Richard Perko

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen vom Briot-Bouquet'schen Typ

Archivum Mathematicum, Vol. 15 (1979), No. 4, 233--244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107047

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XV: 233—244, 1979

ZUR THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VOM BRIOT—BOUQUET'SCHEN TYP

von RICHARD PERKO

(Eingegangen am Dezember 29. 1977)

EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit werden partielle Differentialgleichungen über **C** untersucht, die sich bei geeignetem Lösungsansatz als zu einem (abzählbar) unendlichen System gewisser Briot Bouquet'scher Differentialgleichungen äquivalent erweisen bzw., abgesehen von Aussagen über die Existenz konvergenter Potenzreihenlösungen, in einigen Fällen Bedingungen angegeben, die für die untersuchten partiellen Differentialgleichungen auch die Existenz von logarithmenbehafteten Lösungen bzw. verallgemeinerten Laurentreihenlösungen zulassen.

Hilfssatz 1. Die Briot Bouquet'sche Differentialgleichung:

$$xy' = by + \sum_{\nu \geqq 1} b_\nu x^\nu \qquad \text{mit} \qquad \sum_{\nu \geqq 1} b_\nu x^\nu$$

konvergent für alle $|x| < \varrho$ besitzt eine für alle $|x| < \varrho$ konvergente Lösung der Form:

$$y = \sum_{\nu \geqq 1} c_\nu x^\nu$$

falls (i) $b \notin \mathbf{N}$ oder (ii) zwar $b \in \mathbf{N}$ aber $b_b = 0$ gilt.

Hilfssatz 2. Die Differentialgleichung vom Briot Bouquet'schen Typ:

$$x^2 y = ay + \sum_{\nu \geqq 1} b_\nu x^\nu \qquad \text{mit} \qquad \sum_{\nu \geqq 1} b_\nu x^\nu$$

konvergent für alle $|x| < \varrho$ besitzt eine im Inneren des Kreises $K_\varrho(0)$ konvergente Lösung

$$y = \sum_{\nu \geqq 1} c_\nu x^\nu$$

genau dann, wenn gilt:

$$b_1 + \frac{b_2 a}{1!} + b_3 \frac{a^2}{2!} + \ldots + b_{n+1} \frac{a^n}{n!} + \ldots = 0.$$

Ferner ergibt sich im Zuge des Beweises:

$$\text{(i)} \qquad c_\nu = -\frac{(\nu-1)!}{a^n}\left(b_1 + b_2 \frac{a}{1!} + \ldots + b_\nu \frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right),$$

$$\text{(ii)} \quad |c_\nu| \leqq \frac{\beta}{\nu} \frac{1}{1 - \frac{|a|\beta}{\nu}} \quad \text{für } \frac{|a|\beta}{\nu} < 1 \text{ bzw. } |b_j| \leqq \beta^j \text{ für alle } j \in \mathbf{N} \ (\beta \in \mathbf{R}^+)$$

Hilfssatz 3. Die Differentialgleichung:

$$-x^2 y' + axy' + by = \sum_{\nu \geqq 1} b_\nu x^\nu \qquad \text{mit } \sum_{\nu \geqq 1} b_\nu x^\nu$$

konvergent in $K_\varrho(0)$, $a \neq 0$ besitzt eine konvergente Potenzreihenlösung

$$y = \sum_{\nu \geqq 1} c_\nu x^\nu,$$

wenn gilt:

$$\frac{\nu}{|a\nu + b|} \leqq M \ (M \in \mathbf{R}^+) \qquad \text{für alle } \nu \in \mathbf{N}.$$

B e w e i s: Der Ansatz $y = \sum_{\nu \geqq 1} c_\nu x^\nu$ führt zu den Gleichungen:

$$c_\nu = \frac{b_\nu}{a\nu + b} + \frac{(\nu-1)\, b_{\nu-1}}{(a\nu+b)(a(\nu-1)+b)} + \ldots$$
$$+ \frac{(\nu-1)!\, b_1}{(a\nu+b)\big(a(\nu-1)+b\big)\ldots(2a+b)(a+b)}$$

somit sind die c_ν (entsprechend der Voraussetzung) eindeutig bestimmt. Betrachtet man $|c_\nu|$ so folgt:

$$|c_\nu| \leqq \frac{1}{|a\nu + b|} \times$$
$$\times \left(c\beta^\nu + \frac{(\nu-1)\, c\beta^{\nu-1}}{|a(\nu-1)+b|} + \ldots + \frac{(\nu-1)!\, c\beta}{|a(\nu-1)+b| \ldots |2a+b|\ |a+b|}\right)$$
$$\leqq \frac{1}{|a\nu+b|} \beta^\nu c \left(1 + \frac{1}{\beta M} + \frac{1}{\beta^2 M^2} + \ldots\right) \leqq c \,.\, \beta^\nu \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta M}} \frac{M}{\nu}$$

wenn man o. B. d. A. $\beta \in \mathbf{R}^+$ derart wählt, daß (i) $|b_j| \leqq c\beta^j$ für alle $j \in \mathbf{N}$ $(c \in \mathbf{R}^+)$ (ii) $\beta M > 1$.

d. h. $y(x)$ konvergiert für alle x mit $|x| < \frac{1}{\beta} \neq 0$.

