Archivum Mathematicum

Vítězslav Novák

Verallgemeinerte Sprachen und ihre Homomorphismen

Archivum Mathematicum, Vol. 16 (1980), No. 2, 115--125

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107063`

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XVI: 115—126, 1980

VERALLGEMEINERTE SPRACHEN UND IHRE HOMOMORPHISMEN

VÍTĚZSLAV NOVÁK, Brno

(Eingegangen am 4. Juni 1979)

1. VERALLGEMEINERTE SPRACHEN

1.1. Einleitung. In der Literatur wird eine Sprache meistens als eine endliche Menge X (aller Wörter) und eine endliche Untermenge des freien Monoids X^* (die Menge aller richtigen Sätze) definiert. Dieser Begriff kann so verallgemeinert werden, dass man Sätze beliebiger (auch transfiniter) Länge zulässt. Das Ziel dieser Note ist es zu zeigen, dass manche Sätze auch mit dieser Verallgemeinerung beibehalten bleiben.

1.2. Bezeichnung. Mit Ord bezeichnen wir die Klasse aller Ordnungszahlen. Für eine beliebige $\alpha \in \mathrm{Ord}$ bezeichnen wir $W(\alpha) = \{\xi; \xi \in \mathrm{Ord}, \xi < \alpha\}$ mit der natürlichen Ordnung der Ordnungszahlen.

3.1. Definition. *Sei X eine nichtleere Menge, $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $x : W(\alpha) \to X$ eine Abbildung. Dann heisst x eine Kette über der Menge X. Die Ordnungszahl α heisst Länge der Kette x und wird als $l(x)$ bezeichnet. Statt $x(\xi)$ schreiben wir x_ξ; die Kette x wird dann als $(x_\xi; \xi < \alpha)$ bezeichnet.*

1.4. Bemerkung. Es gibt nur eine Kette über X der Länge 0, nämlich die leere Abbildung $W(0) = \emptyset \to X$. Diese Kette wird mit dem Symbol Λ bezeichnet.

1.5. Bezeichnung. Sei X eine nichtleere Menge. Mit dem Symbol $\mathscr{R}(X)$ bezeichnen wir die Klasse aller Ketten über der Menge X.

1.6. Verabredung. Sei X eine nichtleere Menge, $x \in \mathscr{R}(X)$, $l(x) = 1$, d.h. $x = (x_0)$. Dann setzen wir $x = x_0$; also identifizieren wir Elemente der Menge X mit Ketten der Länge 1. Bei dieser Verabredung haben wir $X \subseteq \mathscr{R}(X)$.

1.7. Definition. *Sei X eine nichtleere Menge, $x = (x_\xi; \xi < \alpha) \in \mathscr{R}(X)$, $y = (y_\xi; \xi < \beta) \in \mathscr{R}(X)$. Dann setzen wir $xy = (t_\xi; \xi < \alpha + \beta)$, wo $t_\xi = x_\xi$ für $\xi \in \mathrm{Ord}$, $\xi < \alpha$ und $t_\xi = y_\zeta$ für $\xi \in \mathrm{Ord}$, $\xi = \alpha + \zeta$, $\zeta < \beta$.*

1.8. Bemerkung. Aus 1.7. folgt gleich: Ist X eine nichtleere Menge und $x, y \in \mathscr{R}(X)$, dann ist $xy \in \mathscr{R}(X)$ und $l(xy) = l(x) + l(y)$. Weiter gilt $\Lambda x = x\Lambda = x$ für jede Kette $x \in \mathscr{R}(X)$.

1.9. Lemma. *Sei X eine nichtleere Menge und $x, y, z \in \mathscr{R}(X)$. Dann gilt $(xy)\,z = x(yz)$.*

Beweis. Sei $x = (x_\xi;\ \xi < \alpha)$, $y = (y_\xi;\ \xi < \beta)$, $z = (z_\xi;\ \xi < \gamma)$, also $l(x) = \alpha$, $l(y) = \beta$, $l(z) = \gamma$. Dann ist $l[(xy)\,z] = (\alpha + \beta) + \gamma$, $l[x(yz)] = \alpha + (\beta + \gamma)$, d.h. $l[(xy)\,z] = l[x(yz)]$. Weiter ist $(xy)\,z = (t_\xi;\ \xi < (\alpha + \beta) + \gamma)$, wo $t_\xi = x_\xi$ für $\xi < \alpha$, $t_\xi = y_\zeta$ für $\xi = \alpha + \zeta$, $\zeta < \beta$ und $t_\xi = z_\eta$ für $\xi = \alpha + \beta + \eta$, $\eta < \gamma$. Dieselbe Form hat aber auch die Kette $x(yz)$ und deshalb $(xy)\,z = x(yz)$.

1.10. Definition. *Sei X eine nichtleere Menge, $L \subseteq \mathscr{R}(X)$, L eine Menge. Dann heisst das Paar (X, L) eine verallgemeinerte Sprache über der Menge X.*

1.11. Definition. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $x \in X$, $y, z \in \mathscr{R}(X)$. Das geordnete Paar $(y, z) \in \mathscr{R}(X) \times \mathscr{R}(X)$ heisst ein Kontext des Elementes x genau dann, wenn $yxz \in L$ gilt.*

1.12. Bezeichnung. Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $x \in X$. Als $\mathfrak{C}(x)$ bezeichnen wir die Menge aller Kontexte des Elementes x. Weiter bezeichnen wir $\mathfrak{A}(X, L) = \{\mathfrak{C}(x, L);\ x \in X\}$.

1.13. Bemerkung. Die Menge $\mathfrak{A}(X, L)$ wird als geordnete Menge — mit der mengentheoretischen Inklusion als Ordnung — aufgefasst.

