Libuše Burešová

Über Mengen von Derivationen. II

Archivum Mathematicum, Vol. 18 (1982), No. 2, 57--63

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107124`

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XVIII: 57—64, 1982

ÜBER MENGEN VON DERIVATIONEN II.

LIBUŠE BUREŠOVÁ, BRNO

(Eingegangen am 31. März 1980)

Einleitung

Diese Arbeit knüpft an die Aıbeit [1] an, wo eine Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$ untersucht wird, auf der noch eine weitere Operation $.: \alpha(C) \times C \to C$ definiert ist. Dabei erfüllt die Operation . gewisse Gesetze. Diese Kategorie nennt man l-Kategorie. In dieser Arbeit definiere ich eine m-Kategorie, d. h. eine Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$, auf der Operationen $._l, ._r$ so definiert sind, dass $(C, \alpha, \beta, \circ, ._l)$ eine l-Kategorie und $(C, \alpha, \beta, \circ, ._r)$ eine r-Kategorie (dualer Begriff zum Begriff einer l-Kategorie) ist. Weiter befasse ich mich mit gleichen Problemen wie in [1]. Es zeigt sich, dass alle auf einer gegebenen Kategorie C konstruierten m-Kategorien allen möglichen Abbildungen von der Menge $\alpha(C)$ in die Menge $End\, C \times End\, C$ entsprechen und umgekehrt ($End\, C$ bezeichnet dabei die Menge aller Endomorphismen). Ähnlich wie in [1] al-Kategorien resp. ml-Kategorien untersucht wurden, studiere ich hier am-Kategorien resp. mm-Kategorien.

Auch für mm-Kategorien existiert ein wichtiges Modell und zwar die Menge von allen möglichen Derivationen zu einem Semi-Thuesystem mit Operationen, welche in einer sehr natürlichen Weise erklärt werden.

Umgekehrt, zu jeder freien mm-Kategorie kann man eine Menge von Regeln so wählen, dass die entstandene Menge von Derivationen mit der gegebenen freien mm-Kategorie isomorph ist.

Ich danke dabei herzlichst Herrn Professor Miroslav Novotný für die Hilfe und Führung meiner Arbeit.

1. m-Kategorien

In der Arbeit [1] sind l-Kategorien, al-Kategorien und ml-Kategorien definiert. Dual kann man r-Kategorien, ar-Kategorien und mr-Kategorien definieren. r-Kategorien, ar-Kategorien und mr-Kategorien erfüllen duale Bedingungen zu den Bedingungen, welche in [1] l-Kategorien, al-Kategorien und ml-Kategorien erfüllen. In weiterem stützen wir uns auf die Gültigkeit aller diesen Definitionen und Ergebnisse.

Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine algebraische Struktur, für welche $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l)$ eine l-Kategorie und $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_r)$ eine r-Kategorie sind. Dann heisst $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine m-Kategorie.

1.1. Hilfssatz. *Sei $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine m-Kategorie, u sei ein beliebiges Element aus $\alpha(C)$, $f_u^l, f_u^r : C \to C$ seien Abbildungen mit $f_u^l(s) = u \cdot_l s$, $f_u^r(s) = s \cdot_r u$ für jedes $s \in C$. Dann sind f_u^l, f_u^r Endomorphismen der Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$.*

Beweis: Der Hilfssatz folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz 1.2 in [1] und aus der dualen Behauptung zu diesem.

Bezeichnung: Die Menge aller Endomorphismen der Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$ bezeichnen wir mit $End\,(C, \alpha, \beta, \circ)$.

1.2. Hilfssatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, für jedes $u \in \alpha(C)$ seien f_u^l, f_u^r beliebige Endomorphismen der Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$. Für beliebige $u \in \alpha(C)$, $s \in C$ definieren wir $u \cdot_l s = f_u^l(s)$, $s \cdot_r u = f_u^r(s)$. Dann ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine m-Kategorie.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem Hilfssatz 1.3 in der Arbeit [1] und aus dualer Behauptung zu diesem.

Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie. Wir setzen $\mathfrak{A} = (End\,(C, \alpha, \beta, \circ) \times \times End\,(C, \alpha, \beta, \circ))^{\alpha(C)}$ und bezeichnen die Menge aller m-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ mit $\mathfrak{M}$. Für jedes $F \in \mathfrak{A}$ und für jedes $u \in \alpha(C)$ definieren wir $F(u) = (f_u^l, f_u^r)$. Es sei b eine Abbildung, welche jedem $F \in \mathfrak{A}$ eine Struktur $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ mit $u \cdot_l s = f_u^l(s)$, $s \cdot_r u = f_u^r(s)$ für jedes $u \in \alpha(C)$, $s \in C$ zuordnet. Dann heisst die Abbildung b eine Konstruktion.

Aus 1.4 in [1] folgt:

1.3. Hilfssatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie. Dann ist die Konstruktion b eine bijektive Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf die Menge $\mathfrak{M}$.*

1.4. Beispiel. Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, $a \in \alpha(C)$ ein beliebiges Element. Dann ist die Abbildung f mit der Eigenschaft $f(s) = a$ für jedes $s \in C$ ein Endomorphismus.

1.5. Folgerung. *Zu jeder Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$ gibt es wenigstens ein Paar Operationen $\cdot_l$, $\cdot_r$ so, dass $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine m-Kategorie ist.*

2. am-Kategorien

Eine m-Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ heisst Kategorie mit einer assoziativen Multiplikation, kurz am-Kategorie, wenn $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l)$ eine al-Kategorie und $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_r)$ eine ar-Kategorie ist und wenn

(i) $\quad u \cdot_l (s \cdot_r v) = (u \cdot_l s) \cdot_r v \quad$ für beliebige $s \in C$, $\quad u, v, \in \alpha(C)$ gilt.

2.1. Hilfssatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine am-Kategorie. Sind f_x^l, f_x^r $(x \in \alpha(C))$*

Elemente von End $(C, \alpha, \beta, \circ)$, welche $f_x^l(s) = x \cdot_l s$, $f_x^r(s) = s \cdot_r x$ für jedes $s \in C$ erfüllen, dann gilt

(i) $f_u^l \cdot f_v^l = f_{u \cdot_l v}^l$

(ii) $f_u^r \cdot f_v^r = f_{u \cdot_r v}^r$

(iii) $f_u^l \cdot f_v^r = f_v^r \cdot f_u^l$

für beliebige $u, v \in \alpha(C)$.

Beweis: (i) ist bewiesen in [1] 2.1., (ii) ist die duale Behauptung. (iii) ist die Bedingung (i) aus der obigen Definition.

Für jedes $F \in \mathfrak{A}$ und jedes $u \in \alpha(C)$ sind $f_u^l, f_u^r \in End\ (C, \alpha, \beta, \circ)$ definiert. Wir setzen $T^l(u, s) = f_u^l(s)$, $T^r(u, s) = f_u^r(s)$ für jedes $u \in \alpha(C)$ und jedes $s \in C$. Die Abbildung F heisst translativ, wenn

(1) $$T^l(u, T^l(v, s)) = T^l(T^l(u, v), s)$$

(2) $$T^r(u, T^r(v, s)) = T^r(T^r(u, v), s)$$

(3) $$T^l(u, T^r(v, s)) = T^r(v, T^l(u, s))$$

gilt.

Wir bezeichnen mit *Trans* $(C, \alpha, \beta, \circ)$ die Menge aller tianslativen Abbildungen von $\alpha(C)$ in *End* $(C, \alpha, \beta, \circ) \times$ *End* $(C, \alpha, \beta, \circ)$.

