Emil Slatinský

Die Abgeschlossenheit der lexikographischen Summe in der Klasse modularer Verbände

Archivum Mathematicum, Vol. 20 (1984), No. 4, 205--210

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107206`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XX: 205–210, 1984

DIE ABGESCHLOSSENHEIT DER LEXIKOGRAPHISCHEN SUMME IN DER KLASSE MODULARER VERBÄNDE

EMIL SLATINSKÝ, Brno

(Eingegangen am 22. Dezember 1982)

1. Bezeichnung. Sei M eine geordnete Menge, $N \subseteq M$. Wir bezeichnen $L_M(N) = \{a \in M;\ a$ ist eine untere Schranke von $N\}$, $U_M(N) = \{a \in M;\ a$ ist eine obere Schranke von $N\}$.

Wenn $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist, schreiben wir $L_M(N) = L_M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $U_M(N) = U_M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Das größte [kleinste] Element einer nach oben [nach unten] beschränkten geordneten Menge bezeichnen wir als $g(M)$ [$l(M)$].

2. Definition. *Eine geordnete Menge M heißt nach unten [nach oben] gerichtet, wenn $L_M(a, b) \neq \emptyset$ [$U_M(a, b) \neq \emptyset$] für alle $a, b \in M$ gilt.*

Eine geordnete Menge M heißt gerichtet, wenn M nach unten und nach oben gerichtet ist.

3. Bezeichnung. Sei M eine geordnete Menge. Sei $o, i \bar{\in} M$. Definieren wir eine geordnete Menge M' folgenderweise: Ist M eine gerichtete Menge, so gilt $M' = M$, ist M eine nach oben und nicht nach unten gerichtet Menge, so gilt $M' = M \cup \{o\}$, ist M eine nach unten und nicht nach oben gerichteteeMenge,so gilt $M' = M \cup \{i\}$, ist M eine nicht nach unten und nicht nach oben gerichtete Menge, so gilt $M' = M \cup \{o, i\}$. Dabei gilt $o < x$[$x < i$] für alle $x \in M$, falls $o \in M'$[$i \in M'$] ist.

4. Definition. *Eine geordnete Menge M heißt ein relativer Verband, wenn M' ein Verband ist.*

5. Bemerkung. Es ist klar, daß eine geordnete Menge M ein relativer Verband genau dann ist, wenn aus $L_M(a, b) \neq \emptyset$ die Existenz von $a \wedge b$ und gleichzeitig aus $U_M(a, b) \neq \emptyset$ die Existenz von $a \vee b$ in M folgt.

6. Bezeichnung. Mit $\prec$ bezeichnen wir die Nachbarschaftsrelation (d. h. $a \prec b$ dann und nur dann, wenn $a < b$ und wenn es kein x mit $a < x < b$ gibt).

7. Bemerkung. Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Mit $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ bezeichnen wir die lexikographische Summe der Mengen $M_\iota;\ \iota \in G$.

Der folgende Satz 8 ist eine direkte Folgerung des Satzes 3.10 in [5] und des dualen Satzes zum Satz 3.10.

8. Satz. *Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

A. $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein Verband.*

B. *G ist ein Verband, M_ι ist ein relativer Verband für jedes $\iota \in G$ und es gelten folgende Bedingungen:*

(α_1) *Ist $\iota_2 \in G$ ein solches Element, daß M_{ι_2} nicht nach unten gerichtet ist, dann gibt es genau ein $\iota_1 \in G$, $\iota_1 \prec \iota_2$ und dann ist M_{ι_1} nach oben beschränkt. Ist $\iota_3 \in G$ ein solches Element, daß M_{ι_3} nicht nach oben gerichtet ist, dann gibt es genau ein $\iota_4 \in G$, $\iota_3 \prec \iota_4$ und dann ist M_{ι_4} nach unten beschränkt.*

(α_2) *Wenn $\iota_1, \iota_2 \in G$, $\iota_1 \parallel \iota_2$ ist, dann ist $M_{\iota_1 \wedge \iota_2}$ nach oben und $M_{\iota_1 \vee \iota_2}$ nach unten beschränkt.*

9. Bemerkung. Es gibt ein solches System $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$, wobei G und $M_\iota (\iota \in G)$ modulare Verbände sind, daß $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ kein modularer Verband ist.