1.14. Satz. *Zu jeder geordneten Menge G existiert eine verallgemeinerte Sprache (X, L) so, dass G mit $\mathfrak{A}(X, L)$ isomorph ist.*

Beweis.[1]) Setzen wir $X = G$ und sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$ die kleinste Ordnungszahl mit $\operatorname{card} \alpha = \operatorname{card} X$. Sei $i\colon W(\alpha + 1) - \{0\} \to X$ eine Bijektion. Für beliebige $\beta \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$ bezeichnen wir $\mathscr{R}_\beta(X) = \{x;\ x \in \mathscr{R}(X),\ l(x) = \beta,\ x = (x_\xi;\ \xi < \beta),\ x_\xi \nleqq i(\beta)$ für alle $\xi < \beta\}$. Endlich setzen wir $L = \bigcup_{1 \leqq \beta \leqq \alpha} \mathscr{R}_\beta(X)$; wir zeigen, dass $G \cong \mathfrak{A}(X, L)$ gilt. Seien also $x, y \in G$, $x \leqq y$ und $(u, v) \in \mathfrak{C}(x)$. Dann ist $uxv \in L$, also $uxv \in \mathscr{R}_\beta(X)$, wo $\beta = l(uxv)$ ist. Daraus folgt $x \nleqq i(\beta)$ und also auch $y \nleqq i(\beta)$. Das impliziert $uyv \in \mathscr{R}_\beta(X) \subseteq L$ und $(u, v) \in \mathfrak{C}(y)$. Deshalb $\mathfrak{C}(x) \subseteq \mathfrak{C}(y)$.

Seien umgekehrt $x, y \in G$ mit $\mathfrak{C}(x) \subseteq \mathfrak{C}(y)$ und setzen wir voraus, dass $x \nleqq y$ gilt. Sei $y = i(\beta)$ und setzen wir $z = \{z_\xi;\ \xi < \beta\}$, wo $z_\xi = x$ für alle $\xi < \beta$ ist. Dann ist $z \in \mathscr{R}_\beta(X) \subseteq L$ und $z = \Lambda x u$, wo $u = (u_\xi;\ \xi < \beta - 1)$, $u_\xi = x$ für alle $\xi < \beta - 1$. Deshalb $(\Lambda, u) \in \mathfrak{C}(x)$. Aber $\Lambda y u \,\bar{\in}\, L$, denn $l(\Lambda y u) = \beta$ und $y \leqq y = i(\beta)$. Daraus

---

[1]) In [1] wird dieser Satz für endliche geordnete Mengen und Sprachen in dem üblichen Sinn mit einer ähnlichen Methode bewiesen.

$(A, u) \bar{\in} \mathfrak{C}(y)$, was ein Widerspruch mit der Voraussetzung $\mathfrak{C}(x) \subseteq \mathfrak{C}(y)$ ist. Es gilt also $x \leqq y$ und die Abbildung $x \to \mathfrak{C}(x)$ ist ein Isomorphismus der Menge G auf die Menge $\mathfrak{A}(X, L)$.

2. KONFIGURATIONEN

2.1. Definition. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $x \in \mathscr{R}(X)$. Wir sagen, dass die Kette x brauchbar in (X, L) ist und schreiben $xv(X, L)$ genau dann, wenn es solche Ketten $u, v \in \mathscr{R}(X)$ gibt, dass $uxv \in L$ gilt.*

2.2. Definition. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $x, y \in \mathscr{R}(X)$. Wir sagen, dass die Kette x ersetzbar in (X, L) durch die Kette y ist und schreiben dafür $x \succ y(X, L)$ genau dann, wenn $uxv \in L \Rightarrow uyv \in L$ für alle $u, v \in \mathscr{R}(X)$ gilt.*

2.3. Definition. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $x, y \in \mathscr{R}(X)$. Die Kette x heisst Konfiguration vom Rang 1 der verallgemeinerten Sprache (X, L) und y ein Resultat dieser Konfiguration genau dann, wenn folgendes gilt: $xv(X, L)$, $x \succ y(X, L)$, $y \succ x(X, L)$, $l(uxv) > l(uyv)$ für alle $u, v \in \mathscr{R}(X)$ mit $uxv \in L$.*

2.4. Bezeichnung. Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache. Wir bezeichnen mit $C_1(X, L)$ die Menge aller Konfigurationen vom Rang 1 der verallgemeinerten Sprache (X, L). Weiter bezeichnen wir $T_1(X, L) = \{x;\ x \in L,\ x = utv,\ u, v \in \mathscr{R}(X),\ t \in C_1(X, L)\}$.

2.5. Definition. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $\alpha \in$ Ord, $\alpha > 1$ und nehmen wir an, dass die Mengen $C_\xi(X, L)$, $T_\xi(X, L)$ für alle $\xi \in$ Ord, $1 \leqq \xi < \alpha$ definiert werden. Setzen wir $S_\alpha(X, L) = \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha} C_\xi(X, L)$, $R_\alpha(X, L) = \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha} T_\xi(X, L)$. Seien $x, y \in \mathscr{R}(X)$. Die Kette x heisst Konfiguration vom Rang α der verallgemeinerten Sprache (X, L) und y ein Resultat dieser Konfiguration genau dann, wenn folgendes gilt: $xv(X, L - R_\alpha(X, L))$, $x \succ y(X, L - R_\alpha(X, L))$, $y \succ x(X, L)$, $l(uxv) > l(uyv)$ für alle $u, v \in \mathscr{R}(X)$ mit $uxv \in L - R_\alpha(X, L)$.*

2.6. Bezeichnung. Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $\alpha \in$ Ord, $\alpha \geqq 1$. Wir bezeichnen mit $C_\alpha(X, L)$ die Menge aller Konfigurationen vom Rang α der verallgemeinerten Sprache (X, L). Weiter bezeichnen wir $T_\alpha(X, L) = \{x;\ x \in L,\ x = utv,\ u, v \in \mathscr{R}(X),\ t \in C_\alpha(X, L)\}$.

