Vlastimil Pták
O existenci spektra v Banachových algebrách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 2, 146--153

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108111

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

O EXISTENCI SPEKTRA V BANACHOVÝCH ALGEBRÁCH

VLASTIMIL PTÁK, Praha

(Došlo dne 20. listopadu 1964)

Úvod. Jak známo, jest spektrum každého prvku Banachovy algebry neprázdné. Důkaz tohoto výsledku se opírá o Liouvilleovu větu z teorie komplexních funkcí, která praví, že celistvá funkce může být na celé komplexní rovině ohraničená jen tehdy, je-li konstantní. Vzhledem k zásadnímu významu věty o spektru je snaha o nalezení tzv. elementárního důkazu tohoto výsledku zcela přirozená. Ke zjištění, jaký stupeň elementárnosti můžeme očekávat, stačí si uvědomit, že pro případ konečně dimensionálního prostoru se věta o spektru redukuje na větu o existenci vlastních čísel matice, která je v podstatě totožná s tzv. fundamentální větou algebry. Je tedy věta o spektru zobecněním fundamentální věty algebry a její důkaz nemůže proto být o nic jednodušší než důkaz tohoto klasického výsledku. Snadno se nahlédne, že vztah těchto dvou vět je ještě užší: právě tak jako je věta o spektru rozšířením fundamentální věty algebry, je také shora uvedený důkaz pomocí Liouvilleovy věty analogií podobného důkazu fundamentální věty algebry. Podívejme se nyní, jakých prostředků je potřeba k důkazu Liouvilleovy věty. Jak známo, je tato věta bezprostředním důsledkem tzv. Cauchyova odhadu: je-li f funkce holomorfní pro $|z| < r_0$ a jsou-li a_n koeficienty jejího rozvoje v okolí počátku, potom pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ a každé $0 < r < r_0$ platí $|a_n| \leqq M(r)/r^n$, kdež $M(r)$ je maximum $|f(z)|$ pro $|z| = r$. Tento odhad ihned plyne z vyjádření n-té derivace f pomocí Cauchyovy integrální formule a tato formule sama je důsledkem Cauchyovy věty. Vidíme tedy, že se důkaz věty o spektru v podstatě opírá o Cauchyovu větu.

Jak se zdá, první tzv. elementární důkaz věty o spektru podal M. H. STONE [4]; slůvko elementární jest třeba chápati v tom smyslu, že důkaz explicite nepoužívá teorie funkcí komplexní proměnné. Stoneův důkaz, právě tak jako důkazy jiných autorů (uvedené v seznamu literatury), implicite v té či oné formě část Cauchyovy věty v podstatě odvozuje. Všechny tyto důkazy jsou založeny na rozkladu v částečné zlomky

$$\frac{1}{1 - x^n} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{1 - \varepsilon_j x},$$

kde ε_j jsou všechny n-té odmocniny z jedné; výraz vpravo je vlastně až na konstantu

Riemannovým součtem pro integrál funkce $(t - x)^{-1}$ po jednotkové kružnici. (Přesněji řečeno, výraz $(2\pi/n) \sum(1 - \varepsilon_j x)^{-1}$ je zřejmě Riemannovým součtem pro integrál $A = \int_0^{2\pi} (1 - e^{-i\varphi} x)^{-1} \, d\varphi$ a snadno se zjistí, že $iA = \int(t - x)^{-1} \, dt$ po jednotkové kružnici.)

Čtenář, který se s touto problematikou setkává poprvé, učiní dobře, vrátí-li se znovu k úvodu po prostudování článku; následující zakončení úvodu je určeno především těm, kteří větu o spektru i její důkaz již znají.

Důkaz podaný v nynější poznámce (který, stejně jako všechny ostatní, je modifikací Stoneovy myšlenky) spočívá na tom, že rozkladu v částečné zlomky přímo použijeme k důkazu odhadu, který je analogií Cauchyova odhadu $|a_n| \leqq M(r)/r^n$; to je rozhodující krok důkazu (lemma (2,3)). V našem případě se jedná ovšem o funkci $f(t) = (e - tx)^{-1}$, jejíž rozvoj kolem počátku má za koeficienty mocniny x^n. Žádaný výsledek se pak dostane ve spojení s jednoduchým lemmatem (2,1). Tento postup má dvě výhody: jednak vychází zároveň i formule pro spektrální poloměr, jednak je vidět, že existenční část důkazu je zkoncentrována právě v uvedeném Cauchyově odhadu.

