Lando Degoli

Bases rationnelles des systèmes de quadriques

Archivum Mathematicum, Vol. 25 (1989), No. 3, 119--126

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107349

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 25, No. 3 (1989), 119–126

2

BASES RATIONNELLES DES SYSTÉMES DE QUADRIQUES

LANDO DEGOLI

(Received June 24, 1985)

Abstract. On démontre que la variété base d'un système linéaire de quadriques de S_r à Jacobienne de rang $r - k$ est: un S_k double, ou une variété réductible, qui possède deux sub-variétés rationnelles, ou une variété rationnelle irréductible. Après on donne des exemples significatifs.

Key words. Quadric, linear system of quadrics.

MS Classification. 51 A 05

1°

Dans l'espace linéaire S_r de coordonnées projectives homogènes x_i ($i = 0, 1, \ldots, r$), choisissons $d + 1$ quadriques linéairement indépendantes:

$$f_0 = 0, f_1 = 0, \ldots, f_d = 0$$

avec:

$$f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \qquad (a_q^{ik} = a_q^{ki}).$$

Le système linéaire L_d de dimension d, qui en résulte, est exprimé par l'équation:

$$\sum_{q=0}^{d} \varrho_q f_q = 0.$$

Supposons que la matrice Jacobienne à $r + 1$ lignes et $d + 1$ colonnes:

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\| \qquad \begin{pmatrix} q = 0, 1, \ldots, d \\ i = 0, 1, \ldots, r \end{pmatrix}$$

soit à rang $m = r - k$.

La matrice Jacobienne égalisée à zéro est le lieu géometrique des points de S_r conjugués entre eux-mêmes par rapport à toutes les quadriques du système. Si la matrice Jacobienne est identiquement nulle, cela signifie que tout l'espace est le lieu des points conjugués. Si le rang est $r - h$ ($h \geq 0$) un point générique de S_r est conjugué avec un S_h.

Donnés deux systèmes linéaires L_a et L_b, qui ont en commun un système linéaire L_c, leur système-union résulte de dimension $a + b - c$.

Nous dirons que le système $L_{d/m}(m \leq d)$ de dimension d et à Jacobienne de rang m est *réductible*, lorsqu'il est l'union de systèmes subordonnés, parmi les quels au moins un $L_{g/c}(c \leq g)$ n'a pas des quadriques en commun avec les autres; autrement dît, il sera nommé: *irréductible*.

Il existe le:

Théoreme. *Un système linéaire irréductible de quadriques* $L_{d/r-k}(r - k \leq d, k \geqq 0)$ *a pour variété base seulement une des variétés suivantes:*

I. *Un* S_k *double et, dans ce cas, les quadriques sont des* S_k*-cônes avec* S_k*-sommet en commun:*

II. *Une variété réductible, qui possède deux sub-variétés rationnelles de dimensions* h *et* $r - h + k - 1 (1 \leq h \leq r - 2)$:

III. *Une variété rationnelle irréductible de dimension:* $\dfrac{r + k - 1}{2}$.

Démonstration. Considérons avant tout le cas particulier: $k = 0$. Soit le système linéaire irréductible de quadriques $L_{d/r}(r \leq d)$ de S_r.

D'après un théorème connu (voir: [2] et [5]) les quadriques de L_d, qui passent par un point générique P de S_r, ont en commun une droite, qui résulte corde de la variété base V du système.

Soit R le complexe des droites constitué par toutes les cordes de V, qui à cause du théorème cité, remplissent tout S_r.

Entrecoupons ce complexe par un hyperplan S_{r-1}. Chaque droite du complexe sera entrecoupée dans un point. Il est ainsi possible établir une correspondance biunivoque entre les points de l'hyperplan et les droites du complexe R.

Pour cela le complexe R est rationnel.

Supposons que les quadriques aient en commun un point double A. Il en résulte que toutes les droites, qui sortent de A, sont cordes de la variété constituée par le point A. Elles remplissent tout S_r et il est évident qu'elles forment un complexe rationnel.