2.2. Folgerung. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine am-Kategorie. Dann ist die Abbildung F: $\alpha(C) \to$ End $(C, \alpha, \beta, \circ) \times$ End $(C, \alpha, \beta, \circ)$, die jedem $u \in \alpha(C)$ ein Paar von Endomorphismen $f_u^l : f_u^l(s) = u \cdot_l s$, $f_u^r : f_u^r(s) = s \cdot_r u$ für jedes $s \in C$ zuordnet, translativ.*

Beweis: (1) gilt gemäss 2.1 und (2) ist die duale Behauptung. Wir beweisen (3):
$T^l(u, T^r(v, s)) = f_u^l(T^r(v, s)) = f_u^l(f_v^r(s)) = f_v^r(f_u^l(s)) = f_v^r(T^l(u, s)) = T^r(v, T^l(u, s))$.

2.3. Hilfssatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, F: $\alpha(C) \to$ End $(C, \alpha, \beta, \circ) \times$ $\times$ End $(C, \alpha, \beta, \circ)$ ihre translative Abbildung. Für jedes $u \in \alpha(C)$, $s \in C$ definieren wir $u \cdot_l s = f_u^l(s)$, $s \cdot_r u = f_u^r(s)$. Dann ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine am-Kategorie.*

Beweis: $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l)$ resp. $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_r)$ ist offensichtlich eine l-Kategorie resp. eine r-Kategorie. Wir beweisen (i) aus der Definition der am-Kategorie:

$$u \cdot_l (s \cdot_r v) = f_u^l(f_v^r(s)) = T^l(u, T^r(v, s)) = T^r(v, T^l(u, s)) = f_v^r(f_u^l(s)) = (u \cdot_l s) \cdot_r v.$$

2.4. Satz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, b die oben definierte Abbildung. Dann ist die Restriktion der Abbildung b auf Trans $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine bijektive Abbildung der Menge Trans $(C, \alpha, \beta, \circ)$ auf die Menge aller am-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$.*

Der Beweis folgt aus 2.2 und 2.3.

3. mm-Kategorien

Eine am-Kategorie heisst Kategorie mit einer monoidalen Multiplikation, kurz eine mm-Kategorie, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt:

(iv) Es gibt ein $e \in \alpha(C)$ so, dass $e \cdot_l s = s$, $s \cdot_r e = s$ für jedes $s \in C$.

Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, $F \in \mathfrak{A}$. Wir sagen, dass F stark translativ ist, wenn sie translativ ist und wenn es ein $e \in \alpha(C)$ so gibt, dass $T^l(e, s) = T^r(e, s) = s$ für jedes $s \in C$ gilt. Wir bezeichnen mit *S-Trans* $(C, \alpha, \beta, \circ)$ die Menge aller stark translativen Abbildungen von $\alpha(C)$ in *End* $(C, \alpha, \beta, \circ) \times$ *End* $(C, \alpha, \beta, \circ)$.

3.1. Hilfssatz. *Ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine mm-Kategorie, dann ist die Abbildung F, welche zu jedem $u \in \alpha(C)$ die Endomorphismen $f^l_u, f^r_u \in End(C, \alpha, \beta, \circ)$ mit $f^l_u(s) = u \cdot_l s$, $f^r_u(s) = s \cdot_r u$ für jedes $s \in C$ zuordnet, stark translativ.*

Beweis: Gemäss 2.2 ist F eine translative Abbildung. Gemäss 3.1 in [1] und der dualen Behauptung ist F eine stark translative Abbildung.

3.2. Hilfsatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, F ihre stark translative Abbildung. Für jedes $u \in \alpha(C)$, $s \in C$ definieren wir $u \cdot_l s = f^l_u(s)$, $s \cdot_r u = f^r_u(s)$. Dann ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine mm-Kategorie.*

Beweis: Gemäss 2.3 ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine am-Kategorie. Gemäss 3.2 in [1] und der dualen Behauptung ist sie auch eine mm-Kategorie.