1. V tomto odstavci shrnujeme základní definice a poznatky z teorie Banachových algeber, potřebné v dalším.

(1,1) *Budiž A lineární algebra s jednotkou nad tělesem čísel komplexních, $x \in A$. Nazveme spektrem prvku x a označíme $\sigma(x)$ množinu všech čísel komplexních λ takových, že neexistuje $(\lambda e - x)^{-1}$.*

(1,2) *Budiž A lineární algebra s jednotkou nad tělesem čísel komplexních, $x \in A$.*

1° *Dejme tomu, že existují $u, v \in A$ tak, že*

$$ux = e\,, \quad xv = e\,.$$

Potom $u = v$ a prvek x má inversní.

2° *Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou po dvou záměnné prvky algebry A; označme $a = a_1 a_2 \ldots a_n$. Potom jestliže prvek a má inversní, existuje též a_i^{-1} pro každé i.*

Důkaz. Za uvedených předpokladů jest $u = ue = u(xv) = (ux)\,v = ev = v$, takže $u = v = x^{-1}$.

Abychom dokázali druhou část lemmatu, zvolme pevné i. Označme $u = a^{-1} a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n$ a podobně $v = a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n a^{-1}$. Užijeme-li záměnnosti prvků a_i, dostáváme

$$ua_i = a^{-1}(a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n a_i) = a^{-1}(a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_n) = e$$

a stejným způsobem se dokáže i rovnost $av = e$. Podle prvního tvrzení to však znamená, že a_i má inversní.

(1,3) *Budiž A lineární algebra s jednotkou nad tělesem čísel komplexních, nechť $x \in A$ a buď p polynom s komplexními koeficienty. Potom*

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))\,.$$

Důkaz. I. Buď dáno λ_0; potom existuje polynom q tak, že $p(\lambda) - p(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$. Jestliže $\lambda_0 \in \sigma(x)$, pak k prvku $(x - \lambda_0 e)$ neexistuje inversní. Nemůže tedy podle (1,2) existovat inversní ani k prvku $(x - \lambda_0 e)\, q(x)$. To znamená, že $p(x) - p(\lambda_0)\, e$ nemá inversní, takže $p(\lambda_0) \in \sigma(p(x))$. Dokázali jsme tedy inklusi $p(\sigma(x)) \subset \sigma(p(x))$.

II. Věta zřejmě platí pro polynomy stupně 0. Předpokládejme tedy, že polynom p má stupeň $n \geqq 1$. Buď dáno λ_0; potom existují čísla $\gamma, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tak, že $p(\lambda) - \lambda_0 = \gamma(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$. Jestliže $\lambda_0 \in \sigma(p(x))$, prvek $p(x) - \lambda_0 e$ nemá iversní, takže podle (1,2) aspoň jeden z prvků $x - \lambda_i e$ nemá inversní. Pro nějaké i platí tedy $\lambda_i \in \sigma(x)$. Protože $\lambda_0 = p(\lambda_i)$, jest $\lambda_0 \in p(\sigma(x))$. Tím je dokázána inkluse $\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x))$ a důkaz je dokončen.

(1,4) *Budiž A komplexní lineární algebra s jednotkou, $x \in A$. Označme*

$$|x|_\sigma = \sup |\lambda| , \quad \lambda \in \sigma(x) .$$

Číslo $|x|_\sigma$ nazveme spektrálním poloměrem prvku x.