Les quadriques ne peuvent pas avoir un autre point double B en commun, sinon par un point générique P il passerait plus qu'une corde: la droite PA et la droite PB.

Par conséquent le rang de la Jacobienne serait $< r$, contre l'hypothése.

Il s'ensuit que les quadriques sont des cônes avec S_0-sommet en commun.

'Hors de ce cas, puisque R est rationnel, il en résulte que les coordonnées de droite de ses droites, les p_{ik}, c'est à dire les mineurs extraits de la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_r \end{matrix} \right\|$$

sont fonctions rationnelles de $r - 1$ paramètres indépendantes.

Nous pouvons indiquer avec $M(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ et $N(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ deux points quelconques de la variété base et avec MN la corde qui les joint.

Si la variété base est réductible, il aura dans elle deux variétés subordonnées W et Z de dimensions respectives h et $r - h - 1$ $(1 \leq h \leq r - 2)$. On rejette le cas $h = 0$ et $h = r - 1$ parce que dans ce cas les quadriques cbntiennent au moins un hyperplan. Donc elles résultent couples d'hyperplans ayant un hyperplan en commun.

Les autre hyperplans de la couple devraient possèder un S_0: il en résulte que leur nombre est ∞^{r-1}. Pour cela le système de quadriques aurait dimension $d = r - 1$, contre l'hypothèse qu'il soit $r \leq d$.

Les variétés W et Z ont les dimensions citées parce que, en projetant W par un point générique P on obtient une variété T de dimension $h + 1$, qui entrecoupe Z seulement dans un point Q externe à la variété intersection de W avec Z.

En effet, en résultant la droite PQ corde de V, seulement dans ce cas P résulte conjugué avec un seul point par rapport à toutes les quadriques du système.

Notons:

$x_0 = 1, x_1 = \Phi_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h), x_2 = \Phi_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h), \ldots, x_r = \Phi_r(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h)$ les équations paramétriques de W.

On peut indiquer celles de Z avec:

$$y_0 = 1, y_1 = \Psi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r-h-1}), y_2 = \Psi_2(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r-h-1}), \ldots, y_r = \\ = \Psi_r(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r-h-1}).$$

Les premiers rp_{ik}, extraits de la matrice (1) résultent:

$$\begin{aligned} p_{01} &= \Psi_1 - \Phi_1 \\ p_{02} &= \Psi_2 - \Phi_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{0r} &= \Psi_r - \Phi_r. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les différences:

$$\Psi_i - \Phi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

sont rationnelless par rapport aux paramètres σ_m, τ_n. Pour cela l'éventuelle partie irrationnelle de Ψ_i et Φ_i doit s'éclipser par différence.

On en déduit que:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= C_i + E_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \\ \Psi_i &= D_i + E_i \end{aligned}$$

où C_i et D_i sont fonctions rationnelles et E_i est l'éventuelle partie irrationnelle de Φ_i et Ψ_i.

Fixons un point M sur W: ce comporte: $C_i = C$ et $E_i = E$ (C et E = constants).

En variant le point N sur Z, il s'ensuit que, pour que la difference $\Psi_i - \Phi_i$ soit toujours rationnelle, il faut que E_i résulte toujours égal à E, c'est à dire: $E_i =$

= constant. Analoguement, si nous ténons fixé Ψ_t et nous faisons varier Φ_t sur W, on obtient le même résultat.

Mais si E_t est constant dans les deux variétés, il n'est plus irrationnel. Pour cela Φ_t e Ψ_t sont rationnelles, comme il fallait démontrer.

Supposons maintenant que V soit irréductible. Si h est sa dimension, puisque ses cordes sont ∞^{2h} chaque corde possède ∞^1 points.

On obtient:

$$2h - 1 = r$$

c'est à dire:

$$h = \frac{r-1}{2},$$

il s'ensuit que r est nécessairement impair.

En répétant le raisonnement, que nous avons fait précédemment, choisissons deux points $M(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ et $N(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ sur cette variété.