3.3. Satz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie und b im Abschnitt 1 definierte Abbildung. Dann ist die Restriktion der Abbildung b auf S-Trans $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine bijektive Abbildung von der Menge S-Trans $(C, \alpha, \beta, \circ)$ auf die Menge aller mm-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$.*

Beweis: Der Satz folgt aus 2.4, 3.1 und 3.2.

Es gilt $u \cdot_l v = u \cdot_r v$ für jede zwei Elemente $u, v \in \alpha(C)$, da $u \cdot_l v = u \cdot_l (e \cdot_r v) = (u \cdot_l e) \cdot_r v = u \cdot_r v$. Auf der Menge $\alpha(C)$ sind also die Operationen $\cdot_l, \cdot_r$ identisch und wir können sie mit . bezeichnen.

Eine mm-Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ heisst eine mm-Kategorie über einem Monoid $(G, \times)$, wenn $(\alpha(C), .) = (G, \times)$. Also ist eine mm-Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ über einem Monoid eine Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$ mit Operationen $\cdot_l, \cdot_r$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $u \cdot_l (s \circ t) = (u \cdot_l s) \circ (u \cdot_l t)$, $(s \circ t) \cdot_r u = (s \cdot_r u) \circ (t \cdot_r u)$ für beliebige $s, t \in C$, $u \in G$

(ii) $\alpha(u \cdot_l s) = u \cdot_l \alpha(s)$, $\alpha(s \cdot_r u) = \alpha(s) \cdot_r u$ für beliebige $u \in G$, $s \in C$

(iii) $\beta(u \cdot_l s) = u \cdot_l \beta(s)$, $\beta(s \cdot_r u) = \beta(s) \cdot_r u$ für beliebige $u \in G$, $s \in C$

(iv) $u \cdot_l (v \cdot_l s) = (u \,.\, v) \cdot_l s$, $(s \cdot_r u) \cdot_r v = s \cdot_r (u \,.\, v)$ für beliebige $u, v \in G$, $s \in C$

(v) $u \cdot_l (s \cdot_r v) = (u \cdot_l s) \cdot_r v$ für beliebige $u, v \in G$, $s \in C$

(vi) Ist e das Einselement des Monoids G, so gilt

$$e \cdot_l s = s \cdot_r e = s \qquad \text{für jedes } s \in C.$$

Die Definition der treuen Abbildung, d. h. einer Abbildung, welche die Existenz von Summen erhalten lässt, wird genau aus den ml-Kategorien in [1] auf die mm-Kategorien übertragen.

Es seien $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$, $(D, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ mm-Kategorien über G, f eine Abbildung von C in D. Wir sagen, dass f ein Homomorphismus ist, wenn f ein Funktor von $(C, \alpha, \beta, \circ)$ in $(D, \alpha, \beta, \circ)$ ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind

(i) $f(u \cdot_l x) = f(u) \cdot_l f(x)$, $f(x \cdot_r u) = f(x) \cdot_r f(u)$ für beliebige $u \in G$, $x \in C$

(ii) $f \mid G = id\, G$

Die Begriffe: mm-Teilkategorie, mm-Teilkategorie, die von der Teilmenge M der mm-Kategorie C erzeugt ist, frei erzeugte mm-Kategorie und freie mm-Kategorie über G werden von ml-Kategorien von [1] wörtlich übertragen.

4. Die Mengen D_R, I_R, S_R

Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$ eine Menge. Wir bezeichnen $\overset{\Rightarrow}{R}$ die Menge aller geordneten Paare $\mathbf{s} = (s, t)$ von Elementen aus G, zu welchen Elemente $u, v \in G$, $(x, y) \in R$ existieren, so dass im Monoid G die Gleichungen $s = uyv$, $t = uxv$ gelten.

Die Menge D_R definieren wir ebenso wie in [1].