(1,5) *Banachovou algebrou nazveme lineární algebru s jednotkou nad tělesem čísel komplexních, která je zároveň Banachovým prostorem, při čemž norma splňuje následující dva požadavky:*

1° *pro libovolné dva prvky x, y platí $|xy| \leqq |x|\, |y|$;*

2° *pro jednotkový prvek e platí $|e| = 1$.*

(1,6) *Nechť A je Banachova algebra, $x \in A$. Jestliže $|x - e| < 1$, pak x je regulární. Množina všech regulárních prvků je otevřená.*

Důkaz. Nechť $x \in A$ a $|x - e| < 1$. Protože A je úplný prostor a $|(x - e)^n| \leqq |x - e|^n$, jest řada $\sum_0^\infty (e - x)^n$ konvergentní. Snadno se zjistí, že její součet je inversním prvkem k prvku x. Nechť dále $x_0 \in A$ má inversní a nechť $|x - x_0| < |x_0^{-1}|^{-1}$. Jest tedy $|x_0^{-1}(x - x_0)| < 1$, takže existuje prvek inversní k prvku $w = (e + x_0^{-1}(x - x_0))$. Protože $x_0 w = x$, jest $w^{-1} x_0^{-1}$ inversním prvkem pro x.

2. Následující lemma umožňuje vhodnou kombinací příslušných nerovností dokázat existenci $\lim \sqrt[n]{|x^n|}$ a ve spojení s další, existenční větou získat různá vyjádření pro spektrální poloměr.

(2,1) *Nechť B je Banachova algebra, $x \in B$. Označme po řadě M_i množiny všech komplexních čísel λ, které mají následující vlastnosti.*

M_1: *$\sum \lambda^n x^n$ je absolutně konvergentní*
M_2: *$\sum \lambda^n x^n$ je konvergentní*
M_3: *posloupnost $(\lambda x)^n$ konverguje k nule*
M_4: *posloupnost $(\lambda x)^n$ je ohraničená*

Potom supremum β čísel $|\lambda|$ je stejné pro všechny tyto množiny. Jest $\beta > 0$, existuje $\lim \sqrt[n]{|x^n|}$ *a platí*

$$\lim \sqrt[n]{|x^n|} = \inf \sqrt[n]{|x^n|} = \frac{1}{\beta}$$

(*klademe ovšem $1/\beta = 0$, jestliže $\beta = \infty$*).

Důkaz. Zřejmě jest $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4$. Dále je zřejmé toto: jestliže $\lambda_0 \in M_4$ a $|\lambda| < |\lambda_0|$, potom $\lambda \in M_1$; skutečně, jest $|\lambda^n x^n| \leqq |\lambda/\lambda_0|^n |\lambda_0^n x^n|$ a jest $|\lambda/\lambda_0| < 1$. Odtud ihned plyne, že všechny čtyři množiny mají stejné supremum absolutních hodnot β. Je-li $x = 0$, jest zřejmě $\beta = \infty$. Buď tedy $x \neq 0$. Protože $1/|x| > 0$ a každé λ, pro něž $|\lambda| \leqq 1/|x|$, patří do M_4, jest $\beta > 0$.

Dokažme dále, že pro každé $\lambda \in M_3$ platí $|\lambda| \limsup \sqrt[n]{|x^n|} \leqq 1$. V opačném případě by totiž bylo $\limsup \sqrt[n]{|\lambda^n x^n|} > 1$, takže pro nekonečně mnoho indexů n by platilo $|\lambda^n x^n| \geqq 1$, což je ve sporu s předpokladem $\lambda \in M_3$. Snadno se nahlédne, že z právě dokázaného tvrzení plyne nerovnost $\beta \limsup \sqrt[n]{|x^n|} \leqq 1$.

Nechť pro nějaké λ platí $|\lambda| \inf \sqrt[n]{|x^n|} < 1$. Existuje tedy m tak, že $|\lambda^m x^m| < 1$. Odtud snadno plyne, že $\lim \lambda^n x^n = 0$, tedy $\lambda \in M_3$. Z nerovnosti $|\lambda| \inf \sqrt[n]{|x^n|} < 1$ plyne tedy $|\lambda| \leqq \beta$.

Spolu s předešlým výsledkem dostáváme snadno

$$\frac{1}{\beta} \leqq \inf \sqrt[n]{|x^n|} \leqq \limsup \sqrt[n]{|x^n|} \leqq \frac{1}{\beta},$$

takže existuje $\lim \sqrt[n]{|x^n|}$ a věta je dokázána.

