Peter Heinrich; Günter Schaar

Zur Charakterisierung von Graphen mit p-hamiltonscher $(p+1)$-ter Potenz im Falle $p=3$

Archivum Mathematicum, Vol. 15 (1979), No. 3, 155--170

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107036`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XV: 155—170, 1979

ZUR CHARAKTERISIERUNG VON GRAPHEN MIT p-HAMILTONSCHER ($p + 1$)-ter POTENZ IM FALLE $p = 3$

PETER HEINRICH und GÜNTER SCHAAR, Freiberg/Sa.

(Eingegangen am 10. August 1977)

1. PROBLEMSTELLUNG

Alle betrachteten Graphen seien endlich, schlicht, ungerichtet und – sofern nichts anderes gesagt wird – auch nichtleer. Hinsichtlich der Bezeichnungen halten wir uns an die in [2] vereinbarten. Dort wird in Verallgemeinerung zu [1] gezeigt, daß für $p \geqq 2$ die ($p + 1$)-te Potenz G^{p+1} für einen zusammenhängenden Graphen G mit $|G| \geqq p + 2$ stets ($p - 1$)-hamiltonsch ist. Das legt die Frage nahe, welche zusätzlichen Forderungen man an einen zusammenhängenden Graphen G stellen muß, damit G^{p+1} sogar p-hamiltonsch ist. Nachdem in [7] bzw. [9] das Charakterisierungsproblem für Graphen mit p-hamiltonscher ($p + 1$)-ter Potenz in den Fällen $p = 2$ bzw. $p \geqq 4$ vollständig beantwortet worden ist, wird in der vorliegenden Arbeit der noch ausstehende Fall $p = 3$ untersucht und ein entsprechender Charakterisieungssatz bewiesen.

2. DEFINITIONEN UND HILFSSÄTZE

Im folgenden sei G ein zusammenhängender Graph; $a_1, \ldots, a_p$ seien Knoten von G ($p \geqq 1$). Wir stellen zunächst einige teilweise bereits in [2], [6], [7], [9] eingeführte Begriffe und Bezeichnungen zusammen. Bilden die sämtlichen Knoten und Kanten eines Untergraphen N in einer gewissen Reihenfolge einen Weg in G, so soll auch N selbst ein Weg in G genannt werden. Einen zusammenhängenden vollen Untergraphen N von G bezeichnen wir kurz als *Netz* in G. Die (zusammenhängenden) Komponenten des von $a_1, \ldots, a_p$ erzeugten Untergraphen U von G nennen wir die *Netzbestandteile* der Knoten $a_1, \ldots, a_p$ in G. Jeder derartige Netzbestandteil ist ein Netz in G; folglich besteht U aus einem einzigen Netzbestandteil genau dann, wenn $a_1, \ldots, a_p$ in G ein Netz erzeugen.

Eine Kante k von G heißt eine *nichttriviale Brücke* von G genau dann, wenn G durch Streichen von k (unter Beibehaltung der Endknoten von k) in genau zwei Komponenten zerfällt, von denen jede mindestens zwei Knoten enthält.

Ein Knoten a von G wird ein *reiner Brückenknoten* von G genannt genau dann, wenn jede mit a in G inzidierende Kante eine nichttriviale Brücke von G ist.

Ein Untergraph N soll eine *p-Brücke* von G heißen genau dann, wenn gilt:

1. N ist ein Weg in G mit $|N| = p + 1$.
2. Jeder innere Knoten von N hat in G die Valenz 2.
3. Jede Kante von N ist eine nichttriviale Brücke in G.

(Eine p-Brücke ist offenbar erst recht ein Netz von G.)

Ein zusammenhängender *Graph* G heißt bezüglich des geordneten Paares $(\{a, b\}, y)$ *vom Typ* 1 genau dann, wenn gilt:

1. a, b, y sind paarweise verschiedene Knoten von G, die einen Weg in G erzeugen, dessen innerer Knoten y ist.
2. a, b, y sind reine Brückenknoten des Grades 2 in G.

Ein zusammenhängender *Graph* G heißt bezüglich des geordneten Paares $(\{a, b\}, y)$ *vom Typ* 2 genau dann, wenn gilt:

1. a, b, y sind paarweise verschiedene Knoten von G, die einen Weg in G erzeugen, wobei y sogar ein Endknoten von G ist.
2. Der innere Knoten dieses Weges hat den Grad 2 in G.