2.7. Lemma. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $\alpha \in$ Ord mit $C_\alpha(X, L) = \emptyset$. Dann gilt $C_\beta(X, L) = \emptyset$ für jede $\beta \in$ Ord, $\beta > \alpha$.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass $C_\alpha(X, L) = \emptyset$ und es $\beta \in$ Ord, $\beta > \alpha$ mit $C_\beta(X, L) \neq \emptyset$ gibt. Wir können annehmen, dass β die kleinste Ordnungszahl mit dieser Eigenschaft ist. Also $C_\xi(X, L) = \emptyset$ für alle $\xi \in$ Ord, $\alpha \leqq \xi < \beta$. Sei $x \in C_\beta(X, L)$, y ein Resultat dieser Konfiguration. Es gilt also $xv(X, L - R_\beta(X, L))$, $x \succ y(X, L -$

$- R_\beta(X, L))$, $y \succ x(X, L)$ und $l(uxv) > l(uyv)$ für alle $u, v \in \mathscr{R}(X)$ mit $uxv \in L - R_\beta(X, L)$. Weil $C_\xi(X, L) = \emptyset$ für $\xi \in \mathrm{Ord}$, $\alpha \leqq \xi < \beta$, haben wir auch $T_\xi(X, L) = \emptyset$ für $\xi \in \mathrm{Ord}$, $\alpha \leqq \xi < \beta$. Daraus folgt $R_\beta(X, L) = \bigcup_{1 \leqq \xi < \beta} T_\xi(X, L) = \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha} T_\xi(X, L) = R_\alpha(X, L)$. Also auch $L - R_\beta(X, L) = L - R_\alpha(X, L)$ und $x \in C_\alpha(X, L)$, was ein Widerspruch mit der Voraussetzung $C_\alpha(X, L) = \emptyset$ ist.

2.8. Lemma. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache. Dann existiert $\alpha \in \mathrm{Ord}$ mit $C_\alpha(X, L) = \emptyset$.*

Beweis. Wählen wir eine Kardinalzahl $\aleph_i$ so, dass card $L \leqq \aleph_i$. Wir beweisen, dass dann $C_{\omega_{i+1}}(X, L) = \emptyset$. Setzen wir voraus $C_{\omega_{i+1}}(X, L) \neq \emptyset$; dann ist nach 2.7. $C_\xi(X, L) \neq \emptyset$ für alle $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi \leqq \omega_{i+1}$. Ist $x \in C_\xi(X, L)$ beliebig, dann ist $xv(X, L - R_\xi(X, L))$. Es existieren also $u, v \in \mathscr{R}(X)$ so, dass $uxv \in L - R_\xi(X, L)$, d. h. $uxv \in L$, $uxv \bar{\in} R_\xi(X, L) = \bigcup_{1 \leqq \eta < \xi} T_\eta(X, L)$. Das bedeutet $uxv \in T_\xi(X, L)$, $uxv \bar{\in} \bigcup_{1 \leqq \eta < \xi} T_\eta(X, L)$ und $T_\xi(X, L) - \bigcup_{1 \leqq \eta < \xi} T_\eta(X, L) \neq \emptyset$ für alle $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi \leqq \omega_{i+1}$. Daraus card $\bigcup_{1 \leqq \xi \leqq \omega_{i+1}} T_\xi(X, L) = \mathrm{card} \bigcup_{1 \leqq \xi \leqq \omega_{i+1}} [T_\xi(X, L) - \bigcup_{1 \leqq \eta < \xi} T_\eta(X, L)] \geqq \aleph_{i+1}$. Da $L \supseteqq \bigcup_{1 \leqq \xi \leqq \omega_{i+1}} T_\xi(X, L)$ ist, haben wir card $L \geqq \aleph_{i+1}$, was ein Widerspruch ist.

2.9. Satz. *Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache. Dann existiert $\alpha \in \mathrm{Ord}$ so, dass $C_\xi(X, L) \neq \emptyset$ für alle $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi < \alpha$ und $C_\xi(X, L) = \emptyset$ für alle $\xi \in \mathrm{Ord}$, $\xi \geqq \alpha$.*

Beweis folgt aus 2.7. und 2.8.

2.10. Bezeichnung. Die Ordnungszahl α aus 2.9. wird mit $\alpha(X, L)$ bezeichnet.

2.11. Bezeichnung. Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache. Wir setzen $C(X, L) = \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha(X, L)} C_\xi(X, L)$, $B(X, L) = L - \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha(X, L)} T_\xi(X, L)$. Die Elemente der Menge $C(X, L)$ werden Konfigurationen der verallgemeinerten Sprache (X, L) genannt, die Elemente der Menge $B(X, L)$ werden konfigurationslose Sätze dieser Sprache genannt.

3. HOMOMORPHISMEN VERALLGEMEINERTEN SPRACHEN

3.1. Bezeichnung. Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Mit f_* bezeichnen wir die Abbildung $\mathscr{R}(X) \to \mathscr{R}(Y)$, die durch f induziert wird, d. h. für $x = (x_\xi; \xi < \alpha) \in \mathscr{R}(X)$ ist $f_*(x) = (f(x_\xi); \xi < \alpha) \in \mathscr{R}(Y)$.