Im folgenden soll konvergent immer konvergent in einer geeigneten Kugel (mit Radius $\neq 0$) um den Ursprung bedeuten.

Satz 1. *Die partielle Differentialgleichung:*

1.1 $$z_1 w_{z_1} + b z_2 w_{z_2} + c w = d z_1 + e z_2 + F(z_1, z_2, w),$$

für die gilt:

(i) $F(z_1, z_2, w) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma \geqq 2} f_{\alpha,\beta,\gamma} z_1^\alpha z_2^\beta w^\gamma$,

(ii) $F(z_1, z_2, w)$ *konv.*

(iii) $b, d \in \mathbf{C}$; $e, c \in \mathbf{C}$ *besitzt eine zunächst formale Lösung der Gestalt:*

$$y = \sum_{\alpha+\beta \geqq 1} a_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

falls entweder a) $\alpha + b\beta + c \neq 0$ *für alle* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$,

oder b) *sollte der Fall* $\alpha^* + b\beta^* + c = 0$ *für gewisse* $(\alpha^*, \beta^*) \in \mathbf{N}^2$ *auftreten zusätzlich Gleichungen* $Q_{\alpha^*\beta^*} = 0$ *bestehen, (die von den Koeffizienten der Reihenentwicklung der rechten Seite von 1.1 abhängen), deren genaue Gestalt dem Beweis zu entnehmen ist.*

Im Fall a) *ist die formale Lösung eindeutig bestimmt.*

Im Fall b) *hingegen sind die Koeffizienten* $a_{\alpha^*\beta^*}$ *frei wählbar, wobei allerdings das (vorausgesetzte) Bestehen der Gleichungen* $Q_{\alpha^*\beta^*} = 0$ *im allgemeinen mit von der (eventuell) schon zuvor getroffenen Wahl gewisser Koeffizienten abhängt. Die* $a_{\alpha\beta}$ *mit* $\alpha + b\beta + c \neq 0$ *bestimmen sich eindeutig aus der Wahl der* $a_{\alpha^*\beta^*}$ *bzw. den Koeffizieten der Gleichung 1.1. Gilt zusätzlich* $|\alpha + b\beta + c| \geqq M$ $(0 < M;\ M \in \mathbf{R})$ *für alle* (α, β) *mit* $\alpha + b\beta + c \neq 0$, *so konvergiert die formale Lösung, falls, sollte der Fall* b) *auftreten, die durch die frei wählbaren Koeffizienten bestimmte Reihe* (i.e. RAND) *konvergiert.*

Beweis: Reihenansatz liefert:

$$(\nu + b\mu + c)\, c_{\nu\mu} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma \geqq 2} f_{\alpha\beta\gamma} \Big(\sum_{\substack{\Sigma\alpha_i = \nu-\alpha \\ \Sigma\beta_i = \mu-\beta}} c_{\alpha_1\beta_1} \cdots c_{\alpha_\gamma\beta_\gamma} \Big)$$

d. h. falls $(\gamma + b\mu + c) \neq 0$

$$c_{\nu\mu} = (\nu + b\mu + c)^{-1}\, Q_{\nu\mu}.$$

Somit sind die Koeffizienten $c_{\nu\mu}$ rekursiv berechenbar bzw. frei wählbar, falls entweder (i) $\nu + b\mu + c \neq 0$ oder (ii) $\nu + b\mu + c = 0 \wedge Q_{\nu\mu} = 0$ gilt. Sei nun

$$y(z_1, z_2) = \sum_{\alpha+\beta\geqq 1} a_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

formal berechenbar und (nach Voraussetzung)

$$|\alpha + b\beta + c| \geqq M \quad (M > 0) \qquad \text{für alle } (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2 \text{ mit } (\alpha + b\beta + c) \neq 0,$$

dann folgt:

$$My^* = F^*(z_1, z_2 y^*) + MK^*(z_2, z_1)$$

ist ein majorantes Problem zu 1.1, wenn $F^*(z_1, z_2, y)$ eine Majorante der rechten Seite von 1.1 bzw. K^* eine solche für den Rand bedeutet. Da y^* als Lösung eines impliziten Problems konvergiert, folgt die Konvergenz der formalen Lösung.

