Archivum Mathematicum

Jan Voráček

Über eine nichtlineare parametrische Differentialgleichung dritter Ordnung

Archivum Mathematicum, Vol. 19 (1983), No. 4, 187--198

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107173

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIX: 187—198, 1983

ÜBER EINE NICHTLINEARE PARAMETRISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG

JAN VORÁČEK, Brno

(Eingegangen am 20. Dezember 1981)

Wir befassen uns mit den Eigenschaften der Lösungen $x(t)$ der Differentialgleichung (Dgl.)

(1) $$x''' + a(t, x, x', x'')\, x'' + b(t)\, x' + h(x) = e(t, x, x', x'')$$

und der Spezialfälle

(1') $$x''' + a(t)\, x'' + b(t)\, x' + h(x) = e(t)$$

bzw.

(1'') $$x''' + a(t)\, x'' + b(t)\, x' + h(x) = e(t, x, x', x'').$$

Wir studieren die Frage der Existenz von $x(t)$ auf der Halbgeraden $\langle t_0, \infty)$ und der künftigen Beschränktheit der Funktionen $x''(t)$, $x'(t)$, $x(t)$.

Für die Dgl. (1') haben wir diese Fragen in der Arbeit [1] diskutiert und zwar mittels einer Methode die in [2] zum Studium der Dgl.

$$x''' + f(x'') + g(x)\, x' + h(x) = e(t)$$

angewandt worden ist. In dieser Arbeit benutzen wir eine Modifizierung der erwähnten Methode, welche die Bedingung $\alpha^2 > B$ (s. [1]) durch (36) zu ersetzen ermöglicht.

Viele Autoren (s. [4] oder z. B. [5] u. a.) haben in der letzten Zeit ähnliche Probleme unter Benutzung von Ljapunovschen Funktionen studiert. Überwiegend wird in diesen Arbeiten in (1) eine Funktion $h(x)$ mit der Eigenschaft $\lim_{|x| \to \infty} h(x) = \infty$ betrachtet. In der vorliegenden Arbeit setzen wir dagegen (4) voraus.

1. **Lemma 1.** *In der Dgl.* ($\in$) *seien die Funktionen* $a(t, x, y, z)$, $b(t)$, $h(x)$, $e(t, x, y, z)$ *stetig für alle reellen Werte ihrer Argumente. Weiter setzen wir voraus, es gibt solche positive Konstanten* α, A, β, B, H, E, *daß*

(2) $$\alpha \leqq a(t, x, y, z) \leqq A \qquad \textit{für alle } [t, x, y, z]$$

$$(3)\qquad \beta \leqq b(t) \leqq B \qquad \textit{für alle } t$$
$$(4)\qquad | h(x) | \leqq H \qquad \textit{für alle } x$$
$$(5)\qquad | e(t, x, y, z) | \leqq E \qquad \textit{für alle } [t, x, y, z]$$

gilt.

Wenn wir mit $\langle t_0, T_x)$ $(t_0 < T_x \leqq \infty)$ *das maximale Intervall bezeichnen, worauf eine beliebige, fest erwählte Lösung* $x(t)$ *von* (1) *fortgesetzt werden kann, so ist die Abschätzung* (*für* $t \leqq T_x$)

$$(6)\qquad \liminf_{t \to T_x} | x'(t) | \leqq (A + H + E + 1)\, \beta^{-1} := L_1$$

richtig.

Beweis. Siehe [1].

In den folgenden Hilfsätzen (Lemma 2.—Lemma 7.) behalten wir dauernd alle Voraussetzungen von Lemma 1. und die hier eingeführte Symbolik.

Lemma 2. *Auf einem Intervalle* $I \subset \langle t_0, T_x)$ *sei die Ungleichheit*

$$(7)\qquad | x'(t) | \leqq L_1 + 1$$

erfüllt. Wir setzen für $U \geqq 0$

$$(8)\qquad L_2(U) := (B(U + 1) + H + E)\, \alpha^{-1}.$$

(i) *Ist* I *ein beschränktes Intervall und* $t_1 \in I$, *dann haben wir*

$$(9)\qquad | x''(t) | \leqq \operatorname{Max}(| x''(t_1) |, L_2(L_1))$$

für alle $t \in \mathrm{cl} I$ *für welche auch* $t \geqq t_1$ *gilt.*

(ii) *Für* $I = \langle t_5, \infty)$ $(t_5 \geqq t_0)$ *ist sogar die Abschätzung*

$$(10)\qquad \limsup_{t \to \infty} | x''(t) | \leqq L_2(L_1)$$

richtig.