Sind U_1, U_2 zwei knotenfremde Untergraphen eines zusammenhängenden Graphen G, so bedeute $G(U_1, U_2)$ die folgende Knotenmenge:

$G(U_1, U_2) \underset{Df}{=} \{a \in U_1\colon$ es gibt ein $b \in U_2$ mit $g(a, b) = 1\}$, wobei g die Abstandsfunktion von G ist.

Hilfssatz 1. *Es sei G ein zusammenhängender Graph mit $m \geqq 2$ Knoten, und es werde vorausgesetzt, daß die Knoten $a_1, \ldots, a_q$ mit $1 \leqq q < m$ ein Netz N in G erzeugen. Nach dem Streichen von $a_1, \ldots, a_q$ in G sollen die entstehenden $s \geqq 1$ Komponenten von G mit $Z_1, \ldots, Z_s$ bezeichnet werden. Dann gilt:*

Ist $x_i \in G(Z_i, N)$ $(i = 1, s)$ und $x'_s \in Z_s(x_s)$,[1] *so existiert in $G^k - N$ ein hamiltonscher Weg von x_1 nach x'_s, wobei $k = d(N) + 3$ und $d(N)$ der Durchmesser von N ist.*

Hilfssatz 1 ist eine Verschärfung und Verallgemeinerung des in [2] nur für Bäume ausgesprochenen Satzes 1, Teil 1. Der Beweis läßt sich mit trivialen Änderungen übernehmen.

Hilfssatz 2. *Ist k eine Kante in einem zusammenhängenden Graphen G und sind a, b zwei verschiedene Knoten in G, von denen im Falle $|G| \geqq 3$ höchstens einer mit k inzidiert, so existieren in G zwei verschiedene Knoten a' und b' mit den Eigenschaften*

---

[1]) $Z_s(x_s)$ bezeichnet im Falle $|Z_s| \geqq 2$ die Menge aller Nachbarn von x_s im Graphen Z_s und im Falle $|Z_s| = 1$ die Einermenge $\{x_s\}$ (vgl. [2]).

a) $g(a, a') + g(b, b') \leqq \varrho$,

b) *es gibt einen hamiltonschen Weg in G^3, der b' mit a' verbindet und die Kante k enthält.*

Den Beweis dieses Satzes findet man in [6]. Wir beweisen nun mit Hilfssatz 3 eine Verallgemeinerung des Hilfssatzes 2.

Hilfssatz 3. *Es sei G ein zusammenhängender Graph mit $m \geqq 4$ Knoten; a, b, z_1, z_2 seien beliebige Knoten in G mit $a \neq b$ und $\{a, b\} \cap \{z_1, z_2\} = \emptyset$. Dann gibt es in G Knoten a^+, b^+, y_1, y_2, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

$g(a^+, a) + g(b^+, b) \leqq 1$;
$1 \leqq g(y_i, z_i) \leqq 2$ für $i = 1, 2$;
$\{y_1, z_1\} \neq \{y_2, z_2\}$ im Falle $z_1 \neq z_2$;
in G^4 existiert ein hamiltonscher Weg w, der a^+ mit b^+ verbindet und die Kanten $(y_1 z_1)$ und $(y_2 z_2)$ enthält.

Beweis: Ist $z_1 = z_2$, so benutzen wir Hilfssatz 2. Dazu wählen wir ein $y_1 \in G(z_1)$. Es ist $y_1 \neq z_1$ wegen $|G| \geqq 4$. Da a, b von z_1 verschieden sind, inzidiert höchstens einer der Knoten a, b mit der Kante $(y_1 z_1)$. Damit sind alle Voraussetzungen des zitierten Satzes erfüllt, und er liefert mit $y_2 = y_1$ unsere Behauptung.

Wir können damit $z_1 \neq z_2$ annehmen. Der Knoten z_2 werde in G gestrichen. Die dabei entstehenden Komponenten von G bezeichnen wir mit $Z_1, \ldots, Z_s$ ($s \geqq 1$). Weiter sei $x_i \in G(Z_i, z_2)$ und $x'_i \in Z_i(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, s$. Wir dürfen o. B. d. A. annehmen, daß die Knoten a und z_1 in Z_1 liegen. (Dies läßt sich durch eventuelle Vertauschung der Rollen und Bezeichnungen für z_1, z_2 und eventuelle Umnumerierung der Z_i stets erreichen.)