(2,2) *Nechť B je Banachova algebra, $x \in B$.* Potom $|x|_\sigma \leqq \inf \sqrt[n]{|x^n|}$.

Důkaz. I. Nechť β znamená opět číslo definované v (2,1). Jestliže číslo λ splňuje nerovnost $|\lambda| > \inf \sqrt[n]{|x^n|}$, pak pro $\mu = 1/\lambda$ platí $|\mu| < \beta$, takže podle (2,1) řada $\sum (\mu x)^n$ je konvergentní se součtem $(e - \mu x)^{-1}$. Protože $(\lambda e - x) = \lambda(e - \mu x)$, existuje také $(\lambda e - x)^{-1}$.

II. Uveďme ještě jeden důkaz nerovnosti $|x|_\sigma \leqq \inf \sqrt[n]{|x^n|}$, používající algebraickou větu (1,3). Dokážeme nejprve nerovnost $|y|_\sigma \leqq |y|$ pro každé $y \in B$. Podle (1,3) jest však potom $|x|_\sigma^n = |x^n|_\sigma \leqq |x^n|$, takže $|x|_\sigma \leqq \inf \sqrt[n]{|x^n|}$. K důkazu nerovnosti $|y|_\sigma \leqq |y|$ stačí si všimnouti, že pro $|\lambda| > |y|$ jest $|\mu y| < 1$, označíme-li $\mu = 1/\lambda$. Existuje tedy $(e - \mu y)^{-1}$ a tedy též $(\lambda e - y)$ má inversní, protože $(\lambda e - y) = \lambda(e - \mu y)$.

Předešlé lemma ukazuje, že $(\lambda e - x)^{-1}$ existuje pro všechna λ vně kruhu o poloměru $\inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Že tento poloměr již nelze zmenšit, ukazuje poslední, rozhodující lemma

(2,3) *Budiž B Banachova algebra, $x \in B$. Nechť $(e - \beta x)^{-1}$ existuje pro $|\beta| < \varrho$. Potom*

$$\lim (\beta x)^n = 0 \quad \textit{pro} \quad |\beta| < \varrho.$$

Důkaz. Snadno se zjistí, že pro každé přirozené n a každé $|\beta| < \varrho$ platí

$$(e - (\beta x)^n)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (e - \varepsilon_i \beta x)^{-1},$$

kdež $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ jsou všechny n-té odmocniny z jedné. Protože funkce $(e - \xi x)^{-1}$ je spojitá pro $|\xi| < \varrho$ a tedy stejnoměrně spojitá na každém uzavřeném kruhu $|\xi| \leqq \varrho_0 < \varrho$, snadno se ukáže podobně jako v theorii Riemannova integrálu, že pro každé $r < \varrho$ existuje $\lim_n (1/n) \sum_0^{n-1} (e - \varepsilon_i r x)^{-1}$, a že tato limita, kterou označíme $h(r)$, spojitě závisí na $r \in \langle 0, \varrho)$.[1])

Dokažme nyní následující tvrzení: budiž $0 < r_0 < \varrho$ a nechť $h(r_0)^{-1}$ existuje; potom $h(r_0) = e$ a $\lim (r_0 x)^n = 0$. Skutečně, pro každé $r \in \langle 0, \varrho)$ platí $\lim (e - (rx)^n)^{-1} = h(r)$; odtud plyne ihned, že $\lim (r_0 x)^n = e - \lim (e - (r_0 x)^n) = e - (h(r_0))^{-1}$. Je-li nyní $0 \leqq r < r_0$, jest tedy $\lim (r/r_0)^n (r_0 x)^n = 0$, takže $\lim (rx)^n = 0$. Protože, jak víme, pro každé $r \in \langle 0, \varrho)$ platí rovnost $\lim (e - (rx)^n)^{-1} = h(r)$, plyne odtud $h(r) = e$. Ze spojitosti však plyne též $h(r_0) = e$.