Bemerkung. Untersucht man die partielle Differentialgleichung

1.2 $$w + \sum_{n,m} a_{nm} z_1^n z_2^m w_{nm} = dz_1 + ez_2 + F(z_1, z_2, w) \qquad (n + m > 0),$$

mit

$$\text{(i) } a_{nm} \in \mathbf{C} \qquad \text{(ii) } w_{nm} = \frac{\partial^n \partial^m}{\partial z_1^n \partial z_2^m} \qquad \text{(iii) } F(z_1, z_2, w)$$

konvergent und setzt:

$$v_{nm}(\alpha, \beta) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)\, \beta(\beta - 1) \ldots (\beta - m + 1),$$

o gilt: eine formale Lösung

$$y = \sum_{\alpha+\beta\geqq 1} a_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

zu 1.2 existiert, falls

entweder a) $N(\alpha, \beta) = 1 + \sum_{n,m} a_{nm} v_{nm}(\alpha, \beta) \neq 0$ für alle $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$,

oder b) falls $(\alpha^*, \beta^*) \in \mathbf{N}^2$ auftreten, sodaß $N(\alpha^*, \beta^*) = 0$ zugleich $Q_{\alpha^*\beta^*} = 0$ erfüllt ist.

Die formale Lösung konvergiert, falls für alle (α, b) mit $N(\alpha, b) \neq 0$ gilt:

$$|N(\alpha, \beta)| \geqq M \qquad (0 < M;\, M \in \mathbf{R}).$$

Satz 2.1. *Über die Potenzreihenlosungen der partiellen Differentialgleichung*

1.3 $$z_1 w_{z_1} + bz_2 w_{z_2} + cw = F(z_1, z_2) = \sum_{\alpha+\beta\geqq 1} f_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta \qquad \textit{mit (i) } F(z_1, z_2)$$

konvergent, gilt genauer:

a) *Eine formale Lösung*

$$y = \sum_{\alpha+\beta\geq 1} a_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

existiert genau dann, wenn entweder $\alpha + b\beta + c \neq 0$ *für alle* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$, *oder falls* (α^*, β^*) *existieren mit* $\alpha^* + b\beta^* + c = 0$ *zusätzlich* $f_{\alpha^*\beta^*} = 0$ *erfüllt ist.*

b) *Diese formale Lösung konvergiert falls es positive Konstante* M_1, M_2 *aus* $\mathbf{R}$ *gibt derart, daß für alle* (α, β) *mit* $\alpha + b\beta + c \neq 0$ *die Abschätzung:*

$$|\alpha + b\beta + c| > M_1^{-\alpha} M_2^{-\beta}$$

besteht bzw. der Rand konvergent gewählt wird.

Beweis. Reihenansatz ergibt:

$$c_{\nu\mu}(\nu + b\mu + c) = f_{\nu\mu}$$

und somit die Aussage a). Gilt b) so folgt im Fall $\nu + b\mu + c \neq 0$

$$|c_{\nu\mu}| = \frac{|f_{\nu\mu}|}{|\nu + b\mu + c|} \leqq |f_{\nu\mu}| M_1^\nu M_2^\mu.$$

Da $F(z_1, z_2)$ konvergiert, existieren positive Konstante C_1, C_2 aus $\mathbf{R}$, sodaß $|f_{\nu\mu}| \leqq \leqq C_1^\nu C_2^\mu$, also konvergiert die formale Lösung bei entsprechender Wahl des Randes.

Satz 2.2. 1.3 *Besitzt eine „verallgemeinerte Laurentreihenlosung" der Gestalt*

$$y = A(z_1, z_2) + \sum_{\nu,\mu} c_{\nu\mu} z_1^\nu z_2^\mu = A + L$$

mit (i)

$$A(z_1, z_2) = \sum_{\alpha+\beta\geq 1} a_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

konvergent und (ii)

$$\nu \text{ vel } \mu \in \mathbf{Z}; \qquad \nu \geqq \nu_0; \qquad \mu \geqq \mu_0; \qquad L \neq 0$$

genau dann, wenn

a) 1.3 *eine konvergente Reihenlösung besitzt und*

b) *eine nicht leere endliche Menge von* $(\nu, \mu) \in \mathbf{Z}^2$ *existiert derart, daß die Gleichung* $\nu + b\mu + c = 0$ *erfüllt ist.*

