Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Kořínek

Základy teorie kategorií [Výtah z přednášky A. G. Kuroše]

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 100--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108126

ZÁKLADY TEORIE KATEGORIÍ

(Přednáška profesora A. G. KUROŠE konaná v JČMF v Praze 23. září 1959)

Ve dnech 22. až 27. září byl v Praze profesor ALEXANDR GENNADIEVIČ KUROŠ, vedoucí algebraik na moskevské universitě. Při této příležitosti měl v JČMF přednášku uvedenou v titulu.

K a t e g o r i e je nový značně abstraktní útvar v algebře. Popud ke studiu kategorií daly některé důkazové postupy, které se často opakovaly v algebraické topologii. (Viz např. SAMUEL EILENBERG and SAUNDERS MACLANE: General theory of natural equivalences, TAMS *58*, 1945, 231—294; Saunders MacLane: Duality for groups, BAMS *56*, 1950, 485—516; SAMUEL EILENBERG and NORMAN STEENROD: Foundations of algebraic topology, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1952, kap. IV, též ruský překlad.) Kategorie je definována tím, že jsou dány dvě třídy prvků. O první třídě, třídě objektů $a, b, c, \ldots$ se nepředpokládá, že tvoří množinu ve smyslu Gödelovy axiomatické teorie množin. V druhé třídě, třídě zobrazení $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, existuje ke každé dvojici objektů (a, b) jistá množina zobrazení $H(a, b)$, která může být i prázdná. Její prvky značíme $\alpha : a \rightarrow b$. (Interpretace: α je zobrazení objektu a na nebo do objektu b.) Pro některé dvojice zobrazení α, β, nikoli obecně pro všechna taková zobrazení, existuje zobrazení γ jakožto jejich součin $\gamma = \alpha\beta$. V kategorii pak platí tyto a x i o m y:

I. a) Pro dvě zobrazení α, β existuje jejich součin $\gamma = \alpha\beta$ právě tehdy, když

$$\alpha : a \rightarrow b\,, \quad \beta : b \rightarrow c\,.$$

Pak $\gamma = \alpha\beta : a \rightarrow c$.

b) Pro násobení zobrazení platí zákon asociativní

$$(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha(\beta\gamma)\,, \tag{1}$$

kdykoli součiny na jedné straně této rovnosti existují (tj. existují-li součiny na jedné straně (1), pak existují i na druhé straně a (1) platí).

c) Součiny na obou stranách (1) existují, existují-li součiny $\alpha\beta$, $\beta\gamma$.

II. a) Ke každému objektu a existuje právě jedno zobrazení $\varepsilon_a \in H(a, a)$

$$\varepsilon_a : a \rightarrow a\,,$$

které nazýváme identické.

b) Pro každé α a pro každé β takové, že

$$\alpha : b \rightarrow a\,, \quad \beta : a \rightarrow b\,,$$

platí

$$\alpha\varepsilon_a = \alpha\,, \quad \varepsilon_a\beta = \beta\,.$$

Je zřejmo, že by nebylo třeba vůbec zavádět třídu objektů a objekty by se pak nahradily zobrazeními ε_a, které jsou každému objektu vzájemně jednoznačně přiřazeny podle II. a). Avšak tam, kde se kategorií používá v matematice, jde vždy o skutečná zobrazení a o objekty, které se na sebe (nebo do sebe) zobrazují. Mějme na příklad nějakou třídu množin $a, b, c, \ldots$ a zobrazení jedné množiny na druhou. Třída množin spolu s třídou zobrazení tvoří zřejmě kategorii. Součin $\alpha\beta$ existuje právě tehdy, když zobrazení α zobrazuje na množinu, která je zobrazována zobrazením β. ε_a je identické zobrazení množiny na sebe. V druhém příkladě bude třídou objektů nějaká třída topologických prostorů a zobrazeními spojitá zobrazení jednoho prostoru na druhý. Konečně jako třetí příklad uveďme kategorii, v níž třídu objektů tvoří grupy a zobrazení jsou homomorfní zobrazení jedné grupy do druhé.

Máme-li v nějaké kategorii zobrazení $\alpha : a \to b$ takové, že k němu existuje zobrazení $\beta : b \to a$ a platí

$$\alpha\beta = \varepsilon_a\,, \quad \beta\alpha = \varepsilon_b\,,$$

říkáme takovému zobrazení ekvivalence. V příkladě prvním jsou to prostá zobrazení jedné množiny na druhou, v příkladu druhém jsou to homeomorfismy a v příkladu třetím jsou to isomorfní zobrazení grupy na grupu.

Dále ukázal prof. Kuroš, jak se dá přenésti do řeči kategorii pojem kartézského součinu množin, pojem direktního a volného součinu grup a ještě jiné pojmy, které se vyskytují při homomorfních zobrazeních grupy do grupy jako na příklad pojem jádra homomorfismu. Podle mínění prof. Kuroše je kategorie velmi důležitý pojem současné abstraktní algebry.

Zapsal *Vl. Kořínek*, Praha

DIREKTNÍ SOUČINY VE SVĚTLE TEORIE KATEGORIÍ

(Přednáška profesora A. G. Kuroše konaná na veřejné schůzi algebraického semináře prof. Vl. Kořínka na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university dne 25. září 1959)

Prof. Kuroš za své návštěvy v Praze měl ještě jednu přednášku a to na veřejné schůzi algebraického semináře profesora Kořínka. Týkala se pojmu direktního součinu ve světle teorie kategorií. Direktní součiny grup hrají velkou úlohu v teorii grup, direktní součty okruhů v teorii okruhů. Společně byla tato teorie vyšetřována tím, že byla přenesena do teorie modulárních svazů a tam byly vyšetřovány direktní rozklady jednotkového prvku. Již H. Fitting v letech třicátých použil pro studium direktních součinů grup rozkladových endomorfismů, tj. projekcí grupy na jednotlivé direktní faktory. Této metody užil při vyšetřování direktních součinů, jak pisatel těchto řádek, tak také přednášející, který vše formuloval v modulárním svazu. Teorie kategorií umožnila pak vyšetřovat tento okruh otázek ještě obecněji v řeči teorie kategorií. To učinil přednášející v práci Прямые разложения в алгебраических категориях, Труды Моск. мат. общ. *8*, 1959, 391—412. Když tato teorie direktních součinů v kategoriích byla vypracována, ukázalo se, že je možno a účelno ještě ji celou přebudovat a vyjádřit vše bez pomocí kategorií, jen v tak zvaných polookruzích. To udělal žák prof. Kuroše A. Ch. Livšic v práci, která je v tisku. Polookruh je soustava s dvěma operacemi, sčítáním a násobením. Pro násobení tvoří polookruh asociativní pologrupu s jednotkovým prvkem. Sčítat se nedají libovolné prvky polookruhu. Součet existuje jen pro jisté, i nekonečné, množiny prvků nazvané sčítatelné. Součet, pokud existuje, je komutativní, tj. nezávisí na tom, jak sčítatelnou množinu uspořádáme, a jest též v jistém smyslu asociativní. Na tomto podkladě byla vybudována obecná teorie direktních součtů jednotkového prvku polookruhu. Z vět této teorie se pak specialisací dají odvodit věty o direktních součinech grup, direktních součtech okruhů a direktních rozkladů jednotkového prvku v modulárních svazech. Podle mínění prof. Kuroše je tím teorie direktních rozkladů v podstatě uzavřena.

V diskusi, která se po přednášce rozvinula, poznamenal pisatel těchto řádků, že již v třicátých letech H. Fitting vyšetřoval podobné polookruhy. Množina endomorfismů Abelovy grupy tvoří, jak známo, asociativní okruh. Jde-li však o grupu nekomutativní, pak nelze libovolné dva endomorfismy sčítat. To lze dělat jen tehdy, když obě podgrupy, na něž ty endomorfismy grupu zobrazují, jsou po prvcích záměnné. H. Fitting vyšetřoval proto polookruhy endomorfismů, v nichž součet byl definován jen pro ty dvojice endomorfismů, které splňují právě uvedenou podmínku. Nic však podstatně nového mu z toho nevyšlo. Prof. Kuroš vysvětlil, že příčina tkvěla v tom, že nedovedl vyjádřit v řeči polo-