3.2. Bemerkung. Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in \mathscr{R}(X)$. Dann ist $l[f_*(x)] = l(x)$.

3.3. Lemma. *Seien X, Y nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist surjektiv* *(injektiv) dann und nur dann, wenn die induzierte Abbildung* $f_*: \mathscr{R}(X) \to \mathscr{R}(Y)$ *surjektiv (injektiv) ist.*

Beweis. Sei $f: X \to Y$ surjektiv und $y = (y_\xi;\ \xi < \alpha) \in \mathscr{R}(Y)$ beliebig. Wählen wir für jede $\xi \in \text{Ord}$, $\xi < \alpha$ ein $x_\xi \in X$ mit $f(x_\xi) = y_\xi$, was wegen Surjektivität von f möglich ist, und setzen wir $x = (x_\xi;\ \xi < \alpha)$. Dann ist $x \in \mathscr{R}(X)$ und $f_*(x) = y$; also ist $f_*: \mathscr{R}(X) \to \mathscr{R}(Y)$ surjektiv. Ist umgekehrt $f_*: \mathscr{R}(X) \to \mathscr{R}(Y)$ surjektiv und $y \in Y$ beliebig, dann ist nach 1.6. $y = (y) \in \mathscr{R}(Y)$. Also gibt es $(x) = x \in X \subseteq \mathscr{R}(X)$ mit $f(x) = y$ und $f: X \to Y$ ist surjektiv. Ähnlich beweist man Äquivalenz der Injektivität von f und f_*.

3.4. Lemma. *Seien X, Y nichtleere Mengen, $f: X \to Y$ eine Abbildung, $x, y \in \mathscr{R}(X)$. Dann ist $f_*(xy) = f_*(x)f_*(y)$.*

Beweis. Ist $x = (x_\xi; \xi < \alpha)$, $y = (y_\xi; \xi < \beta)$, dann $xy = (t_\xi;\ \xi < \alpha + \beta)$, wo $t_\xi = x_\xi$ für $\xi < \alpha$ und $t_\xi = y_\zeta$ für $\xi = \alpha + \zeta, \zeta < \beta$. Also $f_*(xy) = (f(t_\xi);\ \xi < \alpha + \beta)$ und $f_*(x)f_*(y) = (f(x_\xi); \xi < \alpha)\,(f(y_\xi); \xi < \beta) = (f(t_\xi); \xi < \alpha + \beta)$. Daraus $f_*(xy) = f_*(x)f_*(y)$.

3.5. Lemma. *Seien X, Y, Z nichtleere Mengen, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Abbildungen. Dann gilt $(gf)_* = g_*f_*$.*

Beweis. Sei $x = (x_\xi; \xi < \alpha) \in \mathscr{R}(X)$ beliebig. Dann ist $(gf)_*(x) = (gf(x_\xi); \xi < \alpha) \in \mathscr{R}(Z)$ und $(g_*f_*)(x) = g_*[f_*(x)] = g_*[(f(x_\xi); \xi < \alpha)] = (gf(x_\xi); \xi < \alpha) \in \mathscr{R}(Z)$, also $(gf)_*(x) = (g_*f_*)(x)$.

3.6. Lemma. *Seien X, Y nichtleere Mengen $f: X \to Y$ eine Abbildung, $x \in \mathscr{R}(X)$. Ist $f_*(x) = uv$, wo $u, v \in \mathscr{R}(Y)$, dann existieren $y, z \in \mathscr{R}(X)$ so, dass $f_*(y) = u$, $f_*(z) = v$ und $x = yz$.*

Beweis. Sei $u = (u_\xi;\ \xi < \alpha)$, $v = (v_\xi;\ \xi < \beta)$, dann ist $uv = (w_\xi;\ \xi < \alpha + \beta)$, wo $w_\xi = u_\xi$ für $\xi < \alpha$ und $w_\xi = v_\zeta$ für $\xi = \alpha + \zeta$, $\zeta < \beta$. Da $l(uv) = \alpha + \beta$ ist, gilt nach 3.2. auch $l(x) = \alpha + \beta$, d. h. $x = (x_\xi;\ \xi < \alpha + \beta)$. Die Voraussetzung $f_*(x) = uv$ impliziert $f(x_\xi) = w_\xi$ für $\xi \in \text{Ord}$, $\xi < \alpha + \beta$. Setzen wir $y = (y_\xi;\ \xi < \alpha)$, $z = (z_\xi; \xi < \beta)$, wo $y_\xi = x_\xi$ für $\xi < \alpha$ und $z_\xi = x_{\alpha+\xi}$ für $\xi < \beta$. Dann ist $y, z \in \mathscr{R}(X)$, $yz = x$ und $f_*(y) = u$, $f_*(z) = v$.

3.7. Definition. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, $f: X \to Y$ eine Surjektion. Die Abbildung f heisst ein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Y, M) genau dann, wenn $f_*(L) = M$. Diese Abbildung heisst ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M) genau dann, wenn $f_*^{-1}(M) = L$.*

3.8. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M). Dann ist f ein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Y, M).*

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $f_*^{-1}(M) = L$. Also $f_*(L) = f_*[f_*^{-1}(M)] = M$ und f ist ein schwacher Homomorphismus.

3.9. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein bijektiver schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Y, M). Dann ist f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M).*

Beweis. Nach 3.3. ist $f_* : \mathscr{R}(X) \to \mathscr{R}(Y)$ bijektiv. Nach der Voraussetzung ist $f_*(L) = M$, sodass $f_*^{-1}(M) \supseteq L$. Nehmen wir an, dass $f_*^{-1}(M) \neq L$ und sei $x \in$ $\in f_*^{-1}(M) - L$ beliebig. Dann ist $f_*(x) \in M$ und deshalb existiert ein $y \in L$ mit $f_*(y) =$ $= f_*(x)$. Das ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung, dass f_* bijektiv ist. Deshalb $f_*^{-1}(M) = L$ und f ist ein starker Homomorphismus.