10. Beispiel. Seien G, M modulare Verbände mit den Diagrammen in Fig. 1. Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen mit $M_\iota = M$ für alle $\iota \in G$. Gemäß dem Satz 8 ist $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_L$ ein Verband, der aber kein modularer Verband ist. In der Tat: Für die Elemente (ι_2, a), (ι_4, b), $(\iota_2, b) \in \sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ gilt $(\iota_2, a) < < (\iota_2, b)$, aber $(\iota_2, a) \vee ((\iota_4, b) \wedge (\iota_2, b)) = (\iota_2, a) \vee (\iota_1, b) = (\iota_2, a)$, $((\iota_2, a) \vee \vee (\iota_4, b)) \wedge (\iota_2, b) = (\iota_3, a) \wedge (\iota_2, b) = (\iota_2, b)$.

11. Problem. Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß lexikographische Summe ein modularer Verband ist?

12. Definition.. *Ein relativer Verband M heißt modularer relativer Verband, wenn M' ein modularer Verband ist.*

13. Lemma. *Sei $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Verband, sei $\iota_0 \in G$. Die modulare Gleichheit*

$$(\mathrm{M}_0) \qquad (\iota_0, a) \vee ((\iota_0, b) \wedge (\iota_0, c)) = ((\iota_0, a) \vee (\iota_0, b)) \wedge (\iota_0, c)$$

gilt in $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ für jedes Elemententripel $a, b, c \in M_{\iota_0}$, $a \leqq c$ genau dann, wenn M_{ι_0} ein modularer relativer Verband ist.

Beweis: Sei $N = \{\iota_0\} \times M_{\iota_0}$. Wir konstruieren die geordnete Menge N' nach 3.

Ist M_{ι_0} nicht nach unten [nach oben] gerichtet, dann existiert $\iota_1 \in G[\iota_2 \in G]$ so, daß $\iota_1 \prec \iota_0[\iota_0 \prec \iota_2]$ gilt und M_{ι_1} nach oben [M_{ι_2} nach unten] beschränkt ist.

Im ersten [zweiten] Fall setzen wir $o = (\iota_1, g(M_{\iota_1}))$ $[i = (\iota_2, l(M_{\iota_2}))]$. Dann gilt $N' \subseteq \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ und N' ist ein Teilverband des Verbandes $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$. Nach der Definition 12 ist N' ein modularer Verband genau dann, wenn N mit der durch die Ordnungsrelation auf $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ induzierten Ordnungsrelation ein modularer relativer Verband ist.

Gilt modulare Gleichheit in N' für jedes Elemententripel $(\iota_0, a), (\iota_0, b), (\iota_0, c) \in \in N$, $a \leqq c$, dann gilt modulare Gleichheit in N' ebenfalls für jedes Elemententripel aus N' und umgekehrt.

Die Mengen N und M_{ι_0} sind trivialerweise isomorph.

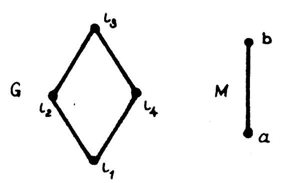

Fig. 1

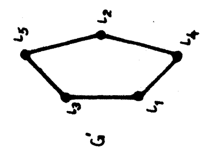

Fig. 2

Aus unserer Konstruktion folgt: (M_0) gilt $\Leftrightarrow$ N' ist ein modularer Verband $\Leftrightarrow$ N ist ein modularer relativer Verband $\Leftrightarrow$ M_{ι_0} ist ein modularer relativer Verband.

Die Beweise zwei folgender Lemmata sind trivial.

14. Lemma. *Sei M eine geordnete Menge, $a_1, a_2, a_3 \in M$ und $a_1 \parallel a_2$, $a_2 \parallel a_3$, $a_1 \leqq a_3$. Existiert $a_2 \wedge a_3$, so gilt $a_1 \leqq a_2 \wedge a_3$ nicht und existiert $a_1 \vee a_2$, so gilt $a_1 \vee a_2 \leqq a_3$ nicht.*

15. Lemma. *Sei M ein modularer Verband, $a_1, a_2, a_3 \in M$ und $a_1 \parallel a_2$, $a_2 \parallel a_3$, $a_1 \leqq a_3$. Dann gilt $a_2 \wedge a_3 < a_1$, $a_3 < a_1 \vee a_2$ genau dann, wenn $a_1 = a_3$.*