Beweis. Der Lösungsansatz führt zu Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ bzw. $c_{\nu\mu}$ folgender Bauart:

$$(\alpha + b\beta + c)\, a_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} \qquad \text{für} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$$

bzw. zu

$$(\nu + b\mu + c)\, c_{\nu\mu} = 0 \qquad \text{für } \nu \text{ vel } \mu \in \mathbf{Z}^-$$

d. h. $A(z_1, z_2)$ existiert als konvergente Potenzreihe, wenn 1.3 eine solche Lösung besitzt. Die Koeffizientenmenge $\{c_{\nu\mu}\}$ des „Hauptteils" ist nur dann von $\{0\}$ verschieden, falls gilt $(\nu + b\mu + c) = 0$ für mindestens ein $(\nu, \mu) \in \mathbf{Z}^2$ oder genauer: $c_{\nu\mu} \neq 0 \Leftrightarrow \nu + b\mu + c = 0$. Damit ist 2.2 gezeigt.

Satz 2.3. 1.3 *besitze keine formale Lösung, wohl aber gelte*

$$|\alpha + b\beta + c| \geqq M_1^{-\alpha} M_2^{-\beta} \qquad (0 < M_1, 0 < M_2, M_1 \in \mathbf{R}, M_2 \in \mathbf{R})$$

für alle $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ *mit* $\alpha + b\beta + c \neq 0$.

Behauptung. a) im Fall $1 + b \neq 0$ existiert eine „logarithmenbehaftete Lösung der Form:

$$y = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2) \log z_1 z_2; \qquad A = \sum_{\alpha+\beta \geqq 1} a_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta; \qquad B = \sum_{\alpha+\beta \geqq 1} b_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

mit $A(z_1, z_2)$; $B(z_1, z_2)$ konvergent, wobei genauer gilt:

$$b_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{für alle } (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2 \text{ mit } \alpha + b\beta + c \neq 0, \\ \dfrac{f_{\alpha\beta}}{1 + b} & \text{für alle } (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2 \text{ mit } \alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$$

b) im Fall $1 + b = 0$ existiert keine logarithmenbehaftete Lösung der angegebenen Gestalt.

Beweis. Der Ansatz $y = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2) \log z_1 z_2$ führt unter Ausnutzung der Unabhängigkeit der Potenzen des Logarithmus über dem Ring der formalen Potenzreihen zu den Gleichungen:

$$\text{(i)} \qquad z_1 A_{z_1} + b z_2 A_{z_2} + cA = F - (1 + b) B,$$

$$\text{(ii)} \qquad z_1 B_{z_1} + b z_2 B_{z_2} + cB = 0.$$

Nun gilt: $B \neq 0$, wenn mindestens ein $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ existiert mit $\alpha + b\beta + c = 0$ was nach Voraussetzung erfüllt ist, da 1.3 keine formale Lösung besitzt. Somit gibt es eine formale Potenzreihe

$$B(z_1, z_2) = \sum_{\alpha+b\beta+c=0} b_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta \not\equiv 0$$

mit zunächst frei wählbaren $b_{\alpha\beta} \in \mathbf{C}$ als Lösung von (ii). Betrachtet man die Gleichung (i), so berechnet sich

$$A(z_1, z_2) = \sum_{\alpha+\beta \geqq 1} a_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

formal aus:

$$a_{\alpha\beta}(\alpha + b\beta + c) = f_{\alpha\beta} - (1 + b)\, b_{\alpha\beta}.$$

Für $(\alpha + b\beta + c) \neq 0$ ist nach Konstruktion von $B(z_1, z_2)$ $b_{\alpha\beta} = 0$ also:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{f_{\alpha\beta}}{\alpha + b\beta + c}$$

eindeutig bestimmt.

Für jene (sicher auftretenden) (α^*, β^*) mit $\alpha^* + b\beta^* + c = 0$ ist hingegen $b_{\alpha^*\beta^*} \neq 0$ beliebig wählbar etwa als:

$$b_{\alpha^*\beta^*} = \frac{f_{\alpha^*\beta^*}}{1+b} \neq 0$$

(da keine formale Lösung von 1.3 existiert, gibt es mindestens ein solches (α^*, β^*) mit $f_{\alpha^*\beta^*} \neq 0$.)