1. Es sei $b \in Z_1$; damit ist $|Z_1| \geqq 3$. Wir wählen einen Knoten $y'_1 \in Z_1(z_1)$. Die Kante $(y'_1 z_1)$ inzidiert mit höchstens einem der Knoten a, b. Damit existiert in Z_1^3 ein die Kante $(y'_1 z_1)$ enthaltender hamiltonscher Weg, der a^+ mit b^+ verbindet; dabei ist $g(a^+, a) + g(b^+, b) \leqq 1$. Es sei w_1 dieser Weg; wir dürfen dabei annehmen, daß w_1 durch die Folge

$$w_1 = a^+(\ldots y'_1(y'_1 z_1)\, z_1 \ldots)\, b^+$$

repräsentiert wird, denn a und b sind jetzt gleichberechtigt und können, falls erforderlich, umbenannt werden.

Weiter sei, falls $s > 2$ ist, $w_i = x'_i(\ldots)\, x_i$ ein hamiltonscher Weg in Z_i^3 für $i = 2, \ldots, s$; durch Aneinanderfügen von $w_2, \ldots, w_s$ wird der Weg $w_0 = x'_2(\ldots)\, x_s$ in $G^3 - \{z_2\}$ gebildet. w_0 ist sogar ein hamiltonscher Weg in $(G - Z_1)^3 - \{z_2\}$, also erst recht in $(G - Z_1)^4 - \{z_2\}$.

Wir betrachten nun den Knoten $x_1 \in w_1$.

a) Ist x_1 kein Endknoten von w_1, so hat x_1 auf w_1 zwei Nachbarn $p, q \neq p$ mit $g(x_1, p) \leqq 3$ und $g(x_1, q) \leqq 3$, denn w_1 wurde in Z_1^3 gebildet. Nun kann höchstens eine der Kanten $(x_1 p)$, $(x_1 q)$ auf w_1 mit der Kante $(y'_1 z_1)$ zusammenfallen. Damit darf o. B. d. A. stets $\{y'_1, z_1\} \neq \{x_1, p\}$ angenommen werden (also $(y'_1 z_1) \neq (x_1 p)$). Wegen $g(x_1, x'_2) \leqq 3$ und $g(p, z_2) \leqq 4$ existieren in G^4 die Kanten $(x_1 x'_2)$ und $(p z_2)$.

Wir bilden nun

$$\bar{w} = \begin{cases} p(pz_2)\, z_2(z_2 x_1)\, x_1 = p(\ldots)\, x_1 & \text{für } s = 1 \\ p(pz_2)\, z_2(z_2 x_s)\, w_0^{-1}(x'_2 x_1)\, x_1 = p(\ldots)\, x_1 & \text{für } s \geqq 2 \end{cases}$$

– es ist $g(z_2, x_s) = 1$ – und ersetzen in w_1 die Folge $p(px_1)\, x_1$ bzw. $x_1(x_1 p)\, p$ durch die Folge $\bar{w}$ bzw. $\bar{w}^{-1}$; es entsteht der Weg $w = a^+(\ldots\bar{w}\ldots)\, b^+$ bzw. $w = a^+(\ldots\bar{w}^{-1}\ldots)\, b^+$.

w ist dann ein hamiltonscher Weg in G^4, der die Kanten $(y'_1 z_1)$ und $(x_s z_2)$ enthält. Wegen $g(a^+, a) + g(b^+, b) \leqq 1$ und $g(y'_1, z_1) = 1 = g(x_s, z_2)$ erfüllt w alle im Satz gestellten Forderungen, falls wir $y_1 = y'_1$ und $y_2 = x_s$ wählen; denn offensichtlich ist auch $\{y_1, z_1\} \neq \{y_2, z_2\}$.

b) Es sei x_1 ein Endknoten von w_1 (d. h. entweder $x_1 = a^+$ oder $x_1 = b^+$). Der Nachbar von x_1 auf w_1 heiße p; damit ist $g(x_1, p) \leqq 3$. Wir bilden

$$\bar{w} = \begin{cases} x_1(x_1 z_2)\, z_2(z_2 p)\, p = x_1(\ldots)\, p & \text{für } s = 1 \\ x_1(x_1 x_s)\, w_0^{-1}(x'_2 z_2)\, z_2(z_2 p)\, p = x_1(\ldots)\, p & \text{für } s \geqq 2; \end{cases}$$

dabei ist $g(z_2, p) \leqq 4$; $g(x_1, x_s) = 2$; $g(x'_2, z_2) \leqq 2$; also $\bar{w}$ in G^4 bildbar. Wir ersetzen in w_1 die Folge $x_1(x_1 p)\, p$ bzw. $p(px_1)\, x_1$ – je nachdem, ob $x_1 = a^+$ bzw. $x_1 = b^+$ eintritt – durch $\bar{w}$ bzw. $\bar{w}^{-1}$ und erhalten einen hamiltonschen Weg w in G^4.