3.10. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M), (Z, N) verallgemeinerte Sprachen, f ein schwacher (starker) Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), g ein schwacher (starker) Homomorphismus (Y, M) auf (Z, N). Dann ist gf ein schwacher (starker) Homomorphismus (X, L) auf (Z, N).*

Beweis. Sind f, g schwache Homomorphismen, dann $f_*(L) = M$, $g_*(M) = N$ und nach 3.5. $(gf)_*(L) = (g_*f_*)(L) = g_*[f_*(L)] = g_*(M) = N$, also ist gf ein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Z, N). Sind f, g starke Homomorphismen, dann $f_*^{-1}(M) = L$, $g_*^{-1}(N) = M$ und wiederum nach 3.5. $(gf)_*^{-1}(N) = (g_*f_*)^{-1}(N) =$ $= f_*^{-1}g_*^{-1}(N) = f_*^{-1}[g_*^{-1}(N)] = f_*^{-1}(M) = L$, also ist gf ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Z, N).

3.11. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M), (Z, N) verallgemeinerte Sprachen, f ein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $g : Y \to Z$ eine solche Surjektion, dass gf ein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Z, N) ist. Dann ist g ein schwacher Homomorphismus (Y, M) auf (Z, N).*

Beweis. Nach der Voraussetzung gilt $f_*(L) = M$ und $(gf)_*(L) = N$. Also $g_*(M) =$ $= g_*[f_*(L)] = (gf)_*(L) = N$ und g ist ein schwacher Homomorphismus (Y, M) auf (Z, N).

3.12. Bemerkung. Seien (X, L), (Y, M), (Z, N) verallgemeinerte Sprachen, g ein schwacher Homomorphismus (Y, M) auf (Z, N) und $f : X \to Y$ eine solche Surjektion, dass gf ein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Z, N) ist. Dann braucht f kein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Y, M) zu sein.

Beispiel. $X = Y = \{a, b\}$, $Z = \{a\}$, $L = \{(a)\}$, $M = \{(a), (b)\}$, $N = \{(a)\}$, $f =$ $= id_X$, $g : Y \to Z$ die einzige mögliche Abbildung. Dann ist $g_*(M) = N$, $(gf)_*(L) =$ $= N$, aber $f_*(L) = \{(a)\} \neq M$.

3.13. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M), (Z, N) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $g : Y \to Z$ eine solche Surjektion, dass gf ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Z, N) ist. Dann ist g ein starker Homomorphismus (Y, M) auf (Z, N).*

Beweis. Nach der Voraussetzung gilt $f_*^{-1}(M) = L$, $(gf)_*^{-1}(N) = f_*^{-1}[g_*^{-1}(N)] =$ $= L$. Daraus folgt $f_*(L) = M$, $(gf)_*(L) = g_*[f_*(L)] = g_*(M) = N$, sodass $g_*^{-1}(N) \supseteq$ $\supseteq M$. Setzen wir voraus, dass $g_*^{-1}(N) \neq M$, d. h. $g_*^{-1}(N) - M \neq \emptyset$. Dann ist

$L = f_*^{-1}[g_*^{-1}(N)] = f_*^{-1}(M \cup [g_*^{-1}(N) - M]) = f_*^{-1}(M) \cup f_*^{-1}[g_*^{-1}(N) - M] = = L \cup f_*^{-1}[g_*^{-1}(N) - M]$, was ein Widerspruch ist, denn $f_*^{-1}[g^{-1}(N) - M]$ ist eine nichtleere, mit $f_*^{-1}(M) = L$ disjunkte Menge. Deshalb $g_*^{-1}(N) = M$ und g ist ein starker Homomorphismus.

3.14. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M), (Z, N) verallgemeinerte Sprachen, g ein starker Homomorphismus (Y, M) auf (Z, N), $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine solche Surjektion, dass gf ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Z, N) ist. Dann ist f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M).*

Beweis. Es gilt $g_*^{-1}(N) = M$, $(gf)_*^{-1}(N) = L$. Daraus $f_*^{-1}(M) = f_*^{-1}[g_*^{-1}(N)] = = (f_*^{-1}g_*^{-1})(N) = (gf)_*^{-1}(N) = L$ und f ist ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M).

4. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN KONFIGURATIONEN HOMOMORPHER SPRACHEN

4.1. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein schwacher Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $x \in \mathcal{R}(X)$. Ist $xv(X, L)$, dann ist auch $f_*(x)\ v(Y, M)$.*

Beweis. Es existieren $u, v \in \mathcal{R}(X)$ mit $uxv \in L$. Dann $f_*(uxv) \in f_*(L) = M$. Aber nach 3.4. ist $f_*(uxv) = f_*(u) f_*(x) f_*(v)$ und $f_*(u), f_*(v) \in \mathcal{R}(Y)$. Deshalb $f_*(x)\ v(Y, M)$.

4.2. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $y \in \mathcal{R}(Y)$, $yv(Y, M)$. Ist $x \in \mathcal{R}(X)$ eine beliebige Kette mit $f_*(x) = y$, dann ist $xv(X, L)$.*

Beweis. Es existieren $u, v \in \mathcal{R}(Y)$ mit $uyv \in M$. Seien $a, b \in \mathcal{R}(X)$ beliebige Ketten mit $f_*(a) = u, f_*(b) = v$; es gibt solche, denn nach 3.3. ist $f_* : \mathcal{R}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{R}(Y)$ surjektiv. Dann $f_*(axb) = f_*(a) f_*(x) f_*(b) = uyv \in M$, woraus $axb \in f_*^{-1}(M) = L$. Also ist $xv(X, L)$.