Mit dieser Wahl der Koeffizienten $b_{\alpha^*\beta^*}$ folgt:

$$a_{\alpha^*\beta^*}(\alpha^* + b\beta^* + c) = 0 = f_{\alpha^*\beta^*} - (1+b)\frac{f_{\alpha^*\beta^*}}{1+b} = 0.$$

Somit sind die $a_{\alpha\beta}$ auch im Fall $\alpha + b\beta + c = 0$ bestimmbar, wenn auch beliebig aus $\mathbf{C}$ wählbar. D. h. (i) besitzt bei dieser Wahl von

$$B(z_1, z_2) = \sum_{\alpha+b\beta+c=0} \frac{f_{\alpha\beta}}{1+b} z_1^\alpha z_2^\beta$$

eine konvergente Potenzreihenlösung. Da nach Voraussetzung $F(z_1, z_2)$ konvergiert bzw. der Rand konvergent gewählt werden kann (vgl. Satz 2.1) und die durch diese Festsetzung definierte Reihe $B(z_1, z_2)$ ebenfalls konvergiert, existiert eine Lösung der in diesem Satz angegebenen Gestalt. Gibt es umgekehrt eine Lösung der Form

$$y(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2) \log z_1 z_2$$

so muß sich $B(z_1, z_2)$ notwendigerweise wie oben berechnen.

Bemerkung. Versucht man den Ansatz

$$y = A + B_1 \log z_1 z_2 + B_2 \log^2 z_1 z_2 + \ldots + B_n \log^n z_1 z_2$$
$$\text{mit } B_i = \sum_{\alpha+\beta\geqq 1} b_{\alpha\beta}^{(i)} z_1^\alpha z_2^\beta (2 \leqq i \leqq n)$$

ergibt sich ein zu 1.3 äquivalentes (dem Lösungsatz entsprechendes) System partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung der (zunächst nur formalen) $B_i(z_1, z_2)$ folgender Art:

$$(+) \qquad \begin{aligned} z_1 A_{z_1} + b z_2 A_{z_2} + cA &= F - (1+b) B_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ z_1 B_{k_{z_1}} + b z_2 B_{k_{z_2}} + c B_k &= -B_{k+1}(1+b)(k+1) \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ z_1 B_{n_{z_1}} + b z_2 B_{n_{z_2}} + c B_n &= 0 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existiert mindestens ein $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ sodaß $\alpha + b\beta + c = 0$. Somit besitzt $B_n(z_1, z_2)$ die Gestalt:

$$B_n = \sum_{\alpha+b\beta+c=0} b_{\alpha\beta}^{(n)} z_1^\alpha z_2^\beta$$

wobei $b_{\alpha\beta}^{(n)}$ beliebig wählbar $\in$ C. Sei nun $B_n \not\equiv 0$ d. h. es wurde mindestens ein $b_{\alpha\beta}^{(n)} \neq 0$ gewählt. Dann folgt zur Bestimmung der Potenzreihe $B_{n-1}(z_1, z_2)$ das Bestehen der Gleichung:

$$z_1 B_{n-1_{z_1}} + bz_2 B_{n-1_{z_2}} + cB_{n-1} = \sum_{\alpha+b\beta+c=0} b_{\alpha\beta}^{(n)} z_1^\alpha z_2^\beta (1 + b) \,.\, n.$$

Diese partielle Differentialgleichung besitzt nur dann eine formale Lösung in Potenzreihengestalt falls für alle $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^2$ mit $\alpha + b\beta + c = 0$ auch noch $b_{\alpha\beta}^{(n)} = 0$ gilt (vgl. 2.1). Widerspruch! Also notwendigerweise $B_n(z_1, z_2) \equiv 0$. Analog schließt man für alle $B_i(z_1, z_2)$; $(2 \leqq i \leqq n)$ und erhält schließlich als einzig mögliche Gestalt einer logarithmenbehafteten Lösung: $y = A + B \log z_1 z_2$.

Verzichtet man auf die Voraussetzung $1 + b \neq 0$ vereinfacht sich das System zur Bestimmung einer Lösung der Form

$$y = A + B_1 \log z_1 z_2 + \ldots + B_n \log^n z_1 z_2$$

auf:

$$\begin{aligned} z_1 A_{z_1} + bz_2 A_{z_2} &+ cA = F \\ \vdots \qquad\quad & \vdots \\ z_1 B_{k_{z_1}} + bz_2 B_{k_{z_2}} &+ cB_k = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq n) \end{aligned}$$

Da 1.3 nach Voraussetzung keine formale Potenzreihenlösung besitzt folgt, daß kein formales $A(z_1, z_2)$ existiert also keine Lösung der geforderten Gestalt.