Označme nyní R množinu všech $r \in \langle 0, \varrho)$, pro která existuje $h(r)^{-1}$. Podle předešlého jest $r \in R$ právě když $h(r) = e$. Protože h je spojitá, jest R uzavřená v $\langle 0, \varrho)$. Protože $h(0) = e$, jest množina R neprázdná a podle (1,5) je otevřená v $\langle 0, \varrho)$. Musí tedy $R = \langle 0, \varrho)$, takže pro všechna $r \in \langle 0, \varrho)$ plyne $\lim (rx)^n = 0$.

Nyní můžeme vysloviti hlavní větu.

(2,4) **Věta.** *Nechť B je Banachova algebra, $x \in B$. Potom $\sigma(x)$ je neprázdná kompaktní množina, existuje* $\lim \sqrt[n]{|x^n|}$ *a platí*

$$|x|_\sigma = \lim \sqrt[n]{|x^n|} = \inf \sqrt[n]{|x^n|}.$$

Důkaz. Podle (2,2) jest $\sigma(x)$ ohraničená množina. Jestliže λ_0 nepatří do $\sigma(x)$, potom podle (1,5) existuje okolí bodu λ_0, které rovněž nepatří do $\sigma(x)$. Množina $\sigma(x)$

---

[1]) Označme $g(\xi) = (e - \xi x)^{-1}$ pro $|\xi| \leqq \varrho_0$ a dále pro $d > 0$ označme

$$\varepsilon(d) = \sup \{|g(\xi_1) - g(\xi_2)|;\ |\xi_1|, |\xi_2| \leqq \varrho_0, |\xi_1 - \xi_2| \leqq d\};$$

jest tedy $\lim \varepsilon(d) = 0$ pro $d \to 0$. Označme $S(n, r) = (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)$, kdež ξ_i probíhá všechny n-té odmocniny čísla r. Buďte nyní n a m přirozená čísla; označíme-li $\xi = r^{1/mn} \,.\, \exp(2\pi i/nm)$, můžeme psáti

$$S(nm, r) - S(n, r) = \frac{1}{nm} \sum_{k=0}^{nm-1} g(\xi^k) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(\xi^{mj}) = \frac{1}{nm} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{jm \leqq k \leqq (j+1)m} (g(\xi^k) - g(\xi^{jm})).$$

Je tedy $|S(n, r) - S(nm, r)| \leqq \varepsilon(2\pi/n)$, odkud $|S(n, r) - S(m, r)| \leqq |S(n, r) - S(nm, r)| + |S(nm, r) - S(m, r)| \leqq \varepsilon(2\pi/n) + \varepsilon(2\pi/m)$. Odtud ihned plyne existence limity $h(r)$. Její spojitost jako funkce r je důsledkem zřejmého odhadu $|S(n, r) - S(n, r')| \leqq \varepsilon(r - r')$ pro $0 \leqq r' < r \leqq \varrho_0$.

je tedy ohraničená a uzavřená část komplexní roviny. Abychom dokázali, že je neprázdná, rozeznáváme dva případy.

I. Jest $\inf \sqrt[n]{|x^n|} = 0$. Dokážeme pak, že $0 \in \sigma(x)$. Nechť naopak existuje prvek y inversní k x. Pro každé n platí potom $e = x^n y^n$, takže $1 \leqq |x^n|\,|y^n| \leqq |x^n|\,|y|^n$. Odtud $1 \leqq \sqrt[n]{|x^n|}\,.\,|y|$, což je spor s předpokladem $\inf \sqrt[n]{|x^n|} = 0$. Prvek x tedy nemá inversní, takže $0 \in \sigma(x)$.

II. Jest $\inf \sqrt[n]{|x^n|} > 0$. Z lemmatu (2,2) plyne, že $(\lambda e - x)^{-1}$ existuje pro všechna λ, pro něž $|\lambda| > \inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Abychom dokázali existenci bodu $\lambda \in \sigma(x)$, pro nějž $|\lambda| = \inf \sqrt[n]{|x^n|}$, stačí tedy dokázati následující tvrzení: Nechť $r_0 > 0$ a nechť $(\lambda e - x)^{-1}$ existuje pro všechna λ, pro něž $|\lambda| > r_0$; potom $r_0 \geqq \inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Jestliže $(\lambda e - x)^{-1}$ existuje pro $|\lambda| > r_0$, existuje též $(e - \alpha x)^{-1}$ pro $|\alpha| < 1/r_0$. Podle (2,3) však odtud plyne, že $(\alpha x)^n \to 0$ pro všechna $|\alpha| < 1/r_0$, takže $1/r_0 \leqq \beta$. Odtud $r_0 \geqq 1/\beta = \inf \sqrt[n]{|x^n|}$.

