Karel Čulík

K jednomu minimálnímu problému O. Borůvky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 93--94

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108128`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

REFERÁTY

K JEDNOMU MINIMÁLNÍMU PROBLÉMU O. BORŮVKY

(Vlastní referát K. Čulíka o přednášce proslovené v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 4. 5. 1959 v Brně)

Nechť (V, E) je konečný, neorientovaný a souvislý graf (bez smyček), kde V příp. E značí množinu všech jeho uzlů příp. hran (dva uzly mohou být spojeny více než jednou hranou). Nechť φ je kladná, reálná funkce definovaná na množině E, tzv. *ohodnocení* grafu (V, E). Říkejme, že φ je *ostré ohodnocení*, jestliže platí $\varphi(h') = \varphi(h'') \Rightarrow h' = h''$, kde $h', h'' \in E$.

Ostře ohodnoceným grafem (V, E) se zabýval O. Borůvka (O jistém problému minimálním, Práce mor. přír. spol. v Brně, III (1926), spis *3*, 1—22), který podal konstrukci tzv. jeho *minimální kostry* (tj. takového jeho souvislého subgrafu (V, A), že výraz $\sum_{h \in A} \varphi(h)$ je minimální, odkud již plyne, že (V, A) musí být kostrou). Další konstrukce minimální kostry podal V. Jarník (O jistém problému minimálním, Práce mor. přír. spol. v Brně, *VI* (1930), spis *4* (57—63) a J. B. Kruskal (On the shortest spanning subtree of a graph, Proc. Amer. Math. Soc. *7* (1956), 48—50).

Obecně (nikoli nutně ostře) ohodnoceným grafem (V, E) se zabýval A. Kotzig, v jedné své dosud nepublikované práci. Jeho konstrukce minimální kostry v tomto obecnějším případě odpovídá jedné z konstrukcí Kruskalových.

Zatím co v ostře ohodnoceném grafu existuje právě jedna jeho minimální kostra, může v obecně ohodnoceném grafu existovat více minimálních koster. A. Kotzig našel nutnou a postačující podmínku, kdy existuje právě jedna minimální kostra. Tuto podmínku lze formulovat takto: je-li (V, A) minimální kostra grafu (V, E) s ohodnocením φ a je-li $h \in E - A$, pak pro libovolnou hranu $h' \in A$ ležící na kružnici, která vznikla přidáním hrany h k množině hran A, platí $\varphi(h') < \varphi(h)$.

Tuto podmínku lze dostat jako zvláštní případ zobecněného Kotzigova problému jednoznačnosti, když místo koster uvažujeme tzv. k-kostry.

Nazvěme jádrem grafu (V, E) takový jeho subgraf, který má stejný stupeň souvislosti (Zusammenhangszahl) jako (V, E) a při tom každá jeho hrana leží alespoň na jedné kružnici, pokud (V, E) není stromem. Jádrem stromu rozumějme např. prázdnou množinu. Pak každý graf (V, E) má právě jedno jádro a jednu větu D. Königa (Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, 1936, věta 16 na str. 54) lze doplnit takto:

Věta 1. *Ubráním hrany konečného neorientovaného grafu se sníží jeho stupeň souvislosti (o jedničku) právě tehdy, když ubíraná hrana patří jeho jádru a naopak přidáním hrany se stupeň takového grafu zvýší právě tehdy, když ji přidáváme k některé jeho souvislé komponentě (v Königovských grafech neexistují totiž isolované uzly).*

Nazvěme dále k-kostrou grafu (V, E) takový jeho subgraf, jehož stupeň souvislosti je k a při tom přidáním libovolné další hrany se jeho stupeň souvislosti zvýší. Jde zřejmě o formální zobecnění Königovy definice kostry (l. c. str. 56) a O-kostra je obyčejná kostra. O k-kostrách lze odvodit řadu vět úplně analogických větám o kostrách. Zejména platí:

Věta 2. *Subgraf (V', E') je k-kostrou souvislého, konečného grafu (V, E) právě tehdy, když 1) (V', E') je souvislý, 2) $V' = V$, 3) (V', E') má stupeň souvislosti k.*

Vzhledem k zobecněné Kotzigově otázce jednoznačnosti jsou užitečná následující lemmata:

Lemma 1. *Nechť (V, A) je k-kostra konečného a souvislého grafu (V, E) a nechť $K_h^{(A)}$ značí množinu všech hran jádra grafu $(V, A \cup \{h\})$, když $h \in E - A$. Potom platí: 1) $(V, A \cup \{h_1\})$, kde $h_1 \in E - A$, je $(k + 1)$-kostra grafu (V, E), 2) $h_1 \in K_{h_1}^{(A)} \subset A \cup \{h_1\}$, 3) $(V, [A \cup \{h_1\}] - \{h_2\})$ je k-kostra grafu (V, E) pro každou $h_2 \in K_{h_1}^{(A)}$.*

Lemma 2. *Nechť (V, A) a (V, B) jsou k-kostry konečného a souvislého grafu (V, E) a nechť $A \neq B$. Pak existuje takové prosté zobrazení f množiny $B - A = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ na množinu $A - B$, že $f(h_i) \in K_{h_i}^{(A)}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Zavedeme-li přirozeným způsobem pojem minimální k-kostry, pak z obou lemmat plyne

Věta 3. *Nechť φ je ohodnocení konečného a souvislého grafu (V, E) a nechť (V, A) je jeho minimální k-kostra. Pak (V, A) je jedinou jeho minimální k-kostrou právě tehdy, když platí*

$$h \in E - A\,, \quad h' \in K_h^{(A)}\,, \quad h' \neq h \Rightarrow \varphi(h) > \varphi(h')\,. \tag{1}$$

Pro $k = 0$ je $K_h^{(A)}$ zřejmě kružnicí a uvedená podmínka je podmínkou Kotzigovou.

O. Borůvka se omezil na případ ostrého ohodnocení proto, že v praxi (když šlo o minimální elektrovodné sítě) lze těchto speciálních podmínek vždy dosáhnout. Intuitivně je totiž zřejmé, že změníme-li dané obecné ohodnocení dostatečně málo tak, aby vzniklo ohodnocení ostré, že to nebude mít vliv na hledanou minimální kostru co do její minimality. Dá se skutečně dokázat, že tato intuice je správná.

Především totiž ke každému ohodnocení φ grafu (V, E) existuje takové reálné číslo $\varepsilon_\varphi > 0$, že platí

$$A, B \subset E\,, \quad \sum_{h \in A} \varphi(h) \neq \sum_{h \in B} \varphi(h) \Rightarrow \varepsilon_\varphi < \Big| \sum_{h \in A} \varphi(h) - \sum_{h \in B} \varphi(h) \Big|\,. \tag{2}$$

Dále existuje ke každému ε_φ takové ostré ohodnocení ψ_φ daného grafu, že

$$\sum_{h \in E} \psi_\varphi(h) \leqq \varepsilon_\varphi\,. \tag{3}$$

Potom však $\Pi_\varphi = \varphi + \psi_\varphi$ je podle (2) a (3) zřejmě ostrým ohodnocením daného grafu a nazývejme je *dovolenou perturbací daného ohodnocení φ*. Pak platí

Věta 4. *Nechť φ je ohodnocení konečného a souvislého grafu. Potom minimální kostra daného grafu vzhledem k nějaké dovolené perturbaci Π_φ je minimální kostrou také vzhledem k φ a naopak každá minimální kostra vzhledem k φ je minimální kostrou vzhledem k vhodné dovolené perturbaci Π_φ.*

Z této věty ihned plyne, že při hledání minimálních koster obecně ohodnoceného grafu lze zásadně vystačit s konstrukcemi týkajícími se grafů ostře ohodnocených.

Karel Čulík, Brno