Satz 2.4. 1.3 *besitze eine konvergente Potenzreihenlösung, dann gilt:*

(i) *Im Fall* $1 + b = 0$ *existiert eine logarithmenbehaftete Lösung der Gestalt:* $y = A + B_1 \log z_1 z_2 + \ldots + B_n \log^n z_1 z_2$ *mit* $B_i(z_1, z_2)$ *konvergent wobei*: $B_i \not\equiv 0 \Leftrightarrow$ *falls ein* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^2$ *existiert, sodaß* $\alpha + b\beta + c = 0$

(ii) *Im Fall* $1 + b \neq 0$ *existiert keine logarithmenbehaftete Lösung, sodaß* $B_i \not\equiv 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Beweis. ad (i) Der Lösungsansatz ergibt zur Berechnung der B_i bzw. A das folgende partielle Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} z_1 A_{z_1} + bz_2 A_{z_2} &+ cA = F \\ \vdots \qquad\quad & \vdots \\ z_1 B_{k_{z_1}} + bz_2 B_{k_{z_2}} &+ cB_k = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq n) \end{aligned}$$

somit bestimmt sich $A(z_1, z_2)$ (nach Voraussetzung) als konvergente Potenzreihe und die $B_k(z_1, z_2) \not\equiv 0$ als:

$$B_k = \sum_{\alpha+b\beta+c=0} b_{\alpha\beta}^{(k)} z_1^\alpha z_2^\beta$$

mit bei geeigneter Wahl die Konvergenz garantierenden $b_{\alpha\beta}^{(k)} \in$ C, falls mindestens ein (α, β) existiert mit $\alpha + b\beta + c = 0$.

ad (ii) Zur Berechnung der B_k bzw. A besteht das System (+) von Satz 2.3. Analog 2.3 folgt, falls überhaupt eine Lösung der geforderten Gestalt existiert $B_k \equiv 0$ $(1 < k \leqq n)$ bzw.:

$$(\alpha + b\beta + c)\, a_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - (1 + b)\, b_{\alpha\beta}^{(1)}$$

sei $B_1 \not\equiv 0$ d. h. für mindestens ein

$$(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2 \qquad \text{mit } \alpha + b\beta + c = 0 \text{ ist } b_{\alpha\beta}^{(1)} \neq 0,$$

dann gilt für dieses (α, β) (nach Voraussetzung) $f_{\alpha\beta} = 0$ oder

$$a_{\alpha\beta}(\alpha + b\beta + c) = 0 = -(1 + b)\, b_{\alpha\beta} \neq 0.$$

Widerspruch! somit auch $B_1 \equiv 0$.

Bemerkung. Sei $\alpha + b\beta + c \neq 0$ für alle $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ dann folgt:
1.3 besitzt genau dann eine polynomiale Potenzreihenlösung (i.e. $\alpha + \beta < \infty$), wenn $F(z_1, z_2)$ selbst ein Polynom ist.

Bemerkung. Es sei die partielle Differentialgleichung:

1.3 $$z_1 w_{z_1} + b z_2 w_{z_2} + cw = F(z_1, z_2) + L(z_1, z_2)$$

mit

$$L = \Sigma\, l_{\nu\mu} z_1^{\nu} z_2^{\mu};\ \nu \text{ vel } \mu \in \mathbf{Z}^-,\ \nu \geqq \nu_0;\ \mu \geqq \mu_0$$

vorgelegt, dann gilt:

Ist der verallgemeinerte Hauptteil $L(z_1, z_2) \not\equiv 0$ so besitzt 1.3 keine (konvergente) Lösung der Form

$$y = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha+\beta \geqq 1}} a_{\alpha\beta} z_1^{\alpha} z_2^{\beta}.$$

Satz 3. *Die partielle Differentialgleichung*

3.1 $$z_1^2 w_{z_1} - a z_2 w_{z_2} - bw = F(z_1, z_2) = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta} z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$$

mit

(i) ord $F \geqq 1$

(ii) $F(z_1, z_2)$ *konvergent*

(iii) $b, a \in \mathbf{C}$

(iiii) *entweder* $a\nu + b \neq 0$ *für alle* $\nu \in \mathbf{N}$ *oder falls ein* ν *existiert mit* $a\nu + b = 0$ *auch noch* $f_{0\nu} = 0$