Beweis. Auf I haben wir

$$(11)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x''^2(t) \leqq -2\alpha(x''^2(t) - L_2(L_1)\, | x''(t) |).$$

(i) Für $t_4 \in \mathrm{cl} I$, $t_4 > t_1$ folgt aus

$$(12)\qquad | x''(t_4) | > \operatorname{Max}(| x''(t_1) |, L_2(L_1))$$

die Existenz von t_2, t_3 in I, $t_1 \leqq t_2 < t_3 \leqq t_4$ mit der Eigenschaft

$$(13)\qquad | x''(t_2) | = \operatorname{Max}(| x''(t_1) |, L_2(L_1)),\ | x''(t) | > \operatorname{Max}(| x''(t_1) |, L_2(L_1))$$

auf (t_2, t_3). (13) und (11) geben auf $\langle t_2, t_3 \rangle$ die Ungleichheit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x''^2(t) \leqq 0$, welche im Wiederspruch zu $| x''(t_3) | > | x''(t_2) |$ (vgl. (13)) steht.

(ii) Wir wählen ein beliebiges positives $\delta < 2\alpha$. Gibt es nun $t_6 \geqq t_5$ so, daß

(14) $$|x''(t_6)| > 2\alpha(2\alpha - \delta)^{-1} L_2(L_1)$$

richtig ist, so haben wir infolge (11) auf einem Intervalle $\langle t_6, t_7)$ $(t_7 > t_6)$

(15) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x''^2(t) \leqq -\delta x''^2(t), \; |x''(t)| < 2\alpha(2\alpha - \delta)^{-1} L_2(L_1),$$

d. h.

$$|x''^2(t)| \leqq x''^2(t_6) \exp(-\delta(t - t_6)).$$

Es muß also

$$\liminf_{t\to\infty} |x''(t)| \leqq 2\alpha(2\alpha - \delta)^{-1} L_2(L_1)$$

sein und da $\delta > 0$ beliebig klein sein darf, auch

$$\liminf_{t\to\infty} |x''(t)| \leqq L_2(L_1).$$

Zu jedem $\varrho > 0$ gibt es also ein $t_\varrho > t_5$ so, daß $|x''(t_\varrho)| < L_2(L_1) + \varrho$ gilt. Infolge (i) bekommen wir auch $|x''(t)| \leqq L_2(L_1) + \varrho$ auf jedem Intervalle $\langle t_\varrho, t_8\rangle$ $(t_8 \geqq t_\varrho)$ und (10) ist bewiesen.

Bemerkung 1. Nach dem vorangehenden Lemma ist es im Falle (i) immer möglich die Lösung $x(t)$ nach rechts über den rechten Endpunkt von I fortzusetzen. Wenn $|x''(t_1)| \leqq L_2(L_1)$ richtig ist, so haben wir $|x''(t)| \leqq L_2(L_1)$ für alle $t \geqq t_1$ die in $\mathrm{cl}I$ liegen.

Lemma 3. *Sei $T_i := (\Theta_i, \Theta_{i+1}) \subset \langle t_0, T_x)$ ein Intervall mit den folgenden Eigenschaften:*

(16) $$|x'(t)| > L_1 + 1 \quad \textit{auf } T_i,$$

(17) $$|x'(\Theta_i)| = |x'(\Theta_{i+1})| = L_1 + 1.$$

Mit den Bezeichnungen $(U \geqq 0)$

(18) $$L_3(\mathrm{U}) := U\alpha^{-1} + L_1 + 1,$$

(19) $$L_4(U) := \mathrm{Max}\,(U, L_2(L_3(U) - 1)),$$

gelten auf $\mathrm{cl}T_i$ *diese Abschätzungen:*

(20) $$|x'(t)| \leqq L_3(|x''(\Theta_i)|),$$

(21) $$|x''(t)| \leqq L_4(|x''(\Theta_i)|).$$

Beweis. Infolge (16) und (17) gibt es in T_i einen Punkt λ_i mit der Eigenschaft $x''(\lambda_i) = 0$. Wegen

$$\left(\frac{1}{2} x'^2(\lambda_i)\right)'' = -b(\lambda_i)\, x'^2(\lambda_i) - (h(x(\lambda_i)) - e(\lambda_i))\, x'(\lambda_i) < 0$$

ist aber λ_i gerade der einzige Punkt des Maximums von $|x'(t)|$, der auf T_i existiert.

