Jaroslav Krbiľa

Необходимые и достаточные условия несопряженности дифференциального уравнения $y'' = qy$

Archivum Mathematicum, Vol. 18 (1982), No. 4, 221--230

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107148`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XVIII: 221—230, 1982

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕСОПРЯЖЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' = qy$

Ярослав Крбила

(Поступило в редакцию 19-го сентября 1981 г.)

1. Классификация дифференциальных уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(q) \qquad y'' = qy, \qquad ' = \mathrm{d}/\mathrm{d}t,$$

которого коэффициент — носитель q имеет область определения $D_q \subset R$, и область значений функции $H_q \subset R$, R множество всех вещественных чисел.

Символом $C_k(M)$, $(k \geqq 0)$ обозначим систему всех вещественных функций, определенных на множестве M, у которых существуют непрерывные производные k-ого порядка включительно.

Пусть $q \in C_0(I)$, где $I = (a, b) = \{t \in R | -\infty \leqq a < t < b \leqq +\infty\} \subset D_q$. Функция z является решением уравнения (q) на интервале I, если владеет свойством:

$$z \in C_2(I), \qquad z''(t) = q(t)\,z(t) \qquad \forall\, t \in I.$$

Если функция y является нетривиальным решением уравнения (q) на I, будем писать $y \in (q_I)$.

Каждое решение $y \in (q_I)$ имеет на интервале I или счетное или конечное множество нулевых точек. В первом случае уравнение (q) называется колеблющимся, в случае втором неколеблющимся, на интервале I.

Следуя O. Borůvka [1] будем называть неколеблющееся уравнение (q) на I уравнением типа m на I, если существует решение уравнения (q) имеющее m нулевых точек на I, но не существует уравнения имеющего $m + 1$ нулевых точек на I.

Пусть $s, x \in I$ и пусть для $y \in (q_I)$ выполняется $y(s) = y(x) = 0$. Число x назовем n-тым $(n \in N)$ *сопряженным числом* к числу s справа, или слева, виду того, если x n-тым нулем и $x > s$, или $x < s$.

Обозначим Z, S множество всех чисел интервала I, для которых существуют сопряженные числа слева, справа соответственно. В случае дифференциального уравнения типа $m \geqq 2$, $m \in N$, множества Z, S не пусты. Множество Z ограничено снизу и множество S ограничено сверху. Из этого следует существование инфимума $g \in I$ множества Z и супремума $h \in I$ множества S, причем выполняется неравенство $a < g < h < b$.

Число g, h называется левым, правым *основным числом* уравнения (q) на интервале I, соответственно.

Дифференциальные уравнения (q) колеблющиеся и неколеблющиеся типа $m \geqq 2$, $m \in N$, на интервале I называются *сопряженными уравнениями* на I.

Неколеблющиеся дифференциальные уравнения (q) типа $m = 1$ на интервале I называются *несопряженными уравнениями* на интервале I. Это определение согласно с тем, которое ввел A. Wintner в работе [3].

Пусть уравнение (q) неколеблющееся, сопряженное на I. Если для $y_1, y_2 \in (q_I)$ имеет место $y_1(g) = y_2(h) = 0$, назовем y_1 левым, y_2 правым *основным решением* уравнения (q) на интервале I.

Если левое и правое основные решения уравнения (q) линейно независимы на I, уравнение (q) называется *общим*, в противном случае *специальным уравнением* на интервале I.

Возникает вопрос, каким образом классифицировать несопряженные дифференциальные уравнения потому, что у них нет основных решений. Ответ на этот вопрос содержится в работе [1], при этом применяется метод элиптических фаз. Другой способ содержится в работе [4].