Écrivons les équations de V en forme paramétrique:

$$x_0 = 1, x_1 = \Theta_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\frac{r-1}{2}}), x_2 = \Theta_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\frac{r-1}{2}}), \ldots, x_r =$$
$$= \Theta_r(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\frac{r-1}{2}}), y_0 = 1, y_1 = \Theta_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\frac{r-1}{2}}), y_2 = \Theta_2(\tau_1, \tau_2, \ldots,$$
$$\ldots, \tau_{\frac{r-1}{2}}), \ldots, y_r = \Theta_r(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\frac{r-1}{2}}.$$

Les premiers p_{ik} résultent:

$$p_{01} = \Theta_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\frac{r-1}{2}}) - \Theta_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\frac{r-1}{2}})$$
$$p_{02} = \Theta_2(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\frac{r-1}{2}}) - \Theta_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\frac{r-1}{2}})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{0r} = \Theta_r(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\frac{r-1}{2}}) - \Theta_r(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\frac{r-1}{2}})$$

En répétant les considérations précédentes, nous pouvons fixer le point M et par conséquent les $\Theta_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\frac{r-1}{2}})$ et faire varier le point N sur toute la variété.

Par le raisonnement précédent, puisque les p_{0k} $(k = 1, 2, \ldots, r)$ résultent rationnelles, les Θ_i aussi seront rationnelles, comme il fallait démontrer.

Soit maintenant le système $L_{d/r-1}(r - 1 \leq d)$ irréductible. Entrecoupons ce système par un hyperplan. D'après un théorème bien connu de Terracini (voir: [7]), on obtient un système de quadriques irréductible de S_{r-1} ayant la même dimension et le même rang.

Indiquons ce système par $L'_{d/r-1}$. Puisque l'espace qui le contient a dimension $r - 1$, ce système satisfait à la démonstration précédente et sa variété est une des suivantes:

I. un point double de S_{r-1}:

II. une variété réductible de S_{r-1}, qui possède deux sub-variétés rationnelles de dimensions h_1 et $r - h_1 - 2 (1 \leq h_1 \leq r - 3)$:

III. une variété irréductible de S_{r-1} de dimension $\frac{r-2}{2}$ (r = nombre pair).

Telles variétés sont évidemment les sections hyperplanes de la variété base du système $L_{d/r-1}$.

Puisque on obtient un tel résultat dans un S_{r-1} quelconque, il s'ensuit que la variété base de $L_{d/r-1}$ est une des suivantes:

I. une droite doublé de S_r. (En effet un hyperplan générique de S_r coupe dans un seul point double seulement une droite double).

II. Une variété réductible, qui possède deux sub-variétés radionnelles de dimensions: $h = h_1 + 1$ et $r - h = r - h_1 - 1$. (Les variétés sont nécessairement rationnelles parce que leur sections avec un hyperplan générique sont rationnelles. Si, en effet, une seule coordonnée, par exemple $x_m = \Phi_m(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{h+1})$ était fonction irrationnelle des paramètres, la section hyperplane $x_s = 0 (s \neq m, 0 \leq s \leq$ $\leq r)$ serait irrationnelle, contre la démonstration précédente. Les dimensions de cette variété, sont évidemment $h_1 + 1$ et $r - h_1 - 1$, pour que les sections hyperplanes résultent de dimensions h_1 et $r - h_1 - 2$.)

III. Une variété rationnelle irréductible de dimension $\frac{r}{2}$ $\left(\text{cette variété doit être rationnelle pour les mêmes motifs susdits et elle doit avoir dimension } \frac{r}{2},\right.$ $\left.\text{pour que la section hyperplane ait dimension } \frac{r-2}{2}\right)$.