16. Lemma. *Sei M ein modularer Verband, $a_1, a_2, a_3 \in M$ und $a_1 \parallel a_2$, $a_2 \parallel a_3$, $a_1 < a_3$. Dann gilt $a_1 \vee (a_2 \wedge a_3) \parallel a_2$.*

Beweis: Wir bezeichnen $a_0 = a_1 \vee (a_2 \wedge a_3) = (a_1 \vee a_2) \wedge a_3$. Zuerst nehmen wir an, daß $a_0 = a_2$, d. h. $a_2 = a_1 \vee (a_2 \wedge a_3)$. Nach dem Lemma 14 gilt entweder $a_1 \parallel a_2 \wedge a_3$ oder $a_2 \wedge a_3 < a_1$. Aus $a_1 \parallel a_2 \wedge a_3$ folgt $a_1 < a_2$ und aus $a_2 \wedge a_3 < a_1$ folgt $a_1 = a_2$. Das ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung $a_1 \parallel a_2$.

Setzen wir nun voraus, daß $a_0 < a_2$, d. h. $a_1 \vee (a_2 \wedge a_3) < a_2$. Dann gilt $a_1 < < a_1 \vee (a_2 \wedge a_3) < a_2$, woraus $a_1 < a_2$ folgt, was ein Widerspruch mit der Voraussetzung $a_1 \parallel a_2$ ist.

Setzen wir schließlich voraus, daß $a_2 < a_0$, d. h. $a_2 < a_1 \vee (a_2 \wedge a_3)$ gilt. Dann ist $a_2 > a_1 \vee (a_2 \wedge a_3) = (a_1 \vee a_2) \wedge a_3 \leqq a_3$, woraus $a_2 < a_3$ folgt, was ein Widerspruch mit der Voraussetzung $a_2 \parallel a_3$ ist.

Also gilt $a_0 \parallel a_2$.

17. Satz. *Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein modularer Verband.*

(B) $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein Verband, G ist ein modularer Verband, M_ι ist ein modularer relativer Verband für jedes $\iota \in G$ und es gilt:*

(β) *Wenn $\iota_1, \iota_2 \in G$, $\iota_1 \parallel \iota_2$, dann sind M_{ι_1}, M_{ι_2} Antiketten.*

Beweis: Es gelte (A). Es ist klar, daß $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Verband ist. Setzen wir voraus, daß G kein modularer Verband ist, d. h. in G existiert ein Teilverband G_1 mit dem Diagramm in Fig. 2. Seien $(\iota_1, a), (\iota_2, b), (\iota_3, c) \in \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$. Es ist $(\iota_1, a) < (\iota_3, c)$, also gilt $(\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge (\iota_3, c)$. Nach der im Satz 8 gegebenen Bedingung (α_2) ist $(\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c) = (\iota_4, g(M_{\iota_4}))$ und $(\iota_1, a) \vee (\iota_2, b) = (\iota_5, l(M_{\iota_5}))$. Also $(\iota_1, a) = (\iota_1, a) \vee (\iota_4, g(M_{\iota_4})) = (\iota_5, l(M_{\iota_5})) \wedge (\iota_3, c) = (\iota_3, c)$. Das ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung, d. h. wir haben bewiesen, daß G ein modularer Verband ist.

Sei $\iota_0 \in G$ ein beliebiges Element. Aus der Voraussetzung, daß $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein modularer Verband ist, folgt nach Lemma 13, daß M_{ι_0} ein modularer relativer Verband ist.

Setzen wir schließlich voraus, daß unvergleichbare Elemente $\iota_1 \parallel \iota_2$ in G existieren und die Bedingung (β) nicht erfüllt wird, d. h. wir setzen voraus, daß M_{ι_1} keine Antikette ist. Dann existieren verschiedene vergleichbare Elemente a, c, $a < c$ in M_{ι_1}. Sei $b \in M_{\iota_2}$ ein beliebiges Element. Es ist $(\iota_1, a), (\iota_2, b), (\iota_1, c) \in \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$, $(\iota_1, a) < (\iota_1, c)$. Nach der im Satz 8 gegebenen Bedingung (α_2) gilt $(\iota_1, a) = (\iota_1, a) \vee (\iota_1 \wedge \iota_2, g(M_{\iota_1 \wedge \iota_2})) = (\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_1, c)) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge (\iota_1, c) = (\iota_1 \vee \iota_2, l(M_{\iota_1 \vee \iota_2})) \wedge (\iota_1, c) = (\iota_1, c)$, woraus $a = c$. Das ist ein Widerspruch mit $a < c$.