2. Определение фаз дифференциального уравнения

Теория фаз тесно связана с теорией преобразований дифференциальных уравнений. Речь идет о соотношениях между решениями уравнения (q) и решениями уравнения

$$\text{(Q)} \qquad Y^{\cdot\cdot} = QY, \qquad {}^{\cdot} = \mathrm{d}/\mathrm{d}T,$$

где $Q \in C_0(J)$, $J = (A, B)$, и решениями нелинейных дифференциальных уравнений Куммера

$$\text{(Q, q)} \qquad -\{X, t\} + Q(X)\,X'^2 = q(t).$$

Напомним, что символом $\{X, t\}$ обозначаем производную Шварца функции X в точке t:

$$\{X, t\} = (X''/2X')' - (X''/2X')^2.$$

Если функция $X \in (O, q)$ определена на интервале $i \subset I$, $X'(t) \neq 0$, $\forall t \in i$ и $Y \in (Q_j)$, $j = X(i) \subset J$, то функция

$$\text{(1)} \qquad y = Y[x]/\sqrt{|X'|} \in (q_i).$$

Фазы с помощью преобразований определяются следующим образом:

Функции $\alpha_e, \alpha_h, \alpha_p$ назовем соответственно *элиптической, гиперболической, параболической* фазой уравнения (q) если выполняются следующие свойства:

(i) принадлежат классу C_3 на интервалах I_e, I_h, I_p ($\subset I$) соответственно

(ii) $\alpha_e' \neq 0$, $\alpha_h' \neq 0$, $\alpha_p' \neq 0$ $\quad \forall t \in I_e, I_h, I_p$

(iii) удовлетворяют уравнения

$$(-1, \mathrm{q}) \qquad -\{\alpha_e, t\} - \alpha_e'^2 = q_e(t) \qquad \forall t \in I_e,$$

$$(1, \mathrm{q}) \qquad -\{\alpha_h, t\} + \alpha_h'^2 = q_h(t) \qquad \forall t \in I_h,$$

$$(0, \mathrm{q}) \qquad -\{\alpha_p, t\} = q_p(t) \qquad \forall t \in I_p,$$

где функции q_e, q_h, q_p совпадают с носителем q на интервалах I_e, I_h, I_p соответственно.

Напомним еще, что элиптическая фаза α_e упорядоченной пары независимых решений $u, v \in (q_I)$ обладает свойством $\alpha_e \in C_0(I)$ и для всех $t \in I$, за исключением нулей функции v, определяется формулой

$$\mathrm{tg}\, \alpha_e = u/v. \tag{2}$$

Осциляцией элиптической фазы α_e на интервале I называется число $0(\alpha_e, I) = |c - d|$, где

$$c = \lim_{t \to a+} \alpha_e(t), \qquad \mathrm{d} = \lim_{t \to b-} \alpha_e(t). \tag{3}$$

Можно доказать (см. [2] Borůvka), что уравнение (q) неколеблющиеся, сопряженное типа $m \geqq 2$, $m \in N$ на I является общим или специальным на интервале I разве тогда, если

$$(m-1)\pi < 0(\alpha_e, I) < m\pi, \quad \text{или} \quad 0(\alpha_e, I) = m\pi.$$

Поэтому естественно и дифференциальное уравнение типа $m = 1$ называть общим или специальным на I в зависимости от того если

$$0 < 0(\alpha_e, I) < \pi, \quad \text{или} \quad 0(\alpha_e, I) = \pi. \tag{4}$$

Другая классификация несопряженных уравнений на I дана в настоящей работе.

3. Строго несопряженные дифференциальные уравнения

Уравнение (q) назовем уравнением *строго несопряженным* на интервале I *справа* (*слева*) если существует такое $y \in (q_I)$, что выполняется

$$y(t) \neq 0, \quad \int_a^t y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \quad \left(\int_t^b y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right) \forall t \in I. \tag{5}$$

Решение $y \in (q_I)$, для которого выполняется кроме свойства (5) и свойство

$$(6) \qquad \int_t^b y^{-2}(x)\,dx = \infty, \qquad \left(\int_a^t y^{-2}(x)\,dx = \infty\right) \forall t \in I$$

назовем *правым* (*левым*) *главным решением* на интервале I.

В дальнейшем случай без скобок (в скобках) мы будем обозначать буквой a (b).

Из определения очевидно, что правое главное решение на интервале I т. е. в глобальном смысле является тоже главным решением при $t = b$. Это понятие было введено Лейтоном и Морсом в [5]. Обратное утверждение не всегда верно.