Wir haben also

$$x'(t)\,x''(t) \geqq 0 \quad \text{auf} \quad \langle \Theta_i, \lambda_i \rangle, \qquad x'(t)\,x''(t) \leqq 0 \quad \text{auf} \quad \langle \lambda_i, \Theta_{i+1} \rangle$$

und daraus weiter

$$\int_{\Theta_i}^{\lambda_i} a\big(t, x(t), x'(t), x''(t)\big)\,|\,x''(t)\,|\,\mathrm{d}t \geqq \alpha(|\,x'(\lambda_i)\,| - L_1 - 1),$$

$$\int_{\Theta_i}^{\lambda_i} b(t)\,|\,x'(t)\,| - \big(h(x(t)) - e(t)\big)\operatorname{sgn} x'(\Theta_i)\,\mathrm{d}t \geqq \big(\beta(L_1 + 1) - H - E\big)(\lambda_i - \Theta_i) > 0.$$

Die zwei letzten Ungleichheiten liefern zusammen mit (1)

$$\alpha(|\,x'(\lambda_i)\,| - L_1 - 1) \leqq |\,x''(\Theta_i)\,|,$$

d. h. (20).

Auf $\langle \Theta, \lambda_i \rangle$ gilt offensichtlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x''^2(t) \leqq -2\,|\,x''(t)\,|\big(\alpha\,|\,x''(t)\,| + \beta(L_1 + 1) - (H + E)\big) < 0$$

und damit auch

$$|\,x''(\Theta_i)\,| \geqq |\,x''(t)\,| \quad \text{auf} \quad \langle \Theta_i, \lambda_i \rangle.$$

Ähnlich rechnen wir auf $\langle \lambda_i, \Theta_{i+1})$ mit Berücksichtigung von (20)

$$\text{(23)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x''^2(t) \leqq -2\,|\,x''(t)\,|\big(\alpha\,|\,x''(t)\,| - BL_3(|\,x''(\Theta_i)\,|)\big) - (H + E).$$

Die Ungleichheit

$$|\,x''(t)\,| > L_2(L_3(|\,x''(\Theta_i)\,| - 1))$$

ist also unmöglich auf $\langle \lambda_i, \Theta_{i+1} \rangle$.

Bemerkung 2. In den Bezeichnungen aus Lemma 3 ist die Funktion $|\,x''(t)\,|$ auf $\langle \Theta_i, \lambda_i \rangle$ streng abnehmend von $|\,x''(\Theta_i)\,|$ zu 0. Für eine festerwählte Zahl k, $0 < k < 1$ werden wir durch $\varkappa_i$ den Punkt aus (Θ_i, λ_i) bezeichnen, in welchem $|\,x''(\varkappa_i)\,| = |\,x''(\Theta_i)\,|\,k$ gilt.

Lemma 4. *Setzen wir eine Zahl $Q > 1$ fest.*

a) Falls

$$\text{(24)} \qquad |\,x''(\Theta_i)\,| > \alpha^2 L_2(L_1)\,((Q - 1)\,(A\alpha + B))^{-1} := L_5(Q)$$

richtig ist, so gilt auch

$$\text{(25)} \qquad \varkappa_i - \Theta_i > \alpha(1 - k)\,(Q(A\alpha + B))^{-1} := L_6(k, Q).$$

b) Für die Länge von T_i haben wir die Abschätzung

$$\text{(26)} \qquad \Theta_{i+1} - \Theta_i \leqq 2(A + \alpha)\,(A + \beta + 1)^{-1}\,|\,x''(\Theta_i)\,| := L_7^2\,|\,x''(\Theta_i)\,|.$$

Beweis. Wir benutzen die Identität auf $\langle t_0, T_x)$:

$$(27) \qquad x'''(t) \operatorname{sgn} x'(t) = -a(t, x(t), x'(t), x''(t))\, x''(t) \operatorname{sgn} x'(t) - \\ - b(t)\, x'(t) - (h(x(t)) - e(t, x(t), x'(t), x''(t)) \operatorname{sgn} x'(t).$$

a) Auf $\langle \Theta_i, \varkappa_i \rangle$ bekommen wir aus (27)

$$x'''(t) \operatorname{sgn} x'(t) \geqq -A\, |x''(\Theta_i)| - BL_3(|x''(\Theta_i)|) - (H + E),$$
$$|x''(\varkappa_i)| - |x''(\Theta_i)| \geqq -((A + B\alpha^{-1})\, |x''(\Theta_i)| + \alpha L_2(L_1))\, (\varkappa_i - \Theta_i),$$

d. h.

$$(28) \qquad \varkappa_i - \Theta_i \geqq \frac{\alpha(1 - k)\, |x''(\Theta_i)|}{(A\alpha + B)\, |x''(\Theta_i)| + \alpha^2 L_2(L_1)},$$

woraus die Behauptung a) bereits unmittelbar folgt.

b) Auf T_i haben wir auch (vgl. (4), (5), (6))

$$(29) \quad x'''(t) \operatorname{sgn} x'(\Theta_i) \leqq -a(t, x(t), x'(t), x''(t))\, x''(t) \operatorname{sgn} x'(\Theta_i) - (A + \beta + 1).$$

