Archivum Mathematicum

Helmut Jürgensen

Disjunktive Teilmengen inverser Halbgruppen

Archivum Mathematicum, Vol. 15 (1979), No. 4, 205--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107043

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XV: 205—208, 1979

DISJUNKTIVE TEILMENGEN INVERSER HALBGRUPPEN

H. JÜRGENSEN

(Eingegangen am 20. Februar 1978)

In dieser Note nehmen wir das in [1, 3, 4, 6, 7] für (auch unendliche) Halbverbände und für endliche Halbverbände von Gruppen behandelte Problem, die disjunktiven Teilmengen von Halbgruppen zu finden, wieder auf. Wir geben ein hinreichendes Kriterium dafür, daß eine inverse Halbgruppe eine disjunktive Teilmenge besitzt; diesem Kriterium genügen beispielsweise alle endlichen inversen Halbgruppen. Umgekehrt bleibt jedoch die Charakterisierung der Familie aller disjunktiven Teilmengen einer inversen Halbgruppe eine offene Frage.

Eine Teilmenge D einer Halbgruppe S heißt disjunktiv, wenn die gröbste Kongruenz ϱ_D auf S, die D saturiert, die Diagonale ist. $\Delta(S)$ sei die Menge der disjunktiven Teilmengen von S. Zu $s \in S$ sei H_s die $\mathscr{H}$-Klasse von s. $E(S)$ sei die Menge der idempotenten Elemente von S.

Das Problem, $\Delta(S)$ zu charakterisieren, wurde — mehr oder minder befriedigend — für die folgenden Fälle gelöst: Falls S eine Gruppe ist, ist $\Delta(S) \neq \emptyset$, und $D \in \Delta(S)$ ist nicht Vereinigung von Restklassen nach einem echten Normalteiler; falls S Halbverband ist, ist $\Delta(S)$ z. B. dann nicht leer, wenn S einer recht schwachen Endlichkeitsbedingung für die absteigenden Ketten genügt [1]; dies ist in [3, 4] zum Teil auf endliche Halbverbände von Gruppen verallgemeinert; eine Charakterisierung von $\Delta(S)$ für den Fall, daß S eine Rechteckhalbgruppe von Gruppen ist, wurde von E. Milito angegeben. Als kleinen weiteren Schritt behandeln wir hier die inversen Halbgruppen. Man ist allerdings noch weit davon entfernt, $\Delta(S)$ für beliebige Halbgruppen S zu charakterisieren; nicht einmal die Frage, wann $\Delta(S) \neq \emptyset$ ist, hat bislang eine befriedigende Antwort gefunden.

1. Satz. *S sei eine inverse Halbgruppe. Es gilt:*

$$\Delta(E(S)) \neq \emptyset \Rightarrow \Delta(S) \neq \emptyset.$$

Beweis: Sei $D_E \in \Delta(E(S))$. Für $e \in E(S)$ sei $D_e \in \Delta(H_e)$ mit $e \in D_e \leftrightarrow e \in D_E$. Sei $D_0 \subseteq S$ mit $D_0 \cap H_e = \emptyset$ für alle $e \in E(S)$, und sei $D = D_0 \cup \bigcup_{e \in E(S)} D_e$. Wegen $D_E =$

$= D \cap E(S)$ trennt ϱ_D die idempotenten Elemente. Für $e \in E(S)$ ist also die ϱ_D-Klasse ein Normalteiler von H_e, und zwar die Einsuntergruppe wegen $D \cap H_e = D_e$. Als Kongruenz einer inversen Halbgruppe ist ϱ_D daher die Diagonale.

Aus Spezialfällen von [1] bekommt man beispielsweise

2. Korollar. S sei eine inverse Halbgruppe. Falls alle absteigenden Ketten von $E(S)$ endlich sind, ist $\Delta(S) \neq \emptyset$. Insbesondere ist jede endliche inverse Halbgruppe syntaktische Halbgruppe einer rationalen Sprache.

[1] gibt weitere, allgemeinere, jedoch kompliziertere Kriterien für $\Delta(E(S)) \neq \emptyset$, also $\Delta(S) \neq \emptyset$. Wir wissen nicht, ob sich Satz 1 umkehren läßt, vermuten es aber. Sicher ist allerdings, daß die Konstruktion des Beweises nicht immer ganz $\Delta(S)$ liefert.