Лемма 1. (см. [4] стр. 10). *Для того, чтобы уравнение* (q) *было уравнением строго несопряженным на интервале I справа* (*слева*) *необходимо и достаточно чтобы существовало правое* (*левое*) *главное решение на интетервале I.*

Доказательство: В [6] приведенно доказательство для строгой несопряженности справа, по этой причине проведем доказательство для строгой несопряженности слева.

Пусть дифференциальное уравнение (q) строго несопряженным на I слева, то существует $y \in (q_I)$ для которого выполняется (5):

$$(5b) \qquad y(t) \neq 0, \qquad \int_t^b y^{-2}(x)\,dx < \infty \qquad \forall t \in I.$$

Если $\int_a^t y^{-2}(x)\,dx = \infty$, $\forall t \in I$, это решение является левым главным решением дифференциального уравнения на I.

Но если

$$(7) \qquad \int_a^t y^{-2}(x)\,dx < \infty \qquad \forall t \in I,$$

возмем $y_1 \in (q_I)$ определено следующим образом:

$$(8) \qquad y_1(t) = y(t) \int_a^t y^{-2}(x)\,dx \qquad \forall t \in I.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\left[\left(\int_a^t y^{-2}(x)\,dx\right)^{-1}\right]' = -y_1^{-2}(t) \qquad \forall t \in I.$$

Проинтегрируя по отрезку $\langle t, b\rangle$ предыдущее соотношение, получим

$$(9) \qquad \left(\int_a^b y^{-2}(x)\,dx\right)^{-1} + \int_t^b y_1^{-2}(x)\,dx = \left(\int_a^t y^{-2}(x)\,dx\right)^{-1}.$$

Из (5b), (7), (8) вытекает, что $y_1(t) \neq 0\ \forall t \in I$. Из (9), (7), (5b) следует, что

$$(10) \qquad \int_t^b y_1^{-2}(x)\,dx < \infty \qquad \forall t \in I,$$

значит, что y_1 обладает тоже свойством (5b). Пусть в соотношении (9) $t \to a+$, тогда

$$\int_a^b y_1^{-2}(x)\,dx = \infty$$

и так как

$$\int_a^b y_1^{-2}(x)\,dx = \int_a^t y_1^{-2}(x)\,dx + \int_t^b y_1^{-2}(x)\,dx,$$

вместе с (10) имеем

$$\int_a^t y_1^{-2}(x)\,dx = \infty \qquad \forall t \in I,$$

значит, для y_1 выполняется свойство (6).

Обратное утверждение тривиально, и так лемма 1 доказана.

В дальнейшем покажем как охарактеризовать строгую несопряженность с помощью гиперболических фаз.

Напомним, что если $u, v \in (q_I)$ базис и

$$|u(t)| < |v(t)| \qquad \forall t \in I_1 = (a_1, b_1) \subset I,$$

тогда гиперболическая фаза α_h базиса u, v имеет свойство $\alpha_h \in C_0(I_1)$ и

$$(11) \qquad \operatorname{tgh} \alpha_h = u/v \qquad \forall t \in I_1.$$

Фазу a, которая обладает на I_1 свойством

$$(12) \qquad \lim_{t \to a_1+} \alpha(t) = -(\operatorname{sgn} \alpha')\,\infty, \qquad \lim_{t \to b_1-} \alpha(t) = (\operatorname{sgn} \alpha')\,\infty,$$

назовем *главной фазой* дифференциального уравнения (q) *на интервале* I_1.

Лемма 2. *Для того, чтобы уравнение* (q) *было строго несопряженным на интервале I слева, необходимо и достаточно чтобы существовала главная гиперболическая фаза уравнения* (q) *на интервале I.*

Доказательство: По лемме 1 для строго несопряженного уравнения (q) на I слева, существует левое главное решение $y \in (q_I)$. Для функции

$$(13) \qquad y_2(t) = y(t) \int_t^b y^{-2}(x)\,dx = y(t)\,f(t) \qquad \forall t \in I,$$