Ist $\{x_1, p\} \neq \{y'_1, z_1\}$, so setzen wir $y_2 = x_1$ für $s = 1$ bzw. $y_2 = x'_2$ für $s \geqq 2$ und in jedem Falle $y_1 = y'_1$. Damit ist $\{y_1, z_1\} \neq \{y_2, z_2\}$.

Ist $\{x_1, p\} = \{y'_1, z_1\}$, dann ist $x_1 = z_1$ oder $p = z_1$ und stets $g(x_1, p) = 1$, also $g(z_2, p) \leqq 2$. Ist $x_1 = z_1$ (und damit $y'_1 = p$), dann wählen wir

$$y_1 = \begin{cases} z_2 & \text{für } s = 1;\ (g(z_1, y_1) = 1) \\ x_s & \text{für } s \geqq 2;\ (g(z_1, y_1) = 2) \end{cases} \qquad \text{und } y_2 = y'_1 = p;$$

ist $p = z_1$ (also $y'_1 = x_1$), so wählen wir $y_1 = z_2$ $(g(y_1, z_1) \leqq 2)$ und

$$y_2 = \begin{cases} x_1 & \text{für } s = 1;\ (g(y_2, z_2) = 1) \\ x'_2 & \text{für } s \geqq 2;\ (g(y_2, z_2) \leqq 2). \end{cases}$$

In jedem dieser Fälle enthält w die Kanten $(y_1 z_1)$, $(y_2 z_2) \neq (y_1 z_1)$, und die Knoten a^+, b^+, y_1, y_2 besitzen die im Satz behaupteten Eigenschaften.

2. Ist $b \notin Z_1$, so ist $s \geqq 2$, und wir dürfen o. B. d. A. stets $b \in Z_s$ annehmen. Auf Grund unserer Voraussetzungen ist $a \neq z_1$, also $|Z_1| \geqq 2$.

Ist $a \neq x_1$ und läßt sich ein Knoten $y_1 \in Z_1(z_1)$ so wählen, daß höchstens einer der Knoten a, x_1 mit der Kante $(y_1 z_1)$ inzidiert, so gibt es in Z_1^3 einen hamiltonschen Weg w_1 der Form $w_1 = a^+(\ldots)\, x_1^+$, der die Kante $(y_1 z_1)$ enthält und $g(a^+, a) + g(x_1^+, x_1) = 1$ erfüllt. Dabei ist $g(y_1, z_1) = 1$ und $g(x_1^+, z_2) \leqq 2$.

Läßt sich ein solcher Knoten y_1 nicht wählen, dann muß $a = y_1$, $x_1 = z_1$ und $|Z_1(x_1)| = 1$ sein; also ist x_1 ein Endknoten von Z_1. Ist dann $|Z_1| = 2$, so wählen wir

$$w_1 = a(ax_1)\,x_1 = a(\ldots)\,x_1$$

$(g(x_1, z_2) = 1;\ g(y_1, z_1) = g(a, x_1) = 1)$.

Ist $|Z_1| \geqq 3$, so ist $Z_1' = Z_1 - \{x_1\}$ zusammenhängend, und damit ist ein hamiltonscher Weg der Form $w_1' = a'(\ldots)\,a$ in $Z_1'^3$ bildbar $(a' \in Z_1'(a))$. Es ist dann $w_1 = w_1'(ax_1)\,x_1 = a'(\ldots)\,x_1$ ein hamiltonscher Weg in Z_1^3 $(g(x_1, z_2) = 1; g(y_1, z_1) = g(a, x_1) = 1)$.

Ist $a = x_1$ und $|Z_1| = 2$, so wird $w_1 = a(ax_1')\,x_1' = a(\ldots)\,x_1'$ gesetzt $(g(x_1', z_2) \leqq 2;\ g(x_1', x_1) = g(z_1, y_1) = 1)$.