Soit maintenant le système $L_{d/r-2} (r - 2 \leq d)$. En sectionnant ce système avec un hyperplan, on obtient un système $L'_{d/r-2} (r - 2 \leq d)$ de S_{r-1}, qui par rapport à S_{r-1}, se trouve dans les mêmes conditions du système $L_{d/r-1}$ par rapport à S_r. Pour cela les conclusions précédentes sont valides et la variété base de $L_{d/r-2}$ est une des suivantes:

I. Un plan double;

II. une variété réductible, qui possède deux sub-variétés rationnelles de dimensions h et $r - h + 1 = r - h + 2 - 1$;

III. une variété rationnelle irréductible de dimension $\frac{r+1}{2}$ (r = nombre impair).

Soit maintenant le système $L_{d/r-3} (r - 3 \leq d)$. En sectionnant ce système par un hyperplan et en répétant le raisonnement précédent on trouvera que le variété base sera une des suivantes:

I. Un S_3 double;

II. une variété réductible, qui possède deux sub-variétés rationnelles de dimensions h et $r - h + 2 = r - h + 3 - 1$;

III. une variété rationnelle irréductible de dimension $\frac{r+2}{2}$ (r = nombre pair).

Ainsi poursuivant il est évident qu'on parvient a démontrer le théoreme.

2°

Donnons maintenant des exemples significatifs.

1°) Dans S_5 il existe un système linéaire de quadriques $L_{5/5}$, dont la variété base est constituée par une V_2^3 rationnelle de S_4 et par un plan, ayant en commun avec la V_2^3 une génératrice.

Les équations canoniques de V_2^3 sont:

$$\frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}, \qquad x_5 = 0$$

celles du plan:

$$x_0 - x_1 = 0, \qquad x_1 - x_2 = 0, \qquad x_3 - x_4 = 0, \qquad x_5 = 0.$$

Et le système devient:

$$\varrho_0(x_0x_2 - x_1^2) + \varrho_1(x_0x_4 - x_1x_3) + \varrho_2(x_1x_4 - x_2x_3) +$$
$$+ \varrho_3(x_0 - x_1)\, x_5 + \varrho_4(x_1 - x_2)\, x_5 + \varrho_5(x_3 - x_4)\, x_5 = 0.$$

2°) Si la V_2^3 est constituée d'une quadrique de S_3 et d'un plan de S_4 d'équations:

(1) $$x_0 - x_1 = 0, \qquad x_2 - x_3 = 0, \qquad x_5 = 0,$$

qui possède en commun une génératrice avec la quadrique:

(2) $$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3}, \qquad x_4 = x_5 = 0$$

on obtient trois quadriques de S_4:

$$x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \qquad x_4(x_0 - x_1) = 0, \qquad x_4(x_2 - x_3) = 0.$$

Nous pouvons considérer un plan de S_5, qui a en commun avec la V_2^3 réductible, c'est à dire avec la quadrique (2), une autre génératrice:

$$x_0 - x_2 = 0, \qquad x_3 - x_1 = 0, \qquad x_4 = 0$$

et de cette manière on obtient le système linéaire de S_5:

$$\varrho_0(x_0x_3 - x_1x_2) = \varrho_1(x_0 - x_1)\, x_4 = \varrho_2(x_2 - x_3)\, x_4 +$$
$$+ \varrho_3(x_0 - x_3)\, x_5 = \varrho_4(x_3 - x_4)\, x_5 + \varrho_5 x_4 x_5 = 0$$

qui est un $L_{5/5}$ de S_5.

3°

Dans S_6 considérons le système linéaire $L_{5\cdot 5}$ de S_6:

$$\varrho_0(x_0x_3 - x_1x_2) + \varrho_1(x_0x_5 - x_1x_4) + \varrho_2(x_2x_5 - x_3x_4) + \\ + \varrho_3x_1x_6 + \varrho_4x_3x_6 + \varrho_5x_5x_6 = 0$$

qui a pour base la V_3^4 rationnelle de S_5:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5}, \qquad x_6 = 0$$

et l' S_3 d'équations:

$$x_1 = x_3 = x_5 = 0,$$

ayant en commun avec la V_3^4 le plan:

$$x_0 = x_1 = x_3 = x_5 = 0.$$

Si d'un point P nous projetons S_3 nous obtenons un S_4, qui coupe la V_3^4 réductible, constituée d'une V_1^3, qui se trouve sur le plan intersection et d'une droite s. Le point P et la droite s individualisent un plan de cordes de la variété base, qui sorte de P. Pour cela le rang de la Jacobienne du système est:

$$6 - 1 = 5.$$

4°

Considérons la variété de Segre individualisée par les couples des points de deux plans de S_5:

$$\begin{aligned} y_{0p} &= x_0x_p, \\ y_{1p} &= x_1x_p, \qquad (p = 3, 4, 5), \\ y_{2p} &= x_2x_p. \end{aligned}$$

En éliminant x_0, x_1, x_2, x_0, on obtient las équations:

$$\begin{aligned} y_{0k}y_{1h} - y_{0h}y_{1k} - 0, \\ y_{0k}y_{2h} - y_{0h}y_{2k} - 0, \qquad (k \neq h = 3, 4, 5), \\ y_{1k}y_{2h} - y_{1h}y_{2k} = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit de neuf quadriques de S_8, qui forment un système $L_{8/7}$, dont la variété base est donnée par:

$$(3) \quad \frac{y_{03}}{y_{04}} = \frac{y_{13}}{y_{14}} = \frac{y_{23}}{y_{24}}; \qquad \frac{y_{03}}{y_{05}} = \frac{y_{13}}{y_{15}} = \frac{y_{23}}{y_{25}}; \qquad \frac{y_{04}}{y_{05}} = \frac{y_{14}}{y_{15}} = \frac{y_{24}}{y_{25}}.$$

Les équations paramétriques de cette variété sont:

$$y_{03}=1,\ y_{13}=\nu,\ y_{23}=\sigma,\ y_{04}=\tau,\ y_{14}=\nu\tau,\ y_{24}=\sigma\tau,$$
$$y_{05}=\omega,\ y_{15}=\nu\omega,\ y_{26}=\sigma\omega.$$

Il s'agit d'une V_4: ∞^1 cordes de cette variété contenues dans un plan passent par chaque point de S_8. Donc le rang de la Jacobinne du système est 7.

5°

Le précédent système en génère un autre. Si aux trois groups de fractions (3) on égalise respectivement les rapports suivants:

$$\frac{y_{33}}{y_{34}},\quad \frac{y_{33}}{y_{35}},\quad \frac{y_{34}}{y_{35}},$$

on obtient un L_{17} de S_{11}, qui a pour base une V_5^{10} de S_5, qui résulte une variété de Segre, individualisée par les couples de points d'un S_2 et d'un S_3 de S_6.

Le rang du système est 11 et par un point P de S_{11} il passe une seule corde de la variété base.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Bonferroni, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare,* R. Acc. Scienze Torino vol. 50 (1914–1915) 425–438.

[2] L. Degoli, *Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée,* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica – Budapest Tomo 17 (1982) 325–330.

[3] L. Degoli, *Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla,* Collectanea Mathematica – Barcelona (1982) vol. XXXIII. 126–138.

[4] L. Degoli, *Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle,* Demonstratio Mathematica – Warszawa – n° 3 Vol. 16 (1983) 723–734.

[5] L. Degoli, *Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla,* Revue d'Analyse numérique et de théorie de l'approximation – Cluj–Napoca. Tome 26 (49) n° 1 (1984) 33–43.

[6] L. Muracchini, *Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria,* (parte II) Riv. Mat. Univ. di Parma, 3, 75–89 (1952).

[7] A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà,* Atti R. Acc. Sc. di Torino Nota 11, 51 (1916) III, 55 (1919–1920) 695–714 e 480–500.

[8] S. Xambó, *On projectives varieties of minimal degree,* Collectanea Mathematica – Barcelona (1981) vol. XXXII. 149–163.

Lando Degoli
Dipartimento di Matematica pura ed applicata „G. Vitali"
Università degli studi di Modena,
Via Campi, 213/B
41100 Modena (Italy)