выполняется $y_2 \in (q_I)$ и введена функция f имеет свойство

$$(14) \qquad f(t) > 0,\ f'(t) < 0 \qquad \forall t \in I,$$

$$(15) \qquad \lim_{t \to a+} f(t) = \infty, \qquad \lim_{t \to b-} f(t) = 0.$$

Определим следующие функции

(16) $$u = \lambda(y - y_2), \qquad v = y + y_2, \qquad \lambda = \pm 1.$$

Функции $u, v \in (q_I)$ линейно независимы и

(17) $$|u| < |v|, \qquad u/v = \lambda(1 - f)/(1 + f) \qquad \forall t \in I,$$

(18) $$(u/v)' = -2\lambda f'/(1 + f)^2, \qquad \operatorname{sgn}(u/v)' = \lambda.$$

Отсюда следует:

(19) $$\lim_{t \to a+} u(t)/v(t) = -\lambda, \qquad \lim_{t \to b-} u(t)/v(t) = \lambda.$$

Из соотношений (17), (19) и (11) видно, что существует гиперболическая фаза α_h базиса (16) дифференциального уравнения (q), определена на I, $\operatorname{sgn} \alpha_h' = \lambda$ и выполняется

(20) $$\lim_{t \to a+} \alpha_h(t) = -\lambda\, \infty, \qquad \lim_{t \to b-} \alpha_h(t) = \lambda\, \infty,$$

значит, α_h главная гиперболическая фаза на интервале I.

Пусть α_h главная гиперболическая фаза уравнения (q) на интервале I. Для определенности предположим, что она возрастает. Из соотношения (1) видно, что функция

$$y_2 = [\exp \alpha_h]/\sqrt{\alpha_h'} \in (q_I)$$

и из (5b) следует что y_2 является левым главным решением, т. е. дифференциальное уравнение (q) строго несопряженным на I слева. Лемма доказана.

С помощью выше найденной главной гиперболической фазы дифференциального уравнения (q) из (1) получаем функцию

$$y_3 = [\exp(-\alpha_h)]/\sqrt{\alpha_h'} \in (q_I).$$

Из (5a) легко видно что y_3 является правым главным решением уравнения (q) на I, поэтому по лемме 1 уравнение (q) является и строго несопряженным на интервале I справа.

В начале доказательства леммы 2 мы использовали левое главное решение уравнения (q) на интервале I при построении главной гиперболической фазы уравнения (q) на I. Поэтому является естественным вопрос, можно ли при использовании правого главного решения уравнения (q) на I получать ту же самую, или другую главную гиперболическую фазу на I. Ответ содержится в следующей лемме.

Лемма 3. ([4] стр. 14). *Если α_h, β_h главные гиперболические фазы уравнения* (q) *на интервале I, то*

$$\alpha_h = \lambda\beta_h + k,$$

где $\lambda = 1\,(-1)$ если $(\operatorname{sgn} \alpha_h')(\operatorname{sgn} \beta_h') = 1\,(-1)$, $k \in R$.

Из предыдущего вытекает, что уравнение (q) является строго несопряженным на интервале I слева тогда и только тогда, когда оно строго несопряженным на интервале I справа.

На основе этого утверждения в следующем определении можем наречия справа, слева пропустить.

Определение. Уравнение (q) назовем строго несопряженным на интервале I если или

(A) существует $y \in (q_I)$, которое обладает свойством

$$y(t) \neq 0, \qquad \int_a^t y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_t^b y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x = \infty \qquad \forall\, t \in I,$$

или

(B) существует $y_1 \in (q_I)$, которое обладает свойством

$$y_1(t) \neq 0, \qquad \int_a^t y_1^{-2}(s)\,\mathrm{d}s = \infty, \qquad \int_t^b y_1^{-2}(s)\,\mathrm{d}s < \infty \qquad \forall\, t \in I.$$

Из выше приведенного вытекает утверждение леммы 4.