Ist $a = x_1$ und $|Z_1| \geqq 3$, dann wählen wir Knoten $a' \in Z_1(a)$ und $y_1 \in Z_1(z_1)$ derart, daß höchstens einer der Knoten a, a' mit der Kante (y_1z_1) inzidiert (das ist wegen $|Z_1| \geqq 3$ und $a \neq z_1$ immer möglich). Damit gibt es in Z_1^3 einen hamiltonschen Weg w_1 der Form $w_1 = a^+(\ldots)\,a'^+$, der die Kante (y_1z_1) enthält $(g(a^+, a) + g(a'^+, a') \leqq 1;\ g(a'^+, z_2) \leqq 3;\ g(y_1, z_1) = 1)$.

Es ist also stets möglich, in Z_1^3 einen hamiltonschen Weg w_1 der Form $w_1 = a^+(\ldots)\,p$ zu konstruieren, der folgende Eigenschaften erfüllt:

$g(a^+, a) \leqq 1;\ g(p, z_2) \leqq 3;$ w_1 enthält eine Kante (y_1z_1) mit $(g(y_1, z_1) = 1$.

Wir wählen nun hamiltonsche Wege $w_i = x_i(\ldots)\,x_i'$ in Z_i^3 für alle $i = 2, \ldots, s-1$, falls $s \geqq 3$ ist, und bilden damit durch Aneinanderfügen den Weg $w_0 = x_2(\ldots)\,x_{s-1}'$ in $G^3 - \{z_2\}$.

Außerdem sei w_s ein hamiltonscher Weg in Z_s^3 der Form $w_s = x_s^+(\ldots)\,b$; dabei ist

$$x_s^+ = \begin{cases} x_s & \text{für } b \neq x_s \\ x_s' & \text{für } b = x_s. \end{cases}$$

Damit bilden wir in G^4:

$$w = \begin{cases} w_1(pz_2)\,z_2(z_2x_2^+)\,w_s & \text{für } s = 2 \\ w_1(px_2)\,w_0(x_{s-1}'z_2)\,z_2(z_2x_s^+)\,w_s & \text{für } s \geqq 3 \end{cases}$$

$$(g(p, x_2) \leqq 4;\ g(x_{s-1}', z_2) \leqq 2;\ g(z_2, x_s^+) \leqq 2).$$

Der Weg w ist ein hamiltonscher Weg in G^4, der a^+ mit $b^+ = b$ verbindet und die Kanten $(y_1z_1), (x_s^+, z_2) \neq (y_1, z_1)$ enthält; dabei besitzen die Knoten $a^+, b^+ = b$, $y_1, y_2 = x_s^+$ die im Satz behaupteten Eigenschaften, q. e. d.

Hilfssatz 4. *Es sei G ein zusammenhängender Graph mit mindestens vier Knoten, und a, b, y seien beliebige, aber paarweise verschiedene Knoten von G. Ist G bezüglich des geordneten Paares* $(\{a, b\}, y)$ *kein Graph des Typs 1 bzw. des Typs 2, so gibt es in* $G - \{a, b, y\}$ *einen Knoten* $\bar{y}$ *mit* $g(y, \bar{y}) \leqq 2$ *derart, daß in* $G^4 - \{a, b\}$ *ein y mit* $\bar{y}$ *verbindender hamiltonscher Weg existiert.*

Beweis: Wir streichen die Knoten a und b in G. Der Graph zerfällt in Komponenten. Falls keine nur mit a durch eine Kante in G verbundene Komponente existiert, so ist $G' = G - \{a\}$ zusammenhängend und $|G'| \geqq 3$. Dann gibt es nach Satz 4 aus [2] in G' einen Knoten $\bar{y}$ mit $1 \leqq g(y, \bar{y}) \leqq 2$ derart, daß in $G'^3 - \{b\}$ ein hamiltonscher Weg existiert, der y mit $\bar{y}$ verbindet. Dieser Weg ist dann auch ein y mit $\bar{y}$ verbindender hamiltonscher Weg in $G^4 - \{a, b\}$.

Gibt es in G keine nur mit b verbundene Komponente, so kann man entsprechend schließen. Folglich dürfen wir im weiteren voraussetzen, daß es wenigstens eine nur mit a und wenigstens eine nur mit b in G verbundene Komponente gibt. Durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen für a, b kann weiter erreicht werden, daß y in einer mit a verbundenen Komponente liegt.

1. Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Kante (a, b) in G existiert und bezeichnen mit $A_1, \ldots, A_k$ die mit a in G verbundenen Komponenten und mit $B_1, \ldots, B_l$ die nur mit b in G verbundenen Komponenten; dabei ist $k \geqq 1, l \geqq 1$. Weiter sei $a_i \in G(A_i, a)$, $a'_i \in A_i(a_i)$ für $i = 1, \ldots, k$; $b_j \in G(B_j, b)$, $b'_j \in B_j(b_j)$ für $j = 1, \ldots, l$; $w_i = a'_i(\ldots)\, a_i$ ein hamiltonscher Weg in A_i^3 für $i = 2, \ldots, k$ und $\bar{w}_j = w(b'_j, b_j)$ ein hamiltonscher Weg in B_j^3 für $j = 1, \ldots, l$.