4.3. Folgerung. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $x \in \mathcal{R}(X)$. Es ist $xv(X, L)$ dann und nur dann, wenn $f_*(x)\ v(Y, M)$.*

4.4. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $x, y \in \mathcal{R}(X)$. Es ist $x \succ y(X, L)$ dann und nur dann, wenn $f_*(x) \succ f_*(y)\ (Y, M)$.*

Beweis. (1) Sei $x \succ y(X, L)$ und seien $u, v \in \mathcal{R}(Y)$ beliebig mit $uf_*(x) v \in M$. Wählen wir $a, b \in \mathcal{R}(X)$ solche, dass $f_*(a) = u, f_*(b) = v$. Dann $f_*(axb) = = f_*(a) f_*(x) f_*(b) = uf_*(x) v \in M$, also $axb \in f_*^{-1}(M) = L$. Daraus folgt $ayb \in L$ und deshalb $f_*(ayb) = f_*(a) f_*(y) f_*(b) = uf_*(y) v \in M$. Es gilt also $f_*(x) \succ \succ f_*(y)\ (Y, M)$.

(2) Sei $f_*(x) \succ f_*(y)\,(Y, M)$ und seien $a, b \in \mathscr{R}(X)$ beliebig mit $axb \in L$. Dann $f_*(axb) = f_*(a) f_*(x) f_*(b) \in M$, woraus $f_*(a) f_*(y) f_*(b) = f_*(ayb) \in M$. Daraus $ayb \in f_*^{-1}(M) = L$ und $x \succ y(X, L)$.

4.5. Satz. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $x, y \in \mathscr{R}(X)$. Die Kette x ist eine Konfiguration vom Rang 1 der verallgemeinerten Sprache (X, L) und y ist ihr Resultat dann und nur dann, wenn $f_*(x)$ eine Konfiguration vom Rang 1 der verallgemeinerten Sprache (Y, M) und $f_*(y)$ ihr Resultat ist.*

Beweis. Nach 4.3. und 4.4. ist $xv(X, L)$ äquivalent mit $f_*(x)\, v(Y, M)$, $x \succ y(X, L)$ äquivalent mit $f_*(x) \succ f_*(y)\,(Y, M)$, $y \succ x(X, L)$ äquivalent mit $f_*(y) \succ f_*(x)\,(Y, M)$. Setzen wir voraus, dass $l(axb) > l(ayb)$ für alle $a, b \in \mathscr{R}(X)$ mit $axb \in L$ und seien $u, v \in \mathscr{R}(Y)$ mit $uf_*(x)\, v \in M$. Wählen wir $a, b \in \mathscr{R}(X)$ solche, dass $f_*(a) = u, f_*(b) = v$. Dann ist $f_*(axb) = f_*(a) f_*(x) f_*(b) = uf_*(x)\, v \in M$, also $axb \in f_*^{-1}(M) = L$. Daraus folgt $l(axb) > l(ayb)$ und nach 3.2. $l[uf_*(x)\, v] = l[f_*(axb)] = l(axb) > l(ayb) = = l[f_*(ayb)] = l[uf_*(y)\, v]$. Setzen wir voraus, dass $l[uf_*(x)\, v] > l[uf_*(y)\, v]$ für alle $u, v \in \mathscr{R}(Y)$ mit $uf_*(x)\, v \in M$ und seien $a, b \in \mathscr{R}(X)$ solche, dass $axb \in L$. Dann $f_*(axb) = f_*(a) f_*(x) f_*(b) \in M$ und daraus $l[f_*(a) f_*(x) f_*(b)] > l[f_*(a) f_*(y) f_*(b)]$. Nach 3.2. folgt daraus $l(axb) = l[f_*(axb)] = l[f_*(a) f_*(x) f_*(b)] > l[f_*(a) f_*(y) f_*(b)] = = l[f_*(ayb)] = l(ayb)$. Also ist x eine Konfiguration vom Rang 1 und y ihr Resultat in (X, L) dann und nur dann, wenn $f_*(x)$ eine Konfiguration vom Rang 1 und $f_*(y)$ ihr Resultat in (Y, M) ist.

4.6. Satz. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $x, y \in \mathscr{R}(X)$, $\alpha \in$ Ord, $\alpha \geqq 1$. Die Kette x ist eine Konfiguration vom Rang α und y ist ihr Resultat in (X, L) dann und nur dann, wenn $f_*(x)$ eine Konfiguration vom Rang α und $f_*(y)$ ihr Resultat in (Y, M) ist.*

Beweis wird mit der transfiniten Induktion durchgeführt. Für $\alpha = 1$ ist die Behauptung richtig nach 4.5. Sei $\alpha \in$ Ord, $\alpha > 1$ und setzen wir voraus, dass diese Behauptung für alle $\xi \in$ Ord, $1 \leqq \xi < \alpha$ richtig ist.

(1) Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $x \in S_\alpha(X, L) \Leftrightarrow f_*(x) \in S_\alpha(Y, M)$ und auch $x \in R_\alpha(X, L) \Leftrightarrow f_*(x) \in R_\alpha(Y, M)$. Daraus folgt $f_*^{-1}[R_\alpha(Y, M)] = R_\alpha(X, L)$, also auch $f_*^{-1}[M - R_\alpha(Y, M)] = L - R_\alpha(X, L)$. Das bedeutet, dass f ein starker Homomorphismus $(X, L - R_\alpha(X, L))$ auf $(Y, M - R_\alpha(Y, M))$ ist.

(2) Seien $x, y \in \mathscr{R}(X)$. Da f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M) und auch $(X, L - R_\alpha(X, L))$ auf $(Y, M - R_\alpha(Y, M))$ ist, folgt aus 4.3. und 4.4.: $xv(X, L - R_\alpha(X, L))$ ist äquivalent mit $f_*(x)\, v(Y, M - R_\alpha(Y, M))$, $x \succ y(X, L - R_\alpha(X, L))$ ist äquivalent mit $f_*(x) \succ f_*(y)\,(Y, M - R_\alpha(Y, M))$, $y \succ x(X, L)$ ist äquivalent mit $f_*(y) \succ f_*(x)\,(Y, M)$.

