Časopis pro pěstování matematiky

Ludvík Janoš

Homogenní funkcionály na lokálně kompaktních semimodulech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 96--98

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108134`

A, V, W (W non $\in AB$) jest bod $(A(CV \cap BW) \cap BV) \cap AB$, tzv. čtvrtý harmonický k A, B, C, určen nezávisle na volbě bodů W, V.

S Nechť A, B, C je (proměnná) přípustná trojice. Pak pro každý bod P non $\in AB$ a každou přímku c ($C \in c \neq AB$) existuje bod Q tak, že C, P, Q je přípustná trojice a bod $((AP \cap c)\, Q) \cap ((BQ \cap c)\, P)$ leží v přímce AB a je nezávislý na volbě bodu P a přímky c.

B Nechť $ABCD$, $A'B'C'D'$ jsou (proměnné) čtyřúhelníky,[11]) pro něž platí podmínky 1° $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$, $AB \neq A'B'$, $BC \neq B'C'$, $CD \neq C'D'$, $DA \neq D'A'$; 2° AA', BB', CC', DD' jdou společným bodem S; $AB, CD, A'B', C'D'$ jsou společným bodem E a též $BC, DA, B'C'$ mají společný bod F; 3° $BC = D'A'$. Pak též $F \in D'A'$.

Q Nechť $ABCD$ je (proměnný) čtyrúhelník s průsečíkem U úhlopříček. Nechť $A'B'C'D'$ je druhý čtyrúhelník, přičemž A', U, C'; B', U, D' jsou přípustné trojice. Pak body $AB \cap CD$, $BC \cap DA$, $A'B' \cap C'D'$, $B'C' \cap D'A'$ tvoří přípustnou čtveřici.

Věta 3. *V projektivní rovině jest* $H \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow d$.

Věta 4. *V projektivní rovině jest* $B \Leftrightarrow d$.

Při důkazu byla použita myšlenka H. G. Fordera, kterou lze užít k důkazu některých konfiguračních vět v dané projektivní rovině Π: z platnosti afinních specialisací konfigurační věty ve všech afinních rovinách odvozených z Π dokázat platnost obecné konfigurační věty v Π.

Podmínka R vznikne zobecněním podmínky B: Formulace je táž, pouze předpoklad 3° se zanedbá (tj. může nastat nyní jak případ $BC = D'A'$, tak případ $BC \neq D'A'$).

Podmínka r vznikne specialisací podmínky R: požaduje se navíc, aby body S, E, F tvořily přípustnou trojici.

Klingenberg dokázal ekvivalenci $R \Leftrightarrow D$. Pro určité konečné projektivní roviny odvodil pak Gleason ekvivalenci $r \Leftrightarrow d$ ($\Leftrightarrow D$). G. Pickert vyslovil domněnku, že v nekonečné projektivní rovině již ekvivalence $r \Leftrightarrow d$ obecně neplatí. Tato domněnka nebyla dosud dokázána.

Václav Havel, Brno

HOMOGENNÍ FUNKCIONÁLY NA LOKÁLNĚ KOMPAKTNÍCH SEMIMODULECH

(Referát o přednášce L. Janoše konané 14. 9. 1959 v matematické obci pražské)

Semimodulem $\mathfrak{S}$ rozumíme podmnožinu lineárního prostoru $\mathfrak{L}$ uzavřenou vzhledem k součtu a násobení nezáporným číslem, tedy:

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}\,; \quad \alpha \geqq 0\,, \quad x, y \in \mathfrak{S} \Rightarrow x + y \in \mathfrak{S}\,; \quad \alpha x \in \mathfrak{S}\,.$$

V našich úvahách budeme vždy žádat ještě

$$x + y = 0 \Rightarrow x = 0\,, \quad y = 0\,; \quad x, y \in \mathfrak{S}\,.$$

To nám dovolí zavést do $\mathfrak{S}$ částečné uspořádání $\leqq$ předpisem

$$x \leqq y \Leftrightarrow x \in \mathfrak{S}\,, \quad y \in \mathfrak{S}\,, \quad y - x \in \mathfrak{S}\,.$$

[11]) Čtyrúhelník $ABCD$ je uspořádaná čtveřice navzájem různých bodů, z nichž žádné tři neleží na společné přímce.