Da für jedes $t \in T_i$ nach (2), (22), (20) die Ungleichheiten

$$\operatorname{sgn} x'(\Theta_i) \int_{\Theta_i}^{t} a(s, x(s), x'(s), x'''(s))\, x''(s)\, ds \geqq \operatorname{sgn} x'(\Theta_i) \int_{\lambda_i}^{t} a(.)\, x''(s)\, ds \geqq$$
$$\geqq A \operatorname{sgn} x'(\Theta_i) \int_{\lambda_i}^{t} x''(s)\, ds \geqq -A\alpha^{-1}\, |x''(\Theta_i)|$$

richtig sind, kommen wir mittels Integration von (29) zu

$$(30) \qquad x''(t) \operatorname{sgn} x'(\Theta_i) \leqq (1 + A\alpha^{-1})\, x''(\Theta_i) - (A + \beta + 1)\, (t - \Theta_i).$$

Wenn wir noch (30) über T_i integrieren, so geht

$$0 \leqq (1 + A\alpha^{-1})\, |x''(\Theta_i)|\, (\Theta_{i+1} - \Theta_i) - \frac{1}{2}(A + \beta + 1)(\Theta_{i+1} - \Theta_i)^2$$

(d. h. (26)) hervor.

Bemerkung 3. Mit

$$(31) \qquad L_8^4(k, Q) := k^2 L_0(k, Q)$$

sind, falls $x''(\Theta_i)$ (24) erfüllt, nach Lemma 4 auch die folgenden Abschätzungen richtig:

$$(32) \qquad P_i^2 := \int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} x''^2(t)\, dt \geqq L_8^4(k, Q)\, x''^2(\Theta_i),$$

$$(33) \qquad \Big(\int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} |x''(t)|\, dt\Big)^2 \leqq L_7^2\, |x''(\Theta_i)|\, P_i^2 \leqq L_7^2 L_8^{-2}(k, Q)\, P_i^3.$$

Lemma 5. *Es gilt* $T_x = \infty$ *für eine beliebige Lösung* $x(t)$ *von* (1).

Beweis. Setzen wir voraus, es gibt eine Lösung $x(t)$ von (1) für welche $T_x < \infty$ ist. Der Bemerkung 1 nach ist dann (7) auf keinem Intervalle $\langle t_x, T_x)$ möglich. Da gleichzeitig auch (6) besteht ist es klar, daß eine nichtabnehmende Folge $\{\Theta_i\} \subset \langle t_0, T_x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ existieren muß mit den Eigenschaften:

(i) auf T_{2s-1} $(s = 1, 2, \ldots)$ gilt $|x'(t)| < L_1 + 1$,

(ii) $|x'(\Theta_i)| = L_1 + 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$,

(iii) auf T_{2s} $(s = 1, 2, \ldots)$ gilt $|x'(t)| > L_1 + 1$,

(iv) $\lim\limits_{i\to\infty} \Theta_i = T_x$.

Aus (iv) folgt $\lim\limits_{i\to\infty} (\Theta_{i+1} - \Theta_i) = 0$ und aus (28) auch $\lim\limits_{s\to\infty} |x''(\Theta_{2s})| = 0$. Mittels Bemerkung 2 und Lemma 3 gelangen wir zu (vgl. (18), (19))

$$\limsup_{t\to T_x} |x''(t)| \leqq L_2(L_1) < \infty \qquad (\text{für } t < T_x).$$

Man kann also die Lösung $x(t)$ rechts über den Punkt T_x fortsetzen, was im Widerspruch zu der Bedeutung von T_x steht.

Bemerkung 4. Es ist ohne weiteres klar, daß die bisher bewiesenen Behauptungen auch für allgmeinere Typen einer nichtlinearen parametrischen Dgl. dritter Ordnung gelten, z. B. für die Dgl.

$$x''' + a(t, x, x', x'')\, x'' + b(t, x, x', x'')\, x' + h(t, x, x', x'') = 0,$$

nur brauchen die Funktionen $b(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$ die Voraussetzungen der Art (3), (4), (5) zu erfüllen.