Je tedy $|x|_\sigma = \inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Zbývající tvrzení plyne z (2,1).

(2,5) *Nechť B je Banachova algebra, $x \in B$. Potom následující tvrzení jsou si ekvivalentní:*

1° $\sum x^n$ *je absolutně konvergentní*
2° $\sum x^n$ *je konvergentní*
3° $\lim x^n = 0$
4° $|x^n| < 1$ *pro veliká n*
5° $|x^n| < 1$ *pro nějaké n*
6° $|x|_\sigma < 1$

Důkaz. Implikace $1° \to 2° \to 3° \to 4° \to 5° \to 6°$ jsou bezprostřední. Jestliže $|x|_\sigma < 1$, potom platí $\sqrt[n]{|x^n|} \leqq 1 - \varepsilon$ pro jisté kladné ε a veliká n. Pro tato n platí tedy $|x^n| \leqq (1 - \varepsilon)^n$, odkud plyne 1°.

3. Jest užitečné všimnouti si zvláště případu operátorů na konečně-dimensionálním prostoru. Předešlé výsledky až do (2,2) včetně ukazují, že spektrum — pokud existuje — musí ležet v uzavřeném kruhu o poloměru $\inf \sqrt[n]{|x^n|} = \lim \sqrt[n]{|x^n|}$. Důkazy těchto výsledků se v případě konečně-dimensionálním nijak nezmění ani nezjednoduší. Podstatná, existenční část hlavní věty (2,4) je obsažena ve (2,3). Dá se pochopitelně očekávat, že v případě konečně-dimensionálním bude možno využít toho, že spektrum lineárních operátorů dovedeme úplně popsati. Předpokládejme tedy, že algebra B jest jistou algebrou operátorů na konečně-dimensionálním Banachově prostoru P. V tomto případě plyne ze základních vět lineární algebry, že operátor má inversní, právě když je prostý. Odtud plyne ihned, že spektrum takového prvku se skládá jen z vlastních čísel: jestliže $\lambda e - x$ nemá inversní, znamená to, že operátor $\lambda e - x$ není prostý, takže λ je vlastním číslem operátoru x. Dále je známo, že vlastní čísla jsou totožná s kořeny charakteristického polynomu, takže existence aspoň jednoho bodu spektra je zaručena, známe-li fundamentální větu algebry.

Výsledek (2,3) ukazuje nejen to, že spektrum je neprázdné, ale v podstatě dokazuje dokonce existenci bodu spektra na kružnici o poloměru $\inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Není nesnadné se přesvědčiti, že tvrzení věty (2,3) je ekvivalentní s následujícím výrokem:

Jestliže $x \in B$ a $|x|_\sigma < 1$, potom $\lim x^n = 0$.

V případě konečně-dimensionálním stačí tedy místo věty (2,3) dokázati následující tvrzení.

(3,1) *Nechť A je matice řádu p a nechť pro všechna vlastní čísla λ_i matice A platí $|\lambda_i| < 1$. Potom* $\lim A^n = 0$.

Důkaz. Jak známo, existuje regulární matice T taková, že $A = TKT^{-1}$, kdež K je Jordanův normální tvar matice A. Protože pak $A^n = TK^nT^{-1}$, stačí tvrzení věty dokázat jen pro matice v normálním tvaru. (Jest třeba si všimnouti, že k důkazu existence matice T uvedených vlastností se používá fundamentální věty algebry.) Matice K je blokově diagonálního tvaru