Budiž nyní do $\mathfrak{L}$ zavedena topologie a $\mathfrak{S}$ uzavřeno v $\mathfrak{L}$. Budeme říkat, že $\mathfrak{S}$ je lokálně kompaktní, existuje-li okolí U_0 nulového prvku v $\mathfrak{L}$ tak, že množina $\overline{U_0 \cap \mathfrak{S}}$ je kompaktní. V dalším budeme vždy lokální kompaktnost předpokládat.

Homogenním funkcionálem $\varphi(x)$ na $\mathfrak{S}$ budeme rozuměti reálnou funkci, pro niž platí $\varphi(\alpha x) = \alpha\, \varphi(x)$, $\alpha \geqq 0$, $x \in \mathfrak{S}$. Je-li kromě toho $\varphi(x) > 0$ při $x \neq 0$, mluvíme o kladném funkcionálu.

Vezměme nyní množinu všech kladných spojitých funkcionálů a zaveďme do ní ekvivalenci takto:

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \alpha\, \varphi_2(x)\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Množinu takto vytvořených tříd označme P. Do P zavedeme metriku předpisem

$$\varrho(\Phi_1, \Phi_2) = \log \left[\max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right]; \quad \varphi_1 \in \Phi_1 \in P\,, \quad \varphi_2 \in \Phi_2 \in P\,.$$

Nedojde k nedorozumění, když nebudeme rozeznávat mezi funkcionálem $\varphi(x)$ samým, a třídou Φ, do níž patří, a budeme tedy např. psát $\varrho(\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in P$ atd.

Prostor P je úplný homogenní metrický prostor. Zavedeme do něho pojem úsečky $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $\varphi_1, \varphi_2 \in P$ takto:

$$\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \Leftrightarrow \varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2\,; \quad \alpha_1, \alpha_2 \geqq 0\,, \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0\,.$$

Budeme říkat, že funkcionál $\varphi(x)$ je subaditivní, resp. lineární, resp. superaditivní, splňuje-li

$$\varphi(x_1 + x_2) \leqq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad \text{resp.} \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$
$$\text{resp.} \quad \varphi(x_1 + x_2) \geqq \varphi(x_1) + \varphi(x_2)\,.$$

Označme S_1 resp. S_2 resp. L podprostory subaditivních resp. superadivních resp. lineárních spojitých funkcionálů $S_1, S_2, L \subset P$.

Množiny S_1, S_2, L jsou uzavřené a konvexní (v metrickém prostoru P). Zřejmě platí $S_1 \cap S_2 = L$.

Budiž nyní $\varphi \in P$. Definujme číslo $l(\varphi) = \inf\limits_{\psi \in L} \varrho(\varphi, \psi)$ patrně udávající, jak dobře lze daný funkcionál φ lineárně aproximovat.

Pro případ $\varphi \in S_1$ nebo resp. $\varphi \in S_2$ výraz $\varrho(\varphi, \psi)$, $\psi \in L$ svého minima skutečně dosáhne a to na lineárních funkcionálech $\psi(x)$ resp. $\vartheta(x)$, jejichž konstrukci v obou případech nyní popíšeme.

Budiž $x \in \mathfrak{S}$. Zavedeme množinu $[x]$ takto: $y \in [x] \Leftrightarrow y \leqq x$. Dá se ukázat, že $[x]$ je kompaktní.

Budiž nyní $\varphi(x) \in P$. Definujme funkcionály $\varphi^n(x)$ resp. $\varphi_n(x)$ vztahy

$$\varphi^n(x) = \sup_{\sum\limits_1^n y_i = x} \sum_1^n \varphi(y_1)\,, \quad \text{resp.} \quad \varphi_n(x) = \inf_{\sum\limits_1^n y_i = x} \sum_1^n \varphi(y_i)\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Z kompaktnosti $[x]$ plyne, že $0 < \varphi^n(x) < \infty$; $0 < \varphi_n(x) < \infty$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Dále plyne z kompaktnosti $[x]$ „slabá“ spojitost funkcionálů $\varphi^n(x)$ resp. $\varphi_n(x)$. Platí totiž vztahy

$$\liminf \varphi^n(x_i) \leqq \varphi^n(x)\,, \quad \limsup \varphi_n(x_i) \geqq \varphi_n(x) \quad \text{při} \quad \lim x_i = x\,.$$