Durch Aneinanderfügen der w_i bzw. der $\bar{w}_j$ bilden wir die Wege $w_a = a'_2(\ldots)\, a_k$ in $G^3 - \{a, b\}$, falls $k \geqq 2$ ist, bzw. $w_b = b'_1(\ldots)\, b_l$ in $G^3 - \{a, b\}$; w_a, w_b sind natürlich erst recht in $G^4 - \{a, b\}$ bildbar.

O. B. d. A. sei $y \in A_1$ (andernfalls ändern wir die Numerierung der A_i). Ist $|A_1| \geqq 2$, so gibt es nach Satz 2 aus [2] in A_1 stets Knoten $a'_1 \in A_1(a_1)$ und $\bar{y}$ mit $1 \leqq g(y, \bar{y}) \leqq 2$ derart, daß in A_1^3 ein hamiltonscher Weg w_1 existiert, der y mit $\bar{y}$ verbindet und die Kante $(a_1 a'_1)$ enthält:

$$w_1 = y(\ldots a_1 (a_1 a'_1)\, a'_1 \ldots)\, \bar{y} \qquad \text{bzw. } w_1 = y(\ldots a'_1 (a'_1 a_1)\, a_1 \ldots)\, \bar{y}.$$

Weiter bilden wir

$$w_{ab} = \begin{cases} w_b = b'_1(\ldots)\, b_l & \text{für } k = 1 \\ w_a (a_k b'_1)\, w_b = a'_2(\ldots)\, b_l & \text{für } k \geqq 2; \end{cases}$$

dabei ist $g(a_k, b'_1) \leqq 4$. Der Weg w_{ab} ist ein hamiltonscher Weg in $(G - Z_1)^4 - \{a, b\}$.

Der Weg

$$\bar{w} = \begin{cases} a_1 (a_1 b'_1)\, w_{ab} (b_l\, a'_1)\, a'_1 & \text{für } k = 1 \\ a_1 (a_1 a'_2)\, w_{ab} (b_l\, a'_1)\, a'_1 & \text{für } k \geqq 2 \end{cases}$$

ist in $G^4 - \{a, b\}$ bildbar ($g(a_1, b'_1) \leqq 4$; $g(b_l, a'_1) \leqq 4$; $g(a_1, a'_2) \leqq 3$); er enthält genau zwei Knoten mehr als der Weg w_{ab}, nämlich die Knoten a_1 und a'_1.

Ersetzt man nun in w_1 die Folge $a_1 (a_1 a'_1)\, a'_1$ bzw. die Folge $a'_1 (a'_1 a_1)\, a_1$ durch $\bar{w}$ bzw. $\bar{w}^{-1}$. So entsteht ein hamiltonscher Weg in $G^4 - \{a, b\}$, der y mit $\bar{y}$ verbindet.

Ist $|A_1| = 1$, so folgt $y = a_1$. Für $k \geqq 2$ ist dann

$$w = y(y b'_1)\, w_b (b_l\, a'_2)\, w_a = y(\ldots)\, a_k$$

bereits der gesuchte hamiltonsche Weg in $G^4 - \{a, b\}$, wenn wir $\bar{y} = a_k$ wählen, denn es ist $g(y, \bar{y}) = 2$. Ist $k = 1$, so ist G bezüglich $(\{a, b\}, y)$ ein Graph des Typs 2, was unseren Voraussetzungen widerspricht (denn da wenigstens eine nur mit a verbundene Komponente existieren soll, ist dies notwendig die Komponente A_1, die aus dem einen Knoten y besteht). Damit ist der Fall, daß die Kante (ab) in G vorkommt, behandelt.