Auf D_R wird eine Algebra $(D_R, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ vom Typ (1, 1, 2, 2, 2) definiert. Die Operationen $\alpha, \beta, \circ, \cdot_l$ sind schon in [1] definiert. Die Operation $\cdot_r$ ist die duale Operation zu $\cdot_l$:

(iv) Es seien $u \in G$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in D_R$ $(n \geqq 0)$ beliebige Elemente. Dann ist $\mathbf{t} \cdot_r u$ definiert und zwar $\mathbf{t} \cdot_r u = (t_0 u, t_1 u, \ldots, t_n u)$.

Es seien $R \subseteq G \times G$, K Mengen und $f : K \to R$ eine surjektive Abbildung. Es sei J_R die Menge aller geordneten n-Tupel $(u_i, r_i, v_i, k_i)_{i=1}^n$ $(n \geqq 1)$ mit $(u_i, r_i, v_i, k_i) \in G \times R \times G \times K$, $f(k_i) = r_i = (y_i, x_i)$, $u_i y_i v_i = u_{i-1} x_{i-1} v_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, n$. Wir setzen $I_R = J_R \cup G$.

Auf I_R wird eine Algebra $(I_R, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ vom Typ (1, 1, 2, 2, 2) mit vollständigen einstelligen Operationen α, β, einer partiellen binären Verknüpfung $\circ$ und partiellen binären Operationen $\cdot_l$, $\cdot_r$ erklärt. Diese Operationen definieren wir folgendermassen:

(1) Ist $u \in G$, so definieren wir $\alpha(u) = u = \beta(u)$. Ist $\mathbf{s} = (u_i, r_i, v_i, k_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$ mit $r_i = (y_i, x_i) \in R$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, so wird $\alpha(\mathbf{s}) = u_1 y_1 v_1$, $\beta(\mathbf{s}) = u_n x_n v_n$ gesetzt.

(2) Die Verknüpfung $\circ$ ist für $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in I_R$ definiert, wenn $\beta(\mathbf{s}) = \alpha(\mathbf{t})$ ist. Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) Es sei $\mathbf{s} = u \in G$, $\mathbf{t} = u \in G$. Dann legt man $\mathbf{s} \circ \mathbf{t} = u$ $(= \mathbf{s} = \mathbf{t})$.

b) Es sei $\mathbf{s} = u \in G$, $\mathbf{t} = (u_i, r_i, v_i, k_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$, $r_i = (y_i, x_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $u = u_1 y_1 v_1$. Dann legt man $\mathbf{s} \circ \mathbf{t} = \mathbf{t}$.

c) Es sei $s = (u_i, r_i, v_i, k_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$, $r_i = (y_i, x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, $t = v \in G$. Dabei sei $u_n x_n v_n = v$. Dann legt man $s \circ t = s$.

d) Es seien $s = (u_i, r_i, v_i, k_i)_{i=1}^m \in I_R$ $(m \geqq 1)$, $r_i = (y_i, x_i)$ für $i = 1, \ldots, m$, $t = (a_i, p_i, b_i, l_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$, $p_i = (c_i, d_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dabei sei $u_m x_m v_m = a_1 c_1 b_1$. Dann legt man $s \circ t = z$, $z = (e_i, q_i, f_i, j_i)_{i=1}^{m+n} \in I_R$ mit

$$e_i = \begin{cases} u_i & \text{für } i = 1, \ldots, m \\ a_i & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} r_i & \text{für } i = 1, \ldots, m \\ p_i & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

$$f_i = \begin{cases} v_i & \text{für } i = 1, \ldots, m \\ b_i & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

$$j_i = \begin{cases} k_i & \text{für } i = 1, \ldots, m \\ l_i & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

(3) Wir definieren für $v \in G$, $s \in I_R$ die Elemente $v \cdot_l s$, $s \cdot_r v$ auf folgende Weise: Ist $s = u \in G$, dann legt man $v \cdot_l s = vu$, $s \cdot_r v = uv$. Ist $s = (u_i, r_i, v_i, k_i)_{i=1}^n$ $(n \geqq 1)$, dann definieren wir $v \cdot_l s = (vu_i, r_i, v_i, k_i)_{i=1}^n$, $s \cdot_r v = (u_i, r_i, v_i v, k_i)_{i=1}^n$.