Wir wählen noch positive Zahlen ε, $r < 1$ und führen die folgenden Konstanten ein:

$$L_9(k, Q, r) := \operatorname{Max}\big((B - \beta)(L_1 + 1)^2 (\alpha r)^{-1} L_8^{-4}(k, Q), L_5^2(Q), (2(H + E) \mid L_7 \mid (\alpha r L_8^2(k, Q))^{-1})^4\big). \tag{34}$$

$$L_{10}^2(k, Q, \varepsilon, r) := \operatorname{Max}\big(L_9(k, Q, r), \varepsilon(2\alpha L_8^4(k, Q)(1 - r))^{-1}\big). \tag{35}$$

Lemma 6. *Wenn noch*

$$b'(t) \leqq 0 \qquad \textit{für alle } t \tag{36}$$

gilt und T_i das Intervall aus dem Lemma 3 bedeutet, folgt aus

$$x''^2(\Theta_i) \geqq L_{10}^2(k, Q, \varepsilon, r) \tag{37}$$

die Ungleichheit

$$x''^2(\Theta_{i+1}) \leqq x''^2(\Theta_i) - \varepsilon. \tag{38}$$

Beweis. Auf T_i bekommen wir (vgl. (11))

$$\frac{d}{dt} x''^2(t) \leqq -2\alpha x''^2(t) - 2b(t)\, x'(t)\, x''(t) + 2(H + E)\, |x''(t)|. \tag{39}$$

Infolge (17), (36) haben wir

$$2\int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} b(t)\,x'(t)\,x''(t)\,dt \geqq (\beta - B)(L_1 + 1)^2$$

und (39) gibt somit auch

$$x''^2(\Theta_{i+1}) - x''^2(\Theta_i) \leqq -2\alpha P_i^2 + (B - \beta)(L_1 + 1)^2 + 2(H + E)\int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} |x''(t)|\,dt.$$

Aus der letzten Ungleichheit errechnen wir mit Hilfe von (33), (34), (35), (37)

$$x''^2(\Theta_{i+1}) - x''^2(\Theta_i) \leqq -2\alpha P_i^2(1 - r) \leqq -\varepsilon,$$

d. h. (38).

Bemerkung 5. Alle Voraussetzungen des Lemmas 6 seien erfüllt und $x(t)$ sei eine solche Lösung von (1) zu der die im Beweise des Lemmas 5 beschriebene Zahlenfolge $\{\Theta_i\}$ existiert. Wenn für eine natürliche Zahl s die Ungleichheit

$$|x''(\Theta_{2s-1})| \leqq L_4(|L_{10}(k, Q, \varepsilon, r)|) \tag{40}$$

richtig ist, so gilt auch

$$|x''(\Theta_m)| \leqq L_4(|L_{10}(.)|) \quad \text{für alle natürliche } m \geqq 2s - 1 \tag{41}$$

und infolgedessen auch

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leqq L_3(L_4(|L_{10}(.)|)), \\ |x''(t)| &\leqq L_4(L_4(|L_{10}(.)|)) \end{aligned} \tag{42}$$

für alle $t \geqq \Theta_{2s-1}$.

Für eine natürliche Zahl q folgt nämlich aus $|x''(\Theta_{2q-1})| \leqq L_4(|L_{10}(.)|)$ mit Hilfe der Bemerkung 1, (19), (35) auch $|x''(\Theta_{2q})| \leqq L_4(|L_{10}(.)|)$. Wenn $[x''(|_{2q})| \leqq$ $\leqq |L_{10}(.)|$ ist, so bekommen wir die Ungleichheit $|x''(\Theta_{2q+1})| \leqq L_4(L_0(.)|)$ aus Lemma 3. Ist aber $|x''(\Theta_{2q})| > |L_{10}(.)|$ richtig, so folgt $|x''(\Theta_{2q+1})| <$ $< |x''(\Theta_{2q})|$ durch Lemma 6. Somit ist (41) durch Induktion be wsen. Di e Abschätzungen (42), (43) folgen auf $\mathrm{cl}\,T_{2q}$ aus (41) in Verbindung mitLemma 3. Auf $\mathrm{cl}\,T_{2q-1}$ sind sogar die Ungleichheiten

$$|x'(t)| \leqq L_1 + 1,\ |x''(t)| \leqq L_4(|L_{10}(.)|)$$

erfüllt.

Lemma 7. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 6 betrachten wir eine solche Lösung $x(t)$ von (1), zu der die nichtabnehmende divergente Zahlenfolge $\{\Theta_i\}$ aus dem Beweise von Lemma 5 existiert. Dann gibt es eine natürliche Zahl s_x so, daß*

$$|x''(\Theta_{2s_x-1})| \leqq L_4(|L_{10}(k, Q, \varepsilon, r)|) \tag{44}$$

gilt.