2. Angenommen, die Kante (ab) kommt in G nicht vor; dann gibt es gewiß unter den nach Streichen von a, b in G entstehenden Komponenten eine Komponente C, die in G sowohl mit a als auch mit b verbunden ist, denn sonst wäre G nicht zusammenhängend. Die von C verschiedenen Komponenten unterteilen wir in die nur mit a verbundenen Komponenten $A_1, \dots, A_k$ und in die mit b verbundenen Komponenten $B_1, \dots, B_l$; dabei ist wieder $k \geqq 1$, $l \geqq 1$. Die Knoten a_i, a_i' $(i = 1, \dots, k)$, b_j, b_j' $(j = 1, \dots, l)$ sowie die Wege w_i $(i = 1, \dots, k)$, $\bar{w}_j$ $(j = 1, \dots, l)$, w_a und w_b seien so wie unter 1. festgelegt. Da y in einer mit a adjazenten Komponente liegen soll, können zwei Fälle auftreten:

a) y gehört einer nur mit a verbundenen Komponente von $G - \{a, b\}$ an (o. B. d. A. sei $y \in A_1$).

b) y liegt in einer mit a und b verbundenen Komponente von $G - \{a, b\}$ (o. B. d. A. sei $y \in C$).

In beiden Fällen sei $u \in G(C, a)$ und $v \in G(C, b)$; dabei kann natürlich $u = v$ sein.

Zu a): Ist $|C| \geqq 2$, so gibt es nach Satz 2 aus [2] in C Knoten $\bar{u}$ und v' mit $1 \leqq g(u, \bar{u}) \leqq 2$, $v' \in C(v)$ derart, daß in C^3 ein hamiltonscher Weg w_c existiert, der u mit $\bar{u}$ verbindet und die Kante (vv') enthält: $w_c = u(\dots v(vv')\, v' \dots)\, \bar{u}$ bzw. $w_c = u(\dots v'(v'v)\, v \dots)\, \bar{u}$. Im Falle $|C| \geqq 2$ bilden wir $\bar{w}_b = v(vb_1')\, w_b(b_l v')\, v'$, $(g(v, b_1') \leqq 3$; $g(b_l, v') \leqq 3)$. $\bar{w}_b$ ist somit ein Weg in $G^3 - \{a, b\}$, also erst recht in $G^4 - \{a, b\}$. Wir bilden nun

$$w_{bc} = \begin{cases} u(ub_1')\, w_b & \text{für } |C| = 1 \\ u(\dots \bar{w}_b \dots)\, \bar{u} \text{ bzw. } u(\dots \bar{w}_b^{-1} \dots)\, \bar{u} & \text{für } |C| \geqq 2; \end{cases}$$

dabei entsteht w_{bc} im Fall $|C| \geqq 2$ aus w_c durch Ersetzen der Folge $v(vv')\, v'$ bzw. $v'(v'v)\, v$ durch die Folge $\bar{w}_b$ bzw. $\bar{w}_b^{-1}$. Im Fall $|C| = 1$ ist $u = v$ und folglich $g(u, b_1') \leqq 3$. Damit ist w_{bc} ein hamiltonscher Weg in $(G - \{A_1, \dots, A_k\})^3 - \{a, b\}$, also erst recht in $(G - \{A_1, \dots, A_k\})^4 - \{a, b\}$, der die Form

$$w_{bc} = \begin{cases} u(\dots)\, b_1 & \text{für } |C| = 1 \\ u(\dots)\, \bar{u} & \text{für } |C| \geqq 2 \end{cases}$$

hat. Die Folge

$$w_{abc} = \begin{cases} w_{bc}^{-1} & \text{für } k = 1, |C| \geqq 1 \\ w_a(a_k b_l)\, w_{bc}^{-1} & \text{für } k \geqq 2, |C| = 1 \\ w_a(a_k \bar{u})\, w_{bc}^{-1} & \text{für } k \geqq 2, |C| \geqq 2 \end{cases}$$

ist wegen $g(a_k, b_l) \leqq 4$ im Falle $|C| = 1$ und $g(a_k, \bar{u}) \leqq 4$ im Falle $|C| \geqq 2$ ein hamiltonscher Weg in $(G - A_1)^4 - \{a, b\}$. Insbesondere hat w_{abc} die Form

$$w_{abc} = \begin{cases} b_1(\ldots)\, u & \text{für } k = 1, |C| = 1 \\ \bar{u}(\ldots)\, u & \text{für } k = 1, |C| \geqq 2 \\ a_2'(\ldots)\, u & \text{für } k \geqq 2. \end{cases}$$

Nun läßt sich der gesuchte hamiltonsche Weg in $G^4 - \{a, b\}$ sofort angeben:

Ist $|A_1| = 1$, so ist

$$w = a_1(a_1 z)\, w_{abc} = a_1(\ldots)\, u$$

mit

$$z = \begin{cases} b_1 & \text{für } k = 1, |C| = 1 \\ \bar{u} & \text{für } k = 1, |C| \geqq 2 \\ a_2' & \text{für } k \geqq 2 \end{cases}$$

dieser Weg; dabei ist $g(a_1, z) \leqq 4$, und es ist $y = a_1$ und $\bar{y} = u$ zu setzen (offensichtlich gilt $g(y, \bar{y}) = 2$).