Es ist klar, daß M_{ι_2} auch eine Antikette ist. Wir haben die Bedingung (β) bewiesen und es gilt (B).

Setzen wir voraus, daß (B) gilt. Seien $(\iota_1, a), (\iota_2, b), (\iota_3, c) \in \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ beliebige Elemente mit $(\iota_1, a) \leqq (\iota_3, c)$. Dann gibt es sechs Möglichkeiten:

(1) $(\iota_1, a) \leqq (\iota_2, b) \leqq (\iota_3, c)$,
(2) $(\iota_2, b) \leqq (\iota_1, a) \leqq (\iota_3, c)$,
(3) $(\iota_1, a) \leqq (\iota_3, c) \leqq (\iota_2, b)$,
(4) $(\iota_1, a) < (\iota_2, b)$, $(\iota_2, b) \parallel (\iota_3, c)$, $(\iota_1, a) < (\iota_3, c)$,
(5) $(\iota_1, a) \parallel (\iota_2, b)$, $(\iota_2, b) < (\iota_3, c)$, $(\iota_1, a) < (\iota_3, c)$,
(6) $(\iota_1, a) \parallel (\iota_2, b)$, $(\iota_2, b) \parallel (\iota_3, c)$, $(\iota_1, a) \leqq (\iota_3, c)$.

Wir beweisen, daß die modulare Gleichheit

$$\text{(M)} \qquad (\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge (\iota_3, c)$$

in allen Fällen gilt.

In den Fällen (1), (2), (3) beweisen wir leicht, daß (M) gilt.

$\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ist ein Verband. Im Fall (4) existiert also $(\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)$, offenbar auch $(\iota_1, a) \leqq (\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)$ und daraus folgt $(\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = (\iota_2, b) \wedge \wedge (\iota_3, c) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge (\iota_3, c)$, d. h. (M) ist erfüllt.

Ähnlich beweisen wir (M) im Fall (5).

Im Fall (6) folgt aus $(\iota_1, a) \parallel (\iota_2, b)$ entweder $\iota_1 \parallel \iota_2$ oder $\iota_1 = \iota_2$, $a \parallel b$ und aus $(\iota_2, b) \parallel (\iota_3, c)$ entweder $\iota_2 \parallel \iota_3$ oder $\iota_2 = \iota_3$, $b \parallel c$. Wir können leicht sehen, daß nur drei Fälle möglich sind:

(6a) $\iota_1 \parallel \iota_2$, $\iota_2 \parallel \iota_3$, $\iota_1 < \iota_3$,
(6b) $\iota_1 \parallel \iota_2$, $\iota_2 \parallel \iota_3$, $\iota_1 = \iota_3$, $a \leqq c$,
(6c) $\iota_1 = \iota_2 = \iota_3$, $a \parallel b$, $b \parallel c$, $a \leqq c$.

Sei (6a) in Kraft. G ist ein modularer Verband. Bezeichnen wir $\iota_0 = \iota_1 \vee \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) = (\iota_1 \vee \iota_2) \wedge \iota_3$. Nach dem Lemma 16 ist $\iota_0 \parallel \iota_2$ und wegen der Bedingung (β) ist M_{ι_0} eine Antikette. Es bestehen, den Lemmata 14, 15 zufolge, nur drei Möglichkeiten:

(6aa) $\iota_1 \parallel \iota_2 \wedge \iota_3$, $\iota_3 \parallel \iota_1 \vee \iota_2$,
(6ab) $\iota_1 \parallel \iota_2 \wedge \iota_3$, $\iota_3 < \iota_1 \vee i_2$,
(6ac) $\iota_1 > \iota_2 \wedge \iota_3$, $\iota_3 \parallel \iota_1 \vee \iota_2$.

Nach der im Satz 8 gegebenen Bedingung (α_2) ist die Antikette M_{ι_0} eine nach unten oder nach oben beschränkte Menge, d. h. M_{ι_0} ist eine einelementige Menge. Bezeichnen wir $M_{\iota_0} = \{z\}$.