3. Beispiel. $S = \langle a, b \mid ab = 1 \rangle$ sei die bizyklische Halbgruppe. Vom Standpunkt der formalen Sprachen ist S als syntaktisches Monoid der Dycksprache D_1 besonders interessant. Mit [1] folgt $\Delta(E(S)) = \{E_0, E_1\}$ mit $E_i = \{b^{2k+i}a^{2k+i} \mid k = 0, 1, \ldots\}$. Die Konstruktion liefert also nur die Mengen $D_0 \cup E_i$ mit $D_0 \subseteq S \backslash E(S)$. Andererseits ist eine Menge $M \subseteq S$ genau dann nicht disjunktiv, wenn sie Vereinigung von Mengen der Form

$$\{b^n a^{n+i} \mid n = 0, 1 \ldots\} \qquad \text{und} \qquad \{b^{n+i} a^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$$

für $i = 0, 1, \ldots$ ist. Durch geeignete Wahl einer echten und „co-echten" Menge $E \subseteq E(S)$ kann man also Mengen $D \in \Delta(S)$ mit $D \cap E(S) = E$ finden, die unter dem syntaktischen Morphismus Bilder nichtrationaler Sprachen aus beliebigen Klassen der Chromsky-Hierarchie sind. Speziell die obigen E_i sind Bilder algebraischer Sprachen. Ähnliche Überlegungen gelten für die zu den Dyck-Sprachen D_i' mit $i > 1$ gehörigen polyzyklischen Halbgruppen.

Nicht einmal für den Fall, daß S ein endlicher Halbverband von Gruppen ist, erhält man mit der Konstruktion des Beweises von Satz 1 alle disjunktiven Teilmengen von S (in [3, 4] wird $\Delta(S)$ im Gegensatz zu [1] für Halbverbände nicht charakterisiert):

4. Beispiel. S sei der Halbverband

$$(Y, \{S_\alpha\}_{\alpha \in Y}, \{\varphi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \geqq \beta})$$

von Gruppen mit

$$Y = \{0, 1\}, \qquad 00 = 01 = 10 = 0, \qquad 11 = 1,$$

$$S_0 = \{b^0, b^1, b^2, b^3\} \cong \mathbf{Z}_4,$$

$$S_1 = \{a^0, a^1\} \cong \mathbf{Z}_2,$$

$$\varphi_{11} = id_{\mathbf{Z}_2},$$

$$\varphi_{00} = id_{\mathbf{Z}_4},$$

$$\varphi_{10}\colon a^0 \mapsto b^0, a^1 \mapsto b^2.$$

Die Menge $D = \{a^0, a^1, b^0\}$ ist in S disjunktiv, jedoch ist $D \cap E(S) = \{a^0, b^0\}$ nicht in $E(S) = \{a^0, b^0\}$ und $D_{a^0} = D \cap S_1 = \{a^0, a^1\}$ nicht in $H_{a^0} = S_1$ disjunktiv. Die Disjunktivität von D folgt aus $a^0a^1 = a^1 \in D$, $b^0a^1 = b^2 \in D$, $a^1a^1 = a^0 \in D$, $b^0a^0 = b^0 \in D$ und aus der Disjunktivität von $D_{b^0} = D \cap S_0 = \{b^0\}$ in $H_{b^0} = S_0$.

Einige Anmerkungen zur Umkehrung von Satz 1 findet man in [2].

LITERATUR

[1] Jürgensen, H.: *Inf-Halbverbände als syntaktische Halbgruppen.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. *31* (1978), 37–41.

[2] Jürgensen, H.: *Syntaktische Halbgruppen.* Proc., 1st workshop-meeting on categorical and algebraic methods in computer science and system theory, Herdecke, 1976. Bericht 37, Abteilung Informatik, Universität Dortmund.

[3] Lallement, G., und E. Milito: *Recognizable languages and finite semilattices of groups.* Semigroup Forum *11* (1975), 181—184.

[4] Maxson, C. J., und M. Zeller: *Elementary Γ-languages and finite semilattices of groups.* Semigroup Forum *13* (1976/77), 385—386

[5] Milito, E.: *Persönliche Mitteilung.*

[6] Zapletal, J.: *Distinguishing subsets of semilattices.* Arch. Math. (Brno) *9* (1973), 73—83.

[7] Zapletal, J.: *On the characterization of semilattices satisfying the descending chain condition and some remarks on distinguishing subsets.* Arch. Math. (Brno) *10* (1974), 123—128.

H. Jürgensen
Institut für theoretische Informatik
Technische Hochschule Darmstadt
Magdalenenstraße 11
D — 6100 Darmstadt