Ist $|A_1| \geqq 2$, so ersetzen wir in w_1 die Folge $a_1(a_1a_1')\, a_1'$ bzw. $a_1'(a_1'a_1)\, a_1$ durch die Folge

$$w_0 = a_1(a_1 z)\, w_{abc}(u a_1')\, a_1' \text{ bzw. } w_0^{-1};$$

dabei ist z wie oben festgelegt zu wählen; ferner ist $g(u, a_1') \leqq 3$.

Zu b): Es bezeichne w_1' einen hamiltonschen Weg der Form $w_1' = a_1'(\ldots)\, a_1$ in A_1^3; durch Aneinanderfügen von $w_1', w_2, \ldots, w_k$ erhält man einen Weg $w_a' = a_1'(\ldots)\, a_k$ in $G^3 - \{a, b\}$.

Es wird zuerst der Fall betrachtet, daß $G(C, a) \cap G(C, b) \neq \emptyset$ ist; damit dürfen wir $u = v$ annehmen.

Ist $|C| \geqq 2$, so gibt es nach Satz 2 aus [2] in C Knoten $u' \in C(u)$ und $\bar{y}$ mit $1 \leqq g(y, \bar{y}) \leqq 2$ derart, daß in C^3 ein hamiltonscher Weg w_c existiert, der y mit $\bar{y}$ verbindet und die Kante (uu') enthält: $w_c = y(\ldots u(uu')\, u' \ldots)\, \bar{y}$ bzw. $w_c = y(\ldots u'(u'u)\, u \ldots)\, \bar{y}$. Dabei ist es unwesentlich, ob $y = u$ oder $y \neq u$ ist.

Wir bilden nun die Folge

$$\bar{w} = u'(u'a_1')\, w_a'(a_k\, b_l)\, w_b^{-1}(b_1'u)\, u = u'(\ldots)\, u.$$

Es ist $g(u', a_1') \leqq 4$; $g(a_k, b_l) \leqq 4$; $g(b_1', u) \leqq 3$ und damit $\bar{w}$ ein Weg in $G^4 - \{a, b\}$. Ersetzen wir nun in w_c die Folge $u(uu')\, u'$ bzw. $u'(u'u)\, u$ durch die Folge $\bar{w}^{-1}$ bzw. $\bar{w}$, so entsteht der verlangte hamiltonsche Weg in $G^4 - \{a, b\}$.

Ist $|C| = 1$, so ist $u = v = y$, und y hat die Valenz 2.

Ist $l \geqq 2$, so bilden wir durch Aneinanderfügen von $\bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_l$ den Weg $\bar{w}_b = b_2'(\ldots)\, b_l$ in $G^3 - \{a, b\}$; mit $w_b^+ = \bar{w}_1^{-1}(b_2'b_1')\, \bar{w}_1^{-1} = b_l(\ldots)\, b_1$ $(g(b_2', b_1') \leqq 4)$ ist dann $w = y(ya_1')\, w_a'(a_kb_l)\, w_b^+ = y(\ldots)\, b_1$ der gesuchte hamiltonsche Weg von $G^4 - \{a, b\}$; es ist nämlich $g(y, a_1') \leqq 3, g(a_k, b_l) = 4$ und mit $\bar{y} = b_1$ auch $g(y, \bar{y}) = 2$.

Ist $k \geqq 2$, dann kann man analog verfahren, so daß nur der Fall $k = l = 1$ übrig bleibt.

Ist dann die Valenz wenigstens eines der gestrichenen Knoten $\geqq 3$ – o. B. d. A. sei dies der Knoten b (man beachte unsere Voraussetzung, daß es wenigstens eine nur mit a und wenigstens eine nur mit b in G verbundene Komponente geben soll; damit ist A_1 nur mit a und B_1 nur mit b in G verbunden, a und b sind also gleichberechtigt) – so ist $| G(B_1, b) | \geqq 2$.

Damit ist $w = y(ya'_1)\, w'_1(a_1 b_1)\, w_1^+$ der gesuchte hamiltonsche Weg von $G^4 - \{a, b\}$, wobei $w_1