Im Fall (6aa) sind $M_{\iota_2 \wedge \iota_3}$, $M_{\iota_1 \vee \iota_2}$ einelementige Mengen nach den Bedingungen (β) und (α_2). Bezeichnen wir $M_{\iota_2 \wedge \iota_3} = \{u\}$, $M_{\iota_1 \vee \iota_2} = \{v\}$. Eine weitere Anwendung der Bedingung (α_2) gibt $(\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, u) = (\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3),\ l(M_{\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)}) = (\iota_0, z) = ((\iota_1 \vee \iota_2) \wedge \iota_3,\ g(M_{(\iota_1 \vee \iota_2) \wedge \iota_3})) = (\iota_1 \vee \iota_2, v) \wedge (\iota_3, c) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge (\iota_3, c)$. Also gilt (M).

Im Fall (6ab) ist $M_{\iota_2 \wedge \iota_3}$ offensichtlich eine einelementige Menge, d. h. $M_{\iota_2 \wedge \iota_3} = \{u\}$. Weiter gilt $\iota_3 = (\iota_1 \vee \iota_2) \wedge \iota_3 = \iota_0$. Aus der Bedingung ($\alpha_2$) folgt $(\iota_1, a) \vee \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, u) = (\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, l(M_{\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)}) = (\iota_0, z) = (\iota_3, c) = (\iota_1 \vee \iota_2,\ l(M_{\iota_1 \vee \iota_2})) \wedge (\iota_3, c) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge (\iota_3, c)$. Es gilt wieder (M).

Ähnlich erörtern wir den Fall (6ac).

Im Fall (6b) ist $M_{\iota_1} = M_{\iota_3}$ eine Antikette nach der Bedingung (β), also $a = c$. Gemäß der Bedingung (α_2) gilt $(\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = (\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge \wedge (\iota_1, a)) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_1, g(M_{\iota_2 \wedge \iota_1})) = (\iota_1, a) = (\iota_1 \vee \iota_2, l(M_{\iota_1 \wedge \iota_2})) \wedge (\iota_1, a) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge (\iota_3, c)$, d. h. es gilt (M).

Im Fall (6c) bezeichnen wir $\iota_0 = \iota_1 = \iota_2 = \iota_3$. Nach der Voraussetzung ist M_{ι_0} ein modularer relativer Verband und nach dem Lemma 13 gilt (M_0) und also auch (M). Wir haben (A) bewiesen.

18. Bemerkung. Seien M, N geordnete Mengen. Mit $M \circ N$ bezeichnen wir das Ordinalprodukt der Mengen M, N.

Der folgende Satz 19 ist eine direkte Folgerung des Satzes 3.14 in [5] und des dualen Satzes zum Satz 3.14.

19. Satz. *Seien G, M geordnete Menge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) *$G \circ M$ ist ein Verband.*

(B) *G ist ein Verband, M ist ein relativer Verband und es gelten folgende Bedingungen:*

(γ_1) *Ist M nicht nach unten gerichtet, dann ist M nach oben beschränkt und jedes Element von G hat genau einen unteren Nachbar. Ist M nicht nach oben gerichtet, dann ist M nach unten beschränkt und jedes Element von G hat genau einen oberen Nachbar.*

(γ_2) *Ist G keine Kette, dann ist M eine beschränkte Menge.*

20. Bemerkung. Sei $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen, sei $M_\iota \cong M$ für jedes $i \in G$, dann gilt $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota \cong G \circ M$.

21. Folgerung. *Seien G, M geordnete Menge. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(A) *$G \circ M$ ist ein modularer Verband.*

(B) *$G \circ M$ ist ein Verband, G ist ein modularer Verband, M ist ein modularer relativer Verband und es gilt:*

(δ) *Ist G keine Kette, dann ist M eine einelementige Menge.*

LITERATUR

[1] Szász, G.: *Einführung in die Verbandstheorie,* Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.

[2] Birkhoff, G.: *Lattice Theory,* New York, rev. ed. 1948.

[3] Birkhoff, G.: *Generalized arithmetic,* Duke Math. J., 9 (1942), 283–302.

[4] Kopeček, O.: *Die arithmetischen Operationen für geordnete Mengen,* Arch. Math. (Brno) 4 (1968), 157–174.

[5] Slatinský, E.: *Die arithmetische Operation der Summe,* Arch. Math. (Brno), im Druck.

E. Slatinský
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie FAST,
662 37 Brno, Barvičova 85
Czechoslovakia