(3) Setzen wir voraus, dass $l(axb) > l(ayb)$ für alle $a, b \in \mathscr{R}(X)$ mit $axb \in L - - R_\alpha(X, L)$ gilt und seien $u, v \in \mathscr{R}(Y)$ solche, dass $uf_*(x)\, v \in M - R_\alpha(Y, M)$. Wählen wir $a, b \in \mathscr{R}(X)$ solche, dass $f_*(a) = u$, $f_*(b) = v$. Dann $f_*(axb) = uf_*(x)\, v \in M -$

$- R_*(Y, M)$, also $axb \in f_*^{-1}[M - R_*(Y, M] = L - R_*(X, L)$. Daraus $l(axb) > l(ayb)$, was impliziert $l[uf_*(x)\,v] = l[f_*(axb)] = l(axb) > l(ayb) = l[f_*(ayb)] = l[uf_*(y)\,v]$.

(4) Setzen wir voraus, dass $l[uf_*(x)\,v] > l[uf_*(y)\,v]$ für alle $u, v \in \mathscr{R}(Y)$ mit $uf_*(x)\,v \in M - R_*(Y, M)$ gilt und seien $a, b \in \mathscr{R}(X)$ solche, dass $axb \in L - R_*(X, L)$. Dann ist $f_*(axb) = f_*(a)\, f_*(x)\, f_*(b) \in M - R_*(Y, M)$ und es gilt also $l[f_*(a)\, f_*(x)\, f_*(b)] > l[f_*(a)\, f_*(y)\, f_*(b)]$. Daraus $l(axb) = l[f_*(axb)] = l[f_*(a) f_*(x) f_*(b)] > l[f_*(a) f_*(y) f_*(b)] = l[f_*(ayb)] = l(ayb)$.

4.7. Satz. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen. Wenn ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M) existiert, dann ist $\alpha(X, L) = \alpha(Y, M)$.*

Beweis. Sei f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M). Nach 4.6. gilt für $x \in \mathscr{R}(X)$, $\xi \in \mathrm{Ord}$, $\xi > 1$ $x \in C_\xi(X, L)$ genau dann, wenn $f_*(x) \in C_\xi(Y, M)$. Das bedeutet $C_\xi(X, L) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $C_\xi(Y, M) \neq \emptyset$. Deshalb $\alpha(X, L) = \alpha(Y, M)$.

5. KENNZEICHNUNG STARKER HOMOMORPHISMEN VERALLGEMEINERTER SPRACHEN

5.1. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M), $x \in \mathscr{R}(X)$. Es ist $x \in B(X, L)$ dann und nur dann, wenn $f_*(x) \in B(Y, M)$.*

Beweis. (1) Sei $x \in B(X, L)$ und setzen wir voraus, dass $f_*(x) \bar{\in} B(Y, M)$ gilt. Dann ist $f_*(x) \in \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha(Y, M)} T_\xi(Y, M)$, sodass ein $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi < \alpha(Y, M)$ so existiert, dass $f_*(x) \in T_\xi(Y, M)$. Also $f_*(x) = uyv$, wo $u, v \in \mathscr{R}(Y)$, $y \in C_\xi(Y, M)$. Nach 3.6. existieren $a, b, t \in \mathscr{R}(X)$ so, dass $x = atb$, $f_*(a) = u$, $f_*(t) = y$, $f_*(b) = v$. Nach 4.6. ist $t \in C_\xi(X, L)$, also $x \in T_\xi(X, L)$ und das ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung $x \in B(X, L)$. Es gilt also $f_*(x) \in B(Y, M)$.

(2) Sei $x \bar{\in} B(X, L)$. Dann gibt es $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi < \alpha(X, L)$ mit $x \in T_\xi(X, L)$. Das bedeutet $x = atb$, wo $a, b \in \mathscr{R}(X)$, $t \in C_\xi(X, L)$. Dann ist $f_*(x) = f_*(a) f_*(t) f_*(b)$ und nach 4.6. ist $f_*(t) \in C_\xi(Y, M)$. Also $f_*(x) \in T_\xi(Y, M)$ und $f_*(x) \bar{\in} B(Y, M)$.

5.2. Bezeichnung. Sei (X, L) eine verallgemeinerte Sprache, $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi < \alpha(X, L)$. Wir bezeichnen mit $D_\xi(X, L)$ die Menge aller geordneten Paare $[x, y]$, wo $x \in C_\xi(X, L)$ und y ein beliebiges Resultat dieser Konfiguration ist.

5.3. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M). Dann gilt:*

1° $\alpha(X, L) = \alpha(Y, M)$,

2° $x \in B(X, L) \Leftrightarrow f_*(x) \in B(Y, M)$,

3° *Für alle* $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi < \alpha(X, L)$ *ist* $[x, y] \in D_\xi(X, L) \Leftrightarrow [f_*(x), f_*(y)] \in D_\xi(Y, M)$.

Beweis folgt aus 4.7., 5.1. und 4.6.

5.4. Lemma. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, $f: X \to Y$ eine Surjektion, die die Eigenschaften* $1°$, $2°$, $3°$ *aus* 5.3. *hat. Dann ist f ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M).*

Beweis. (1) Wir zeigen die Implikation $x \in L \Rightarrow f_*(x) \in M$ mit der transfiniten Induktion im Bezug auf $l(x)$.

(a) Sei $l(x) = 0$, also $x = \Lambda$. Dann ist $x \in B(X, L)$,[2]) also nach $2°$ $f_*(x) \in$ $\in B(Y, M) \subseteqq M$.

(b) Sei $\beta \in \mathrm{Ord}$, $\beta \geqq 1$ und setzen wir voraus, dass die Implikation $x \in L \Rightarrow$ $\Rightarrow f_*(x) \in M$ für alle $x \in L$ mit $l(x) < \beta$ richtig ist.