Beweis. Setzen wir voraus die zu beweisende Behauptung sei unrichtig. In diesem Falle müssen wir dann $|x''(\Theta_{2s-1})| > L_4(|L_{10}(.)|)$ für $s = 1, 2, \ldots$ haben. Aus den Lemmas 2, 3 erhalten wir

$$|L_{10}(.)| < |x''(\Theta_{2s})| \leqq |x''(\Theta_{2s-1})| \tag{45}$$

und weiter infolge Lemma 6

$$x''^2(\Theta_{2s+1}) \leqq x''^2(\Theta_{2s}) - \varepsilon \tag{46}$$

für jede natürliche Zahl s. (45) und (46) liefern so $x''^2(\Theta_1) \geqq x''^2(\Theta_2) \geqq x''^2(\Theta_3) + + \varepsilon \geqq \ldots \geqq x''^2(\Theta_{2n+1}) + n\varepsilon$, was für genügend großes n zum Widerspruch führt.

Satz 1. *In der Dgl.* (1) *seien die Funktionen* $a(t, x, y, z)$, $b(t)$, $h(x)$, $e(t, x, y, z)$ *stetig für alle reellen Werte ihrer Argumente und genügen sie den Bedingungen* (2), (3), (4), (5), (36). *Wir wählen positive Zahlen* $k < 1$, $Q > 1$, $\varepsilon, r < 1$ *und halten sie fest. Jede Lösung* $x(t)$ *der betrachteten Dgl. existiert auf der Halbgerade* $\langle t_0, \infty)$ *und es gilt*

$$\begin{aligned} &\limsup_{t\to\infty} |x'(t)| \leqq L_3(L_4(|L_1(_0k, Q, \varepsilon, r)|)),\\ &\limsup_{t\to\infty} |x''(t)| \leqq L_4(L_4(|L_{10}(k, Q, \varepsilon, r)|)), \end{aligned} \tag{47}$$

wo die Ausdrücke $L_3(U)$, $L_4(U)$, $L_{10}^2(U)$ *für* $U \geqq 0$ *in* (18), (19) *und* (35) *definiert sind.*

Beweis. Wir betrachten eine festerwählte Lösung $x(t)$. Laut Lemma 5 existiert sie auf $\langle t_0, \infty)$. Aus dem Lemma 2 folgt, daß gerade ein aus den folgenden zwei Fällen vorkommt:

(i) Es ist $|x'(t)| \leqq L_1 + 1$ auf $\langle t_0, \infty)$. Lemma 2 gibt in diesem Falle

$$\limsup_{t\to\infty} |x'(t)| \leqq L_1 + 1, \qquad \limsup_{t\to\infty} |x''(t)| \leqq L_2(L_1)$$

und somit auch (47).

(ii) Zu $x(t)$ gibt es eine nichtabnehmende divergente Zahlenfolge $\{\Theta_i\}$ aus dem Beweise von Lemma 5. In diesem Falle existiert eine natürliche Zahl s_x so, daß (44) gilt (Lemma 7) und hiervon erhalten wir (42), (43) auf $\langle \Theta_{2s_x-1}, \infty)$ mittels Bemerkung 5.

Bemerkung 6. Die Abschätzungen (47) werden wir im Folgenden einfacher in der Form

$$\limsup_{t\to\infty} |x'(t)| \leqq D', \qquad \limsup_{t\to\infty} |x''(t)| \leqq D'' \tag{47'}$$

schreiben. Aus (1), (2), (3), (4), (5), (47') folgt auch

$$\limsup_{t\to\infty} |x'''(t)| \leqq AD'' + BD' + H + E := D'''$$

für jede Lösung $x(t)$ der Dgl. (1).

Setzen wir in (1) $e(t, x, y, z) := h(t) + b(t)$, erfüllt die auf diese Weise entstandene Dgl. alle Voraussetzungen des Satzes 1 und besitz die divergente Lösung $x(t) := t$. Die Beschränktheit aller Lösungen kann man also unter den Voraussetzungen des Satzes 1 allein nicht erwarten.

2. In diesem Teile werden wir uns mit der Beschränktheit der Lösungen der Dgln. (1') und (1'') beschäftigen. Zunächst führen wir drei einfache Sätze an, in welchen die Forderungen an die Glattheit von $a(t)$ fortschreitend gestärkt werden.

Satz 2. *Alle Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt und es gelte darüber noch*

$$\left|\int_0^t e(s)\,ds\right| \leqq E \qquad \textit{für alle } t \tag{49}$$

$$\liminf_{|x|\to\infty} xh(x) > 0. \tag{50}$$

Wenn die Funktionen $a(t)$, $b(t)$ die Eigenschaften

$$\int^{\infty} |a(t) - a|\,dt < \infty, \qquad \int^{\infty} |b(t) - \beta|\,dt < \infty \tag{51}$$

(für eine passende Konstante a) besitzen, dann gibt es eine solche positive Zahl D, daß für beliebige Lösung $x(t)$ der Dgl. (1') *die Abschätzung*

$$\limsup_{t\to\infty} |x(t)| \leqq D \tag{52}$$

gilt.

Beweis. Siehe [1] (Th. 2).