Speziell kann man für die Menge K die Menge R und für f die Identität auf R nehmen. Dann bezeichnen wir die Menge I_R mit S_R; die Elemente aus S_R werden wir einfach $(u_i, r_i, v_i)_{i=1}^n$ schreiben.

4.1. Hilfssatz. *Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$ eine Menge. Es bezeichne X ein beliebiges von den Symbolen D, I, S. Dann gelten folgende Behauptungen:*

a) *$(X_R, \alpha, \beta, \circ)$ ist eine freie Kategorie, $\alpha(X_R) = G = \beta(X_R)$.*

b) *Die Operationen $\cdot_l$, $\cdot_r$ besitzen folgende Eigenschaften:*

(i) $u \cdot_l (s \circ t) = (u \cdot_l s) \circ (u \cdot_l t)$, $(s \circ t) \cdot_r u = (s \cdot_r u) \circ (t \cdot_r u)$ *für beliebige* $u \in G$, $s, t \in X_R$.

(ii) $u \cdot_l \alpha(s) = \alpha(u \cdot_l s)$, $\alpha(s) \cdot_r u = \alpha(s \cdot_r u)$ *für beliebige* $u \in G$, $s \in X_R$.

(iii) $u \cdot_l \beta(s) = \beta(u \cdot_l s)$, $\beta(s) \cdot_r u = \beta(s \cdot_r u)$ *für beliebige* $u \in G$, $s \in X_R$.

(iv) $u \cdot_l (v \cdot_l s) = (u \cdot_l v) \cdot_l s$, $(s \cdot_r u) \cdot_r v = s \cdot_r (u \cdot_r v)$ *für beliebige* $u, v \in G$, $s \in X_R$.

(v) $u \cdot_l (s \cdot_r v) = (u \cdot_l s) \cdot_r v$ *für beliebige* $u, v \in G$, $s \in X_R$.

(vi) *Ist e ein Einselement des Monoids G, so gilt $e \cdot_l s = s$, $s \cdot_r e = s$ für jedes $s \in X_R$.*

Beweis: Die Behauptung a) folgt aus 4.1 in [1]. Die Behauptung b) folgt unmittelbar aus den Definitionen von D_R, I_R und S_R.

4.2. Satz. *Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$. Dann ist $(I_R, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ eine freie mm-Kategorie über G. Die Menge $M = \{(e, r, e, k); (e, r, e, k) \in I_R$, e ist das Einselement von $G\}$ ist ein Erzeugendensystem von I_R.*

Beweis: Die Behauptung beweist man analog wie im Beweis zu Satz 4.2 in [1]. Die Behauptungen für die Operation $x \cdot_r u$ beweisen wir dual.

4.3. Folgerung. *Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$. Dann ist S_R eine freie mm-Kategorie über G. Die Menge $M = \{(e, \mathbf{r}, e); (e, \mathbf{r}, e) \in S_R, e$ ist ein Einselement von $G\}$ ist ein freies Erzeugendensystem von S_R.*

4.4. Satz. *Zu jeder freien mm-Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ über G existiert eine Menge $R \subseteq G \times G$ so, dass $(I_R, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ und $(C, \alpha, \beta, \circ, \cdot_l, \cdot_r)$ isomorph sind.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog wie der Beweis von 4.4 in [1]. Die Abbildung $f : M \to I_R$ definieren wir folgenderweise: $f(s) = (e, k(\mathbf{s}), e, \mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in M$.

LITERATUR

[1] Burešová L.: *Über Mengen von Derivationen*, Arch. Math. 1, XIII.: 1—12, 1977.