Sei $x \in L$, $l(x) = \beta$. Ist $x \in B(X, L)$, dann $f_*(x) \in B(Y, M) \subseteqq M$ nach $2°$. Sei also $x \bar{\in} B(X, L)$, d. h. $x \in \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha(X,L)} T_\xi(X, L)$. Dann gibt es die kleinste Ordnungszahl α, $1 \leqq \alpha < \alpha(X, L)$ mit $x \in T_\alpha(X, L)$. Das bedeutet $x \bar{\in} \bigcup_{1 \leqq \xi < \alpha} T_\xi(X, L) = R_\alpha(X, L)$, also $x \in L - R_\alpha(X, L)$ und $x = uyv$, wo $u, v \in \mathscr{R}(X)$, $y \in C_\alpha(X, L)$ ist. Wenn z ein beliebiges Resultat der Konfiguration y ist, dann gilt nach 2.5. $uzv \in L - R_\alpha(X, L) \subseteq L$, $l(uyv) > l(uzv)$, also $l(uzv) < \beta$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist es $f_*(uzv) =$ $= f_*(u) f_*(z) f_*(v) \in M$. Weiter ist $[y, z] \in D_\alpha(X, L)$, also nach $3°$ $[f_*(y), f_*(z)] \in$ $\in D_\alpha(Y, M)$. Da $f_*(u) f_*(z) f_*(v) \in M$ ist, gilt nach 2.5. $f_*(u) f_*(y) f_*(v) \in M$, d. h. $f_*(uyv) = f_*(x) \in M$.

(2) Wir zeigen die Implikation $f_*(x) \in M \Rightarrow x \in L$ mit der transfiniten Induktion im Bezug auf $l[f_*(x)] = l(x)$.

(a) Sei $l[f_*(x)] = 0$, also $f_*(x) = \Lambda$ und auch $x = \Lambda$. Dann ist $f_*(x) \in B(Y, M)$ und nach $2°$ $x \in B(X, L) \subseteqq L$.

(b) Sei $\beta \in \mathrm{Ord}$, $\beta > 0$ und setzen wir voraus, dass die Implikation $f_*(x) \in M$, $l[f_*(x)] < \beta \Rightarrow x \in L$ richtig ist. Sei $f_*(x) \in M$, $l[f_*(x)] = \beta$. Ist $f_*(x) \in B(Y, M)$, dann $x \in B(X, L) \subseteq L$ nach $2°$. Sei also $f_*(x) \bar{\in} B(Y, M)$. Es gibt die kleinste Ordnungszahl α, $1 \leqq \alpha < \alpha(Y, M)$ mit $f_*(x) \in T_\alpha(Y, M)$. Dann ist $f_*(x) \in M - R_\alpha(Y, M)$ und $f_*(x) = uyv$, wo $u, v \in \mathscr{R}(Y)$, $y \in C_\alpha(Y, M)$ ist. Sei z ein beliebiges Resultat der Konfiguration y; es ist $uzv \in M - R_\alpha(Y, M) \subseteqq M$ und $l(uyv) > l(uzv)$, also $l(uzv) <$ $< \beta$. Nach 3.6. existieren $a, b, t \in \mathscr{R}(X)$ so, dass $f_*(a) = u$, $f_*(t) = y$, $f_*(b) = v$, $atb = x$. Weiter sei $w \in \mathscr{R}(X)$ eine beliebige Kette mit $f_*(w) = z$. Dann ist $f_*(awb) =$ $= uzv \in M$ und nach der Induktionsvoraussetzung auch $awb \in L$. Weiter ist $[y, z] =$ $= [f_*(t), f_*(w)] \in D_\alpha(Y, M)$, also nach $3°$ $[t, w] \in D_\alpha(X, L)$. Da $awb \in L$, folgt daraus $atb = x \in L$.

Wir haben bewiesen: $x \in L \Leftrightarrow f_*(x) \in M$. Also ist $f_*^{-1}(M) = L$ und f ist ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M).

---

[2]) Setzen wir voraus, dass $x \in L - B(X, L)$ ist. Dann gibt es $\xi \in \mathrm{Ord}$, $1 \leqq \xi < \alpha(X, L)$ so, dass $x = \Lambda \in T_\xi(X, L)$. Also $\Lambda = utv$, wo $u, v \in \mathscr{R}(X)$, $t \in C_\xi(X, L)$ ist. Das ist nur dann möglich, wenn $u = v = t = \Lambda$. Also $\Lambda \in C_\xi(X, L)$. Ist y ein beliebiges Resultat dieser Konfiguration, dann $l(u\Lambda v) =$ $= l(u) + l(v) > l(uyv) = l(u) + l(y) + l(v)$ für alle $u, v \in \mathscr{R}(X)$ mit $uxv \in L - R_\xi(X, L)$, was un möglich ist.

5.5. Satz. *Seien (X, L), (Y, M) verallgemeinerte Sprachen, $f: X \to Y$ eine Surjektion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(A) f ist ein starker Homomorphismus (X, L) auf (Y, M).

(B) Es gelten die Bedingungen 1°, 2°, 3° *aus 5.3.*

Beweis folgt aus 5.3. und 5.4.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Dalík J.: *Verbandstheoretische Eigenschaften von Sprachen*, Arch. Math. XII (1976), 31—42.

[2] Dalík J.: *Verbandstheoretische Eigenschaften von Sprachen II*, Arch. Math. XIII (1977), 13—24.

[3] Gladkij A. V.: *Konfiguracionnyje charakteristiki jazykov*, Probl. kib. 10 (1963), 251—260.

[4] Kulagina O. S.: *Ob odnom sposobe opredelenija grammatičeskich ponjatij na baze teorii množestv*, Probl. kib. 1 (1958), 203—214.

[5] Novotný M.: *Bemerkungen über Homomorphismen von Sprachen*, Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně Brno 468 (1965), 509—518.

V. Novák
662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a
Tschechoslowakei