Лемма 4. *Необходимым и достаточным условием для строгой несопряженности уравнения* (q) *на интервале I является существование главной гиперболической фазы на интервале I.*

Лемма 5. *Дифференциальное уравнение* (q) *является строго несопряженным на интервале I тогда и только тогда, когда оно является общим дифференциальным уравнением на I типа $m = 1$.*

Доказательство: Пусть уравнение (q) является строго несопряженным на I. Тогда существует главная гиперболическая фаза α_h на I. Предположим, что $\operatorname{sgn} \alpha_h' = 1$. С ей помощью построим левое и правое главное решение на I:

$$u = [\exp \alpha_h]/\sqrt{\alpha_h'}, \qquad v = [\exp(-\alpha_h)/\sqrt{\alpha_h'}. \tag{21}$$

Откуда $u/v = \exp 2\alpha_h\ \forall\, t \in I$ и из того

$$\lim_{t \to a+} \exp 2\alpha_h(t) = 0, \qquad \lim_{t \to b-} \exp 2\alpha_h(t) = \infty,$$

получаем для элиптической фазы определенной в (2)

$$\alpha_e(t) = \operatorname{arctg} \exp 2\alpha_h(t) \qquad \forall\, t \in I$$

следующие пределы:

$$\lim_{t \to a+} \alpha_e(t) = 0, \qquad \lim_{t \to b-} \alpha_e(t) = \pi/2,$$

поэтому осциляция $0(\alpha_e, I) = \pi/2 < \pi$, т. е. имеем общее уравнение типа $m = 1$ на интервале I.

Пусть сейчас у нас общее уравнение (q) типа $m = 1$ на I. Тогда существует липтиэческая фаза α_e, $\operatorname{sgn} \alpha'_e = 1$, которой осциляция $0(\alpha_e, I) < \pi$. Без ограничения общности можно считать что

$$\lim_{t \to a+} \alpha_e(t) = k, \qquad 0 < k < \pi, \qquad \lim_{t \to b-} \alpha_e(t) = \pi,$$

так как если α_e является фазой дифференциального уравнения (q), то и $\alpha_e + c$, $c \in R$, является фазой того же самого уравнения. Из (1) видно, что функция $(\sin \alpha_e)/\sqrt{\alpha'_e} \in (q_I)$, и из вышеприведенных пределов следует, что $[\sin \alpha_e(t)]/\sqrt{\alpha'_e(t)} \neq 0 \ \forall t \in I$ и интеграл

$$\int_a^t [\sin^{-2} \alpha_e(x)] \, \alpha'_e(x) \, dx = \int_k^{\alpha_e(t)} \sin^{-2} z \, dz = -\operatorname{cotg} \alpha_e(t) + \operatorname{cotg} k < \infty,$$

так как $\alpha_e(t) < \pi \ \forall t \in I$. Поэтому выполняется (5а), что и требовалось доказать.

4. Специально несопряженные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение (q) назовом специально несопряженным на интервале I если существует $y \in (q_I)$ такое, что

$$\text{(C)} \qquad y(t) \neq 0, \qquad \int_t^b y^{-2}(x) \, dx = \int_a^t y^{-2}(x) \, dx = \infty \qquad \forall t \in I.$$

Из определения видно, что при специальном несопряженном дифференциальном уравнении достаточно рассматривать только главное решение на интервале I и не надо рассматривать левое или правое главное решение. По этой причине решение y со свойством (С) назовем *главным решением* уравнения (q) на интервале I.

Если $a, b \in R$, тогда из (С) получаем следующее свойство главного решения y:

$$\lim_{t \to a+} y(t) = 0, \qquad \lim_{t \to b-} y(t) = 0.$$

Если $a = -\infty$, или $b = +\infty$, это свойство не должно выполняться.

Из определения параболических фаз и их интерпретации в отношении к преобразованиям решений дифференциальных уравнений мы получим, что если α_p параболическая фаза уравнения (q) определена на I, то функции

$$\text{(22)} \qquad u = \alpha_p/\sqrt{|\alpha'_p|} \in (q_I), \qquad v = 1/\sqrt{|\alpha'_p|} \in (q_I),$$

и образуют базис решений.

Докажем следующее необходимое и достаточное условие.

Лемма 6. *Дифференциальное уравнение* (q) *является специальным несопряженным на интервале I тогда и только тогда, когда существует главная параболическая фаза на интервале I.*

Доказательство: Пусть (q) является специальным несопряженным уравнением на I. Тогда по определению существует главное решение y на I. С его помощью образуем $y_1 \in (q_I)$:

$$y_1(t) = y(t) \int_c^t y^{-2}(x)\,dx = y(t)\,f(t), \tag{23}$$

где $c \in I$ произвольная постоянная.