Satz 3. *Alle Voraussetzungen des Satzes 1 und* (49) *seien erfüllt. Weiter sei*

$$\int_0^{\infty} |a'(t)|\,dt := C < \infty. \tag{53}$$

Gibt es eine solche Zahl $R \geqq 0$, daß

$$xh(x) \geqq 0 \qquad \textit{für alle } |x| \geqq R \tag{54}$$

ist, bleibt jede Lösung $x(t)$ von (1') *beschränkt auf $\langle t_0, \infty)$. Wenn $h(x)$ sogar der Bedingung* (50) *genügt, dann erfüllt jede diese Lösung* (52).

Beweis. Wir betrachten wieder eine beliebig erwählte Lösung $x(t)$. Nach Satz 1 kann ein $t_x \geqq t_0$ so bestimmt werden, daß wir

$$|x'(t)| \leqq D' + 1, \qquad |x''(t)| \leqq D'' + 1 \qquad \text{für alle } t \geqq t_x \tag{55}$$

haben.

Durch Integration der Identität welche aus (1') durch einsetzen von $x(t)$ entsteht kommen wir zu

$$b(t)\,x(t) - b(t_x)\,x(t_x) - \int_{t_x}^{t} b'(s)\,x(s)\,ds = \int_{t_x}^{t} e(s)\,ds - x''(t) + \tag{56}$$

$$+ x''(t_x) - a(t)x'(t) + a(t_x)x'(t_x) + \int_{t_x}^{t} a'(s)x'(s)\,ds - \int_{t_x}^{t} h(x(s))\,ds :=$$

$$:= \Phi(t) + \int_{t_x}^{t} a'(s)x'(s)\,ds.$$

Wenn nun $h(x)$ der Bedingung (54) genügt, so folgt aus (56) für alle $t \geqq t_x$ die Ungleichheit

(57) $$\beta\,|\,x(t)\,| \leqq B\,|\,x(t_x)\,| + 2(E + D'' + 1 + (D' + 1)(A + C)) := G_x,$$

welche die behauptete Beschränktheit von $x(t)$ beweist.

Wenn aber $h(x)$ (50) erfüllt, sei für alle $|\,x\,| \geqq S$ $xh(x) \geqq \eta := \liminf_{|x|\to\infty} xh(x)/2$. Aus der Voraussetzung $|\,x(t)\,| \geqq S$ auf $\langle t_x, t)$ $(t \geqq t_x)$ und aus (56) erhalten wir dann

(58) $$\beta\,|\,x(t)\,| \leqq G_x - \eta \int_{t_x}^{t} (|\,x(t_x)\,| + (D' + 1)(s - t_x))^{-1}\,ds,$$

was zunächst zum Schluss

(59) $$\liminf_{t\to\infty} |\,x(t)\,| \leqq S$$

führt. Aus (59) bekommen wir dann

(60) $$\limsup_{t\to\infty} |\,x(t)\,| \leqq \beta^{-1}(BS + 2(E + D'' + 1 + (D' + 1)(A + C)) := D,$$

d.h. (52).

Satz 4. *Alle Voraussetzungen des Satzes* 1 *und* (49) *seien erfüllt. Wenn die Funktion* $b(t) - a'(t)$ *für genügend große* t *nicht wachsend wird und darüber noch*

(61) $$\lim_{t\to\infty} (b(t) - a'(t)) > 0$$

gilt, so bleiben beide Behauptungen des vorangehenden Satzes richtig.

Beweis. Anstatt (56) benutzen wir die Identität

(62) $$(b(t) - a'(t))\,x(t) - (b(t_x) - a'(t_x)\,x(t_x)) - \int_{t_x}^{t} (b'(s) - a''(s))\,x(s)\,ds = \Phi(t).$$

Sonst kann der Beweis auf dieselbe Weise erbracht werden, wie der des Satzes 3.

Satz 5. *Alle Voraussetzungen des Satzes* 1 *seien erfüllt. Wenn noch*

(63) $$\lim_{t\to\infty} a(t) := a$$

existiert und die Funktion $h(x)$ *die Eigenschaft*

(64) $$\liminf_{|x|\to\infty} h(x)\,\mathrm{sgn}\,x > E$$

besitzt, dann genügt jede Lösung $x(t)$ *der Dgl.* (1'') *der Abschätzung* (52).

