Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Doležal

O druhé větě o střední hodnotě integrálního počtu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 84--86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108119`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O DRUHÉ VĚTĚ O STŘEDNÍ HODNOTĚ INTEGRÁLNÍHO POČTU

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Došlo dne 16. května 1959)

V článku je dokázáno, že druhou větu o střední hodnotě integrálního počtu lze obrátit.

Druhou větu o střední hodnotě integrálního počtu můžeme formulovat takto:

Buď g konečná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Jestliže je g monotonní v $\langle a, b\rangle$, pak ke každé funkci $f \in \mathbf{L}(a, b)$ existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\, \mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Všude se samozřejmě jedná o funkce reálné. $f \in \mathbf{L}(a, b)$ znamená, že konverguje Lebesguesův integrál $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. Důkaz této věty nalezneme např. v [1], str. 198.

Dokážeme, že platí

Věta. *Buď $g \in \mathbf{L}(a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Jestliže ke každé omezené měřitelné funkci f existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí* (1), *pak funkce g je monotonní v $\langle a, b\rangle - N$, kde $N \subset \langle a, b\rangle$ je množina míry nula.*

Nejprve dokážeme dvě pomocné věty.

Pomocná věta 1. *Nechť funkce g splňuje předpoklady věty a nechť je $g(b) \geqq g(a)$. Buďte $M_1, M_2 \subset \langle a, b\rangle$ dvě množiny kladné míry takové, že pro libovolné body $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ platí $x_1 < x_2$. Buďte c_1, c_2 taková čísla, že $g(x) \geqq c_1$ pro skoro všechna $x \in M_1$, $g(x) \leqq c_2$ pro skoro všechna $x \in M_2$. Potom platí $c_1 \leqq c_2$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $c_1 > c_2$. Nejprve definujme funkci f takto:

$$f(x) = k_1 < 0 \quad \text{pro} \quad x \in M_1\,,$$
$$f(x) = k_2 > 0 \quad \text{pro} \quad x \in M_2\,,$$

kde $k_1\, \mu(M_1) + k_2\, \mu(M_2) = 0$. Pro ostatní $x \in \langle a, b\rangle$ definujme $f(x) = 0$. Potom

$\int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x = k_1 \int_{M_1} g(x)\,\mathrm{d}x + k_2 \int_{M_2} g(x)\,\mathrm{d}x \leqq k_1 c_1\, \mu(M_1) + k_2 c_2\, \mu(M_2) < 0$. Avšak, jak se snadno spočítá, je $g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x = [g(b) - g(a)]\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq$ $\geqq 0$ pro všechna $\xi \in \langle a, b\rangle$. Není možné, aby pro takto definovanou funkci f platilo (1) a to je spor.

Pomocná věta 2. *Nechť funkce g splňuje předpoklady věty. Buď $g(b) \geqq g(a)$. Buď $a < \eta < b$, $\gamma_1 = \sup\limits_{x\in\langle a,\eta\rangle} \operatorname{ess} g(x)$, $\gamma_2 = \inf\limits_{x\in\langle\eta,b\rangle} \operatorname{ess} g(x)$. Potom platí $-\infty < \gamma_1 \leqq$ $\leqq \gamma_2 < \infty$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\gamma_1 > \gamma_2$ a zvolme δ_1, δ_2 tak, aby $\gamma_1 > \delta_1 >$ $> \delta_2 > \gamma_2$. Buď $M_1 = \underset{x\in\langle a,\eta\rangle}{\mathscr{E}} \{g(x) \geqq \delta_1\}$, $M_2 = \underset{x\in\langle\eta,b\rangle}{\mathscr{E}} \{g(x) \leqq \delta_2\}$. Podle definice je $\mu(M_1) > 0$, $\mu(M_2) > 0$. M_1 a M_2 splňují předpoklady pomocné věty 1 a tedy ze vztahu $\delta_1 > \delta_2$ plyne spor.

Důkaz věty. Zřejmě můžeme předpokládat, že $g(b) \geqq g(a)$. Buď $\eta_1, \eta_2, \ldots$ posloupnost všech racionálních čísel intervalu $\langle a, b\rangle$. Buď $N_n = \underset{\eta\in\langle a,\eta_n\rangle}{\mathscr{E}} \{g(\eta) >$ $> \sup\limits_{x\in\langle a,\eta_n\rangle} \operatorname{ess} g(x)\} \cup \underset{\eta\in\langle\eta_n,b\rangle}{\mathscr{E}} \{g(\eta) < \inf\limits_{x\in\langle\eta_n,b\rangle} \operatorname{ess} g(x)\}$, $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$. Množina N má zřejmě míru nula. Nechť nyní $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle - N$, $\alpha < \beta$. Existuje racionální číslo η tak, že $\alpha < \eta < \beta$. Podle konstrukce množiny N a podle pomocné věty 2 je

$$g(\alpha) \leqq \sup_{a\leqq x\leqq\eta} \operatorname{ess} g(x) \leqq \inf_{\eta\leqq x\leqq b} \operatorname{ess} g(x) \leqq g(\beta)\,;$$

tím je vše dokázáno.

Literatura

[1] *V. Jarník*: Integrální počet II, Praha 1955.

Резюме

О ВТОРОЙ ТЕОРЕМЕ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ВЛАДИМИР ДОЛЕЖАЛ (Vladimír Doležal), Прага

В этой статье доказана следующая теорема:

Пусть g — интегрируемая функция в промежутке $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a <$ $< b < +\infty)$. Пусть для любой ограниченной измеримой функции f существует такое $\xi \in \langle a, b\rangle$, что

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)\, dx\,.$$

Тогда функция g монотонна в $\langle a, b\rangle - N$, где $N \subset \langle a, b\rangle$ — множество меры нуль.

Zusammenfassung

ÜBER DEN ZWEITEN MITTELWERTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

In dieser Arbeit wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei g eine integrierbare Funktion im Intervall $\langle a, b\rangle$ und für jede beschränkte messbare Funktion f existiere ein Punkt $\xi \in \langle a, b\rangle$, so dass die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)\, dx$$

gilt. Dann ist die Funktion g monoton in $\langle a, b\rangle - N$, wo $N \subset \langle a, b\rangle$ eine Nullmenge ist.