(iiiii) $[|a\nu + b| M_1] + 1 - |a\nu + b| M_1 \geqq M^{-\nu} (|f_{\alpha\beta}| \leqq M_1^{\alpha} M_2^{\beta})$ $(M > 0; M \in$ $\in \mathbf{R})$

besitzt genau dann eine konvergente Potenzreihenlösung, wenn gilt:

$$f_{1\nu} + f_{2\nu}\frac{(b+a\nu)}{1!} + f_{3\nu}\frac{(b+a\nu)^2}{2!} + \dots + f_{n+1\nu}\frac{(b+a\nu)^n}{n!} + \dots = 0$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Beweis. Schreibt man

$$F(z_1, z_2) = \sum_{\nu \geqq 0} f_\nu(z_1)\, z_2^\nu + \sum_{\nu \geqq 1} f_{0\nu} z_2^\nu$$

bzw. versucht den Lösungsansatz:

$$y = \sum_{\nu \geqq 0} c_\nu(z_1)\, z_2^\nu + \sum_{\nu \geqq 1} c_{0\nu} z_2^\nu \qquad \text{mit ord } c_\nu(z_1) \geqq 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

so ergibt sich ein zu 3.1 äquivalentes (unendliches) partielles Differentialgleichungssystem der Bauart:

$$\text{(I)} \qquad z_1^2 c_\nu'(z_1) = (a\nu + b)\, c_\nu(z_1) + f_\nu(z_1) \qquad \left(\frac{dc_\nu}{dz_1} = c_\nu'\right),$$

$$\text{(II)} \qquad -a z_2 y_{2 z_2} = b y_2 + \sum_{\nu \geqq 1} f_{0\nu} z_2^\nu \qquad \left(y_2 = \sum_{\nu \geqq 1} c_{0\nu} z_2\right)^\nu$$

(II) besitzt als Briot-Bouquet'sche Differentialgleichung nach Voraussetzung (iiii) eine konvergente Lösung der Form

$$y_2 = \sum_{\nu \geqq 1} c_{0\nu} z_2^\nu .$$

Betrachtet man für ein festes aber beliebiges ν eine Gleichung vom Typ (I), so folgt (vgl. Hilfssatz 2) eine konvergente Potenzreihenlösung existiert genau dann wenn:

$$f_{1\nu} + f_{2\nu}\frac{(b+a\nu)}{1!} + \dots + f_{n+1,\nu}\frac{(a\nu+b)^n}{n!} + \dots = 0,$$

d. h. die Voraussetzung ist notwendig bzw. alle $c_\nu(z_1)$ konvergent und zwar mindestens dort, wo alle $f_\nu(z_1)$ gemeinsam konvergieren. Nach Hilfssatz 2 berechnen sich die Koeffizienten dieser Potenzreihenlösung für ein festes ν aus:

$$c_{n\nu} = -\frac{(n-1)!}{(a\nu+b)^n}\left(f_{1\nu} + f_{2\nu}\frac{a\nu+b}{1!} + \dots + f_{n\nu}\frac{(a\nu+b)^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Somit gilt für $n \leqq M_1 \,|\, a\nu + b \,|$ mit $|f_{\alpha\beta}| \leqq M_1^\alpha M_2^\beta$

$$|c_{n\nu}| \leqq \frac{(n-1)!}{|(a\nu+b)^n|}\left(|f_{1\nu}| + |f_{2\nu}|\frac{|a\nu+b|}{1!} + \dots + |f_{n\nu}|\frac{|a\nu+b|^{n-1}}{(n-1)!}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{(n-1)!}{|a\nu+b|^n} M_2^\nu M_1\left(1 + M_1\frac{|a\nu+b|}{1!} + \dots + M_1^{n-1}\frac{|a\nu+b|^{n-1}}{(n-1)!}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{(n-1)!}{|a\nu+b|^n} M_2^\nu M_1 e^{M_1|a\nu+b|} \leqq M_2^\nu e^{M_1|a\nu+b|} M_1 M_1^n \leqq N_1^n N_2^\nu$$

mit geeignetem $0 < N_1$, $0 < N_2$; $N_1 \in \mathbf{R}$, $N_2 \in \mathbf{R}$.

Nach Hilfssatz 2 gilt weiter:

$$|c_{n\nu}| \leqq \frac{M_1^n}{n} \frac{1}{1 - \frac{|a\nu+b| M_1}{n}},$$

für $|a\nu + b| M_1 < n$ somit

$$|c_{n\nu}| \leqq \frac{M_1^n}{n - |a\nu+b| M_1} \leqq \frac{M_1^n}{[|a\nu+b| M_1] + 1 - |a\nu+b| M_1} \leqq M_1^n M^\nu$$

nach Voraussetzung.

D. h. für beliebige $(n, \nu) \in \mathbf{N}^2$ besteht die Ungleichung:

$$|c_{n\nu}| \leqq c_1^n c_2^\nu \qquad \text{mit: } c_1 = \max\{M_1, N_1\} \text{ bzw. } c_2 = \max\{M, N_2\}$$

also konvergiert die Potenzreihenlösung.

