? Aus dem Satz 4 werden wir sehen, daß der Satz 1 gilt, wenn Λ eine unendliche Menge, f eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse und jede offene Menge im topologischen Produkt X eine Menge von zweiter Kategorie ist.

Jetzt werden wir noch eine Klasse von Funktionen definieren. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis von offenen Mengen darin. Eine Teilmenge A von X hat die Eigenschaft $\mathrm{M}'_*(\mathscr{B})$, wenn $\bar{B} \subset A$ für jedes $B \in \mathscr{B}$, das im A enthalten ist, gilt. $\mathscr{M}'_*(\mathscr{B})$ wird die Klasse von solchen Funktionen f bedeuten, für welche die Mengen $\{x : f(x) \geqq a\}$ und $\{x : f(x) \leqq a\}$ die Eigenschaft $\mathrm{M}'_*(\mathscr{B})$ für jede reelle Zahl a besitzen. In der Arbeit [5] ist folgender Satz gegebenen:

Satz 2. *Es sei Λ eine nicht leere Menge und X_λ und $\mathscr{B}_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda$ und X und $\mathscr{B}$ sollen dieselbe Bedeutung haben, wie vor dem Satz* 1. *Wenn f eine solche Funktion bedeutet, die auf dem topologischen Produkt X definiert ist und für welche $f_{x,\lambda}(\pi_\lambda^{-1})$ aus der Klasse $\mathscr{M}'_*(\mathscr{B}_\lambda)$ für jedes $x \in X$ und $\lambda \in \Lambda$ ist, dann gehört die Funktion f zu der Klasse $\mathscr{M}'_*(\mathscr{B})$.*

Jetzt werden wir mit Hilfe des Satzes 2 folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Es sei Λ eine beliebige nicht leere Menge. Es soll f eine solche Funktion sein, welche auf dem topologischen Produkt X definiert ist, für welche $f_{x,\lambda}(\pi_\lambda^{-1})$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_\lambda$ für jedes $x \in X$ und jedes $\lambda \in \Lambda$ hat und die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ nicht hat. Dann existiert ein solches $B \in \mathscr{B}$, daß die Funktion f in keinem Punkt von B stetig ist.*

Beweis. Wenn die Funktion f die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ nicht besitzt, dann existieren: ein $B \in \mathscr{B}$, zwei Punkte $x, y \in \bar{B}$ und eine Zahl c so, daß $f(x) < c < f(y)$ und $f(u) \neq c$ für jedes $u \in B$ ist. Jetzt definieren wir zwei Mengen B_c und B^c folgendermaßen: $B_c = \{u : u \in B, f(u) \leqq c\}$ und $B^c = \{u : u \in B, f(u) \geqq c\}$. Die Mengen B_c und B^c sind nicht leer. Wenn nämlich $B_c = \emptyset$ ist, dann gilt $B = B^c = \{u : u \in B,\ f(u) \geqq c\}$. Da $f_{x,\lambda}(\pi_\lambda^{-1})$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_\lambda$ für jedes $x \in X$ und jedes $\lambda \in \Lambda$ hat, ist die Funktion $f_{x,\lambda}(\pi_\lambda^{-1})$ aus der Klasse $\mathscr{M}'_*(\mathscr{B}_\lambda)$ für jedes $x \in X$ und jedes $\lambda \in \Lambda$. Nach dem Satz 2 ist f aus der Klasse $\mathscr{M}'_*(\mathscr{B})$. Daraus wird folgen, daß $\bar{B} \subset \{u : f(u) \geqq c\}$ gilt. Das ist aber ein Wiederspruch, weil $x \in \bar{B}$ und $f(x) < c$ ist. Ähnlich beweist man, daß auch $B^c = \emptyset$ unmöglich ist. Es gilt also: $B = B_c \cup B^c$ und B_c und B^c sind nicht leere zueinander disjunkte Mengen.

Es existieren also $u = (u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $v = (v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ aus B so, daß $f(u) < c < f(v)$ ist. Wir zeigen nun, daß die folgende Behauptung gilt: Wenn $z = (z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $t = (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ aus B sind und wenn $z_\lambda = u_\lambda$ für $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und $t_\lambda = v_\lambda$ für $\lambda \neq \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ ist, dann gilt $f(z) < c < f(t)$.

Diese Behauptung wird durch Induktion und nur für den Fall des Punktes z beweisen. Für den Punkt t ist der Beweis ähnlich. Es sei $\nu \in \Lambda$ und z ein solcher Punkt aus B, für welchen $z_\lambda = u_\lambda$ für $\lambda \neq \nu$ ist. Die Funktion $f_{u,\nu}(\pi_\nu^{-1})$ hat die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_\nu$. Daraus, aus den Voraussetzungen über f und aus der Ungleichung $f_{u,\nu}(\pi_\nu^{-1}u_\nu) = f(u) < c$ geht hervor, daß $f(z) = f_{u,\nu}(\pi_\nu^{-1}z_\nu) < c$ ist. Wir werden jetzt annehmen, daß die Behauptung für jedes $z = (z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in B$, wobei $z_\lambda = u_\lambda$ für $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ist, gilt. Es sei $w = (w_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in B$ und $w_\lambda = u_\lambda$ für $\lambda \neq \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \nu_{n+1}$. Es sei $w' = (w'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein solches Element aus B, für das $w'_{\nu_1} = u_{\nu_1}$ und $w'_\lambda = w_\lambda$ für $\lambda \neq \nu_1$ gilt. Daraus folgt, daß $f(w') < c$ ist, weil $w'_\lambda = u_\lambda$ für $\lambda \neq \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n, \nu_{n+1}$ gilt. Da $w_\lambda = w'_\lambda$ für $\lambda \neq \nu_1$ und $f(w') < c$ ist, folgt nun, daß $f(w) < c$ ist.

Wir nehmen jetzt einen beliebigen Punkt $z = (z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aus B. Es sei C ein solches Element aus $\mathscr{B}$, für das $z \in C$ ist. Es sei $\pi_\lambda(C) = X_\lambda$ für jedes $\lambda \neq \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Jetzt wählen wir zwei Punkte $w' = (w'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ und $w'' = (w''_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ so, daß $w'_\lambda = u_\lambda$ und $w''_\lambda = v_\lambda$ für $\lambda \neq \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ und $w'_{\mu_i} = w''_{\mu_i} = z_{\mu_i}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Es ist evident, daß $w', w'' \in C$ und $f(w') < c < f(w'')$ ist. Da $f(z) \neq c$ ist, ist die Oszillation der Funktion f in dem Punkt z größer oder gleich $|f(z) - c| > 0$. Also kann die Funktion f in dem Punkt z nicht stetig sein. Da der Punkt z ein beliebiger Punkt aus B war, ist die Funktion f in keinem Punkt von B stetig.

Da die Menge aller Unstetigkeitspunkte einer Funktion aus der ersten Baireschen Klasse eine Menge erster Kategorie ist ([1], 9.5.25, S. 259), ist evident, daß die Funktion f aus dem Satz 3 nicht aus der ersten Baireschen Klasse sein kann, wenn jede offene Menge in dem topologischen Produkt X von zweiter Kategorie ist.

Satz 4. *Es sei Λ eine beliebige nicht leere Menge, f sei eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse, die auf dem topologischen Produkt X definiert ist. Es sei in X jede offene Menge von zweiter Kategorie. Dann hat die Funktion f die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$, wenn die Funktion $f_{x,\lambda}(\pi_\lambda^{-1})$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_\lambda$ für jedes $x \in X$ und $\lambda \in \Lambda$ hat.*

In dem topologischen Produkt X sind alle offene Mengen von zweiter Kategorie zum Beispiel in dem Fall, wenn alle Komponente X_λ des Produktes vollständige metrische Räume sind. Das ist eine Folgerung des Satzes 2.10 aus [2]. Es gilt also, daß jede offene Menge in X von zweiter Kategorie ist, wenn X ein topologischer Produkt von Intervallen ist. In dem Beispiel aus [4] kann man also eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse nicht so wählen, daß sie die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ nicht hat und in jeder einzelnen Veränderlichen die Eigenschaft von Darboux hat. So gilt zum Beispiel, daß jede Funktion aus der ersten Baireschen Klasse, die auf dem topologischen Produkt X von Intervallen definiert ist und in jeder einzelnen Veränderlichen stetig ist, die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ hat.

Literatur

[1] *E. Čech:* Topologické prostory, Praha 1959.

[2] *Z. Frolík:* Baire spaces and some generalizations of complete metric spaces, Czech. Math. J. *11* (86) (1961), 237—248.

[3] *L. Mišík:* Über die Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux, Mat. fyz. časop. *14* (1964), 44—49.

[4] *L. Mišík:* Über die Eigenschaft von Darboux für Funktionen, Mat. fyz. časop. *16* (1966), 45—52.

[5] *L. Mišík:* Über die Eigenschaft von Darboux und einige Klassen von Funktionen, Revue roum. Pures Appl. *11* (1966), 411—430.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Obrancov mieru 41 (Matematický ústav SAV).

Výtah

O DARBOUXOVEJ VLASTNOSTI PRE FUNKCIE Z PRVEJ BAIREOVEJ TRIEDY V TOPOLOGICKOM SÚČINE

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

V práci sa okrem iného dokazuje, že funkcia z prvej Baireovej triedy definovaná na topologickom súčine, v ktorom všetky otvorené množiny sú druhej kategórie, má Darbouxovu vlastnosť, ak ju má v každej premennej vzlášť.

Резюме

О СВОЙСТВЕ ДАРБУ ДЛЯ ФУНКЦИИ ИЗ ПЕРВОГО КЛАССА БЭРА В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ

ЛАДИСЛАВ МИШИК (Ladislav Mišík), Братислава

В работе доказыватся, что функция из первого класса Бэра, определенная на топологическом произведении, в котором все открытые множества являются множествами второй категории, обладает свойством Дарбу тогда, если она имеет это свойство для каждой переменной отдельно.