Функция f из соотношения (23) имеет свойство:

$$f(c) = 0, \qquad f'(t) > 0 \quad \forall t \in I, \qquad \lim_{t\to a+} f(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to b-} f(t) = \infty.$$

Возьмем базис решений u, v уравнения (q):

$$u = \lambda y_1, \qquad p = \pm 1, \qquad v = y$$

и определим параболическую фазу

$$\alpha_p = u/\mathrm{e} = \lambda f.$$

Из свойств функции f видно, что α_p является главной параболической фазой уравнения (q) на I, $\lambda = \operatorname{sgn} \alpha'_p$.

Наоборот, если существует главная параболическая фаза α_p уравнения (q) на I, то функция

$$y_2 = 1/\sqrt{|\alpha'_p|} \in (q_I)$$

и легко проверяется, что y_2 имеет свойство (C) и поэтому является главным решением дифференциального уравнения (q) на I.

Лемма 7. *Дифференциальное уравнение* (q) *является специально несопряженным на интервале I тогда и только тогда, когда оно явзяется специальным дифференциальным уравнением на интервале I типа* $m = 1$.

Доказательство: Если (q) является специальным несопряженным уравнением на I, то существует (лемма 6) главная параболическая фаза α_p на I. Пусть α_p возрастает. С помощью α_p образуем базис решений, как это сделано в (22) и получаем эллиптическую фазу:

$$\alpha_e = \operatorname{arctg} u/v = \operatorname{arctg} \alpha_p.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to a+} \alpha_e(t) = \lim_{t\to a+} \operatorname{arctg} \alpha_p(t) = -\pi/2,$$
$$\lim_{t\to b-} \alpha_e(t) = \lim_{t\to b-} \operatorname{arctg} \alpha_p(t) = \pi/2,$$

то осциляция $0(\alpha_e, I) = \pi$, т. е. уравнение (q) является типа $m = 1$ на I.

Наоборот, пусть (q) специальным уравнением типа $m = 1$ на I, тогда существует элиптическая фаза α_e уравнения (q) с осциляцией $0(\alpha_e, I) = \pi$. Можно предполагать, что α_e возрастает и

$$\lim_{t \to a+} \alpha_e(t) = 0, \qquad \lim_{t \to b-} \alpha_e(t) = \pi.$$

Тогда функция $(\sin \alpha_e)/\sqrt{\alpha'_e} \in (q_I)$ и является главным решением уравнения (q) на I.

5. Заключение

В заключение из утверждений предыдущих лемм получаем как главный результат настоящей работы следующие необходимые и достаточные условия несопряженности дипференциального уравнения:

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение* $(q) : y'' = q(t)\, y$, $q \in C_0(I)$, $I = (a, b)$ *является на интервале* I *строго, (специально) несопряженным тогда и только тогда, когда существует главная гиперболическая (параболическая) фаза уравнения* (q) *на интервале* I.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (q) *является на интервале* I *строго (специально) насопряженным тогда и только тогда, когда оно является общим (специальным) уравнением типа* $m = 1$ *в смысле определения Борувку.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Борувка, О.: *Теория глобальных свойств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Дифф. уравнения, Том. XII, 1976, 1348—1383.

[2] Borůvka, O.: *Linear Differential Transformations of the Second Order.* The English Universities Press, London, 1971.

[3] Wintner, A.: *On the nonexistence of conjugate points.* Amer. J. Math. 73, 1961, 368—380.

[4] Krbiľa, J.: *Diferenciálne rovnice druhého rádu a kvadratické funkcionály.* Habilitačná práca. Žilina, 1974.

[5] Leighton, W., Morse, M.: *Singular quadratic functionals.* Trans. Amer. Math. Soc. 40, 1936, 252—286.

[6] Krbiľa, J.: *Pure disconjugate homogeneous linear differential equations of the second order.* Zborník ved. prác DF VŠLD Zvolen, 1972, 241—248.

01008 Žilina, nám. Odbojárov 15
Czechoslovakia