Satz 4. *Vorgelegt sei die partielle Differentialgleichung*

4.1 $-z_1^2 w_{z_1} + a z_1 w_{z_1} + b z_2 w_{z_2} + cw = F(z_1, z_2)$ mit (i) $\operatorname{ord} F \geqq 1$ (ii) $a, b, c \in \mathbf{C}$ (iii) $F(z_1, z_2) = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$ *konvergent.*

Behauptung. 4.1 besitzt eine konvergente Potenzreihenlösung der Form:

$$y = \sum_{\alpha+\beta \geqq 0} c_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

falls:

a) $\dfrac{n}{|an + b\nu + c|} \leqq M$ für alle $(n, \nu) \in \mathbf{N}^2$; $M \in \mathbf{R}^+$,

b) $-\dfrac{c}{b} \notin \mathbf{N}$ oder falls $-\dfrac{c}{b} \in \mathbf{N}$, auch noch gilt: $f_{0\frac{c}{b}} = 0$, sofern $b \neq 0$.

Beweis. Sei

$$F(z_1, z_2) = \sum_{\nu \geqq 0} f_\nu(z_1) z_2^\nu + \sum_{\nu \geqq 1} f_{0\nu} z_2^\nu \qquad (\operatorname{ord} f_\nu \geqq 1),$$

dann führt der Lösungsansatz

$$y = \sum_{\nu \geqq 0} c_\nu(z_1) z_2^\nu + \sum_{\nu \geqq 1} c_{0\nu} z_2^\nu = \sum_{\nu \geqq 0} c_\nu(z_1) z_2^\nu + y_2(z_2),$$

zum zu 4.1 äquivalenten System partieller Differentialgleichung:

$$\text{(I)} \qquad -z_1^2 c_\nu'(z_1) + a z_1 c_\nu'(z_1) + (b\nu + c) c_\nu(z_1) = f_\nu(z_1) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\text{(II)} \qquad b z_2 y_2(z_2)_{z_2} = -c y_2(z_2) + \sum_{\nu \geqq 1} f_{0\nu} z_2^\nu.$$

(II) besitzt als Briot-Bouquet'sche Differentialgleichung auf Grund der Voraussetzung b) eine konvergente Reihenlösung.

(I) besitzt nach Hilfssatz 3 zu festem aber beliebigem ν eine konvergente Lösung falls

$$\frac{n}{|an + b\nu + c|} \leq M$$

für alle $(n, \nu) \in \mathbb{N}^2$. Somit ist für beliebiges $\nu c_\nu(z_1)$ in einer geeigneten (festen) Umgebung von 0 konvergent.

Dieses $c_\nu(z_1)$ schreibt sich als

$$c_\nu = \sum_{n \geq 1} c_{n\nu} z_1^n$$

wobei auf Grund der Berechnung (vgl. HS. 3) für $|c_{n\nu}|$ gilt:

$$|c_{n\nu}| \leqq \frac{M}{n} \frac{M_1^n}{1 - \dfrac{1}{MM_1}} M_2^\nu \qquad (|f_{\alpha\beta}| \leqq M_1^\alpha M_2^\beta;\ \text{o. } B. \text{ d. } A.\ M_1 M > 1).$$

Also konvergiert die Potenzreihenlösung.

LITERATUR

[1] Reich, L.: *Über regulär-singuläre Stellen von Lösungen einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen.* Berichte der mathematisch-statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz Nr. 3 (1973).

[2] Gronau, D. und Reich, L.: *Über Existenz und Eindeutigkeit von regulären Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen bei Vorgabe konvergenter Potenzreihenränder.* Mathematica Balcanica 1973.

[3] Bieberbach, L.: *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.* 2. Auflage Springer Verlag Berlin 1965.

[4] Gronau, D.: *Über regulär-singuläre logarithmenbehaftete Lösungen einer Klasse partieller Differentialgleichungen im Komplexen.* Mathematica Balcanica 4 (1974).

[5] Bungartz, P. und Reich, L.: *Holomorphe Integrale bei parameterabhängigen Briot-Bouquet'schen Differentialgleichungen,* Ber. Math. Datenverarbeitung Bonn 57 (1972).

[6] Bungartz, P.: *Über singuläre Stellen analytischer Differentialgleichungen mit holomorph einmündenden Integralen.* Mathematisches Institut der Universität Bonn 1969.

[7] Reich, L.: *Holomorphe Integrale verallgemeinerter Briot-Bouquet'scher Differentialgleichungen,* Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturw. Klasse Abt. II, 176 (1976).

R. Perko
Math. Inst. der Univ. Graz
Graz, Brandhofg. 18
Austria