Beweis. Infolge (36) haben wir natürlich $\lim_{s\to\infty} b(t) = \beta$. Aus (63) folgt $3\sigma :=$ $:= \liminf_{|x|\to\infty} h(x) \operatorname{sgn} x - E > 0$. Gleichzeitig kann man eine Zahl $V > 0$ so finden, daß

$$h(x) \operatorname{sgn} x > 2\sigma \qquad \text{für alle } |x| \geqq V$$

gilt. Wir bestimmen noch $t_x \geqq t_0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $t \geqq t_x$ (55) besteht und darüber noch

$$|a(t) - a| \leqq \sigma(2(D'' + 1))^{-1}, \qquad b(t) - \beta \leqq \sigma(2(D' + 1))^{-1}$$

gilt. Aus (1″) bekommen wir

$$\beta x(t) = \beta x(t_x) - x''(t) + x''(t_x) - ax'(t) + ax'(t_x) + \tag{65}$$
$$+ \int_{t_x}^{t} e(s, x(s), x'(s), x''(s)) - (a(s) - a)\, x''(s) - (b(s) - \beta)\, x'(s) - h(x(s))\, \mathrm{d}s.$$

Ist $|x(t)| \geqq V$ für alle $t \geqq t_x$, so folgt aus (65)

$$\beta\, |x(t)| \leqq \beta\, |x(t_x)| + 2(D'' + 1 + a(D' + 1)) - \sigma(t - t_x),$$

d.h.

$$\liminf_{t\to\infty} |x(t)| \leqq V. \tag{66}$$

Aus (66) folgern wir leicht

$$\limsup_{t\to\infty} |x(t)| \leqq V + 2(D'' + 1 + a(D' + 1))\, \beta^{-1}.$$

Bemerkung 7. Weitere Sätze über die künftige Beschränktheit der Lösungen von (1″) kann man aufstellen indem man in den Sätzen 3., 4. die Bedingungen (49), (50) durch (64) ersetzt. Beachten wir noch die Arbeit [1], so ist es ohne weiteres klar, daß Sätze analog zu den Sätzen 3., 4. usw. bewiesen werden können, in welchen die Bedingung (36) durch $B < \alpha^2$ ersetzt wird. Dabei ist es möglich anstatt $b(t)$ eine allgemeinere Funktion $b(t, x, y, z)$ zu betrachten, die der Bedingung (3) genügt.

In der Arbeit [3] wurde bewiesen, daß wenn (4), (5), (49) gelten und darüber noch auch

$$\limsup_{|x|\to\infty} xh(x) < -Hb^{-1}(\operatorname{Max}(D', D'') + E)$$

richtig ist, so besitzt die Dgl.

$$x''' + ax'' + bx' + h(x) = e(t)$$

(mit positiven Konstanten a, b) divergente Lösungen. Sind alle Voraussetzungen des Satzes 2. (3., 4.) erfüllt und wenn noch weiter

$$xh(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \neq 0 \tag{67}$$

gilt, so ändert jede Lösung von (1′) das Zeichen auf beliebigem Intervalle (t, ∞) $(t \geqq t_0)$, oder es gilt

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \tag{68}$$

Aus der Beschränktheit der Funktionen $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ auf $\langle t_0, \infty)$ und aus (1′) folgt nämlich

$$\left| \int^{\infty} h(x(t))\, \mathrm{d}t \right| < \infty.$$

Dagegen führt die Voraussetzung, daß auf $\langle t_0, \infty)$ $\operatorname{sgn} x(t) = \text{const}$ schließlich gilt und gleichzeitig $\limsup_{t \to \infty} |x(t)| > 0$ ist, zusammen mit (67) zu

$$\int^{\infty} |h(x(t))|\, \mathrm{d}t = \left| \int^{\infty} h(x(t))\, \mathrm{d}t \right| = \infty.$$

Aus (68), (47′) folgt aber auch

$$\lim_{t \to \infty} x'(t) = \lim_{t \to \infty} x''(t) = 0$$

und daraus sehen wir unmittelbar, daß z. B. im Falle einer periodischen Funktion $e(t)$ alle Lösungen $x(t)$ von (1′) oszillieren.

LITERATUR

[1] Voráček, J.: *Dissipativeness of a certain nonlinear Differential Equation of the third Order with t-variable Coefficients,* Knižnice odborných a vědeckých spisů VUT v Brně, A-12 (1976) 7—17.

[2] Voráček, J.: *Über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung,* Czech. Math. Journ., 20 (95) (1970), 207—219.

[3] Voráček, J.: *Einige Bemerkungen über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung,* Archivum mathematicum, 2 (1966), 19—26.

[4] Reissig, R., Sansone, G., Conti, R.: *Non-linear Differential Equations of Higher Order,* Leyden, Noordhoff, 1974.

[5] Hara, T.: *On the Uniform Ultimate Boundedness of the Solutions of Certain Third Order Differential Equations,* J. of Math. Anal. and Appl., 80 (1981), 533—544.

J. Voráček
602 00 Brno, Hilleho 6
Tschechoslowakei