Dále platí lehce odvoditelné funkcionální vztahy

$$\varphi^{n+m}(x + y) \geqq \varphi^n(x) + \varphi^m(y)\,, \quad \varphi_{n+m}(x + y) \leqq \varphi_n(x) + \varphi_m(y)\,.$$

Definujme nyní funkcionály $\bar{\psi}(x)$ resp. $\bar{\vartheta}(x)$ takto:

$$\bar{\psi}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x) \; ; \quad \bar{\vartheta}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \, .$$

Funkcionály $\bar{\psi}(x)$ resp. $\bar{\vartheta}(x)$ jsou omezené a kladné, ne nutně spojité, superaditivní resp. subaditivní při libovolném $\varphi \in P$.

Bylo ukázáno, že za určitých předpokladů o algebraické a topologické povaze $\mathfrak{S}$ jsou pro $\varphi \in S_1$ resp. $\varphi \in S_2$ funkcionály $\bar{\psi}(x)$ resp. $\bar{\vartheta}(x)$ lineární a omezené na určité husté podmnožině $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$. Jejich spojité rozšíření $\psi(x)$ resp. $\vartheta(x)$ na $\mathfrak{S}$ udává pak nejlepší lineární aproximace funkcionálu $\varphi(x)$.

Algebraický požadavek, který semmimodul $\mathfrak{S}$ musí splňovat, aby tvrzení platilo, lze vyslovit takto [axiom A]:

Buďtež $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathfrak{S}$ a nechť platí $x_1 + x_2 = \sum_1^n y_i$.

Pak existují prvky $u_1, u_2, \ldots, u_r \in \mathfrak{S}$ tak, že

1. $\sum_1^r u_i = x_1 + x_2$;

2. prvky $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_n$ lze pomocí prvků $u_1, u_2, \ldots, u_r$ aditivně vyjádřit, což značí, že

a) při vhodném indexování u_i platí $x_1 = \sum_1^s u_i$; $x_2 = \sum_{s=1}^r u_i$;

b) existuje disjunktní rozklad $R_1, R_2, \ldots, R_n$ množiny R indexů $[1, 2, 3, \ldots, r]$ takový, že platí $y_i = \sum_{j \in R_i} u_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Semimodulům splňující tento axiom A budeme krátce říkat A-semimoduly.

Uvedené tvrzení lze však dokázat i o obecnějších semimodulech. Stačí totiž předpokládat slabší požadavek [axiom B].

Semimodul $\mathfrak{S}$ má hustý subsemimodul $\mathfrak{S}'$, který je sjednocením vzestupné řady „plných“ A-subsemimodulů, tedy

$$\mathfrak{S}' = \bigcup_i \mathfrak{S}_i \quad \text{při čemž} \quad \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \ldots, \quad x \in \mathfrak{S}_i \Rightarrow [x] \subset \mathfrak{S}_i \, .$$

Lze snadno nahlédnout, že množina všech nezáporných měr na intervale je B semimodul. Z toho plyne aplikace uvedeného tvrzení na integrální rovnice s kladně definitním jádrem $K(x, t)$, $K(x, t) > 0$, $x, t \in \langle 0, 1 \rangle$;

$$\int_0^1 K(x, t) \, y(t) \, \mathrm{d}M(t) = \lambda \, y(x) \, .$$

Uvažujeme totiž první vlastní číslo $\lambda[M]$ jako funkcionál na semimodulu $\mathfrak{S}$ všech nezáporných měr $M \in \mathfrak{S}$. Snadno zjistíme, že funkcionál $\lambda[M]$ je subaditivní a platí tedy pro něj dokázaná věta. Lineární funkcionál $\psi(M)$ má v tomto případě tvar

$$\psi(M) = \int_0^1 K(x, x) \, \mathrm{d}M(x),$$

z čehož plyne, že stopa uvedené integrální rovnice je nejlepší lineární aproximace jejího prvního vlastního čísla.

Ludvík Janoš, Praha