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 + B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_s + B_s \end{pmatrix},$$

kdež diagonální bloky mají dimense $n_1, \ldots, n_s$; čísla n_i jsou $\geqq 1$ a jejich součet je roven n, matice E_i jsou jednotkové matice řádu n_i a B_i jsou nilpotentní Jordanovy bloky. Stačí tedy dokázati tvrzení věty pro jednotlivý blok dimense $d > 1$. Budiž tedy $d > 1$, $|\lambda| < 1$, E jednotková matice řádu d a B matice, jejíž prvky b_{ik} jsou popsány vztahy

$$b_{ik} = 1 \text{ pro } k - i = 1\,, \quad b_{ik} = 0 \text{ pro ostatní dvojice indexů}\,.$$

Máme dokázati, že $\lim (\lambda E + B)^n = 0$. Zaveďme za tím účelem další označení. Pro $s = 0, 1, \ldots$ budiž B_s matice, jejíž prvky $b_{ik}^{(s)}$ jsou definovány vztahy

$$b_{ik}^{(s)} = 1 \text{ pro } k - i = s\,, \quad b_{ik}^{(s)} = 0 \text{ pro ostatní dvojice indexů}\,.$$

Jest tedy $E = B_0$, $B = B_1$. Jest snadné se přesvědčiti, že $B^s = B_s$ pro všechna s, při čemž ovšem $B^s = 0$ pro $s \geqq d$. Jest tedy

$$(\lambda E + B)^n = (\lambda B_0 + B_1)^n = \lambda^n B_0 + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} B_1 + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} B_2 + \ldots,$$

při čemž tento rozvoj končí u indexu B_{d-1}. Odtud ihned plyne $\lim (\lambda E + B)^n = 0$. Nyní můžeme vysloviti pro konečně-dimensionální případ výsledek analogický větě (2,4).

(3,2) *Budiž A lineární operátor na konečně-dimensionálním Banachově prostoru P. Potom $\sigma(A)$ je neprázdné, existuje* $\lim \sqrt[n]{|A^n|}$ *a platí*

$$|A|_\sigma = \lim \sqrt[n]{|A^n|} = \inf \sqrt[n]{|A^n|}\,.$$

Důkaz. Výsledky až do (2,2) včetně ukazují, že všechna vlastní čísla operátoru A leží v uzavřeném kruhu o poloměru $\inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Je tedy $|x|_\sigma \leqq \inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Předpokládejme, že $|x|_\sigma < \inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Volme číslo μ tak, aby $|x|_\sigma < \mu < \inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Prvek x/μ má spektrální poloměr <1. Podle (3,1) platí tedy $\lim (x/\mu)^n = 0$; existuje tedy n_0 tak, že pro $n \geqq n_0$ jest $|(x/\mu)^n| \leqq 1$. Pro $n \geqq n_0$ platí tedy $|x^n| \leqq \mu^n$, odkud $\lim \sqrt[n]{|x^n|} \leqq \mu$, což je spor.

Literatura

[1] *S. Kametani:* An elementary proof of the fundamental theorem of normed fields, J. Math. Soc. Japan *4* (1952), 96—99.

[2] *C. Rickart:* An elementary proof of a fundamental theorem in the theory of Banach algebras, Mich. Math. J. *5* (1958), 75—78.

[3] *C. Rickart:* General Theory of Banach Algebras, Princeton 1960.

[4] *M. H. Stone:* On the theorem of Gelfand-Mazur, Ann. Sci. Polon. Math. *25* (1953), 238—240.

[5] *L. Tornheim:* Normed fields over the real and complex fields, Mich. Math. J. *1* (1952), 61—68.

Adresa autora: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Резюме

О СУЩЕСТВОВАНИИ СПЕКТРА В АЛГЕБРАХ БАНАХА

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага

Статья содержит ,,элементарное" доказательство теоремы, что к любому элементу x алгебры Банаха B существует точка спектра на окружности с центром в начале радиуса $\inf \sqrt[n]{|x^n|}$. Доказательство основано на определенной модификации идеи М. Г. Стоуна [4].

Summary

ON THE SPECTRUM OF AN ELEMENT OF A BANACH ALGEBRA

VLASTIMIL PTÁK, Praha

An expository article. An "elementary" proof is given of the fact that, for each element x of a Banach algebra B, there exists a point of the spectrum on the circle of diameter $\inf \sqrt[n]{|x^n|}$. The proof is based on a modification of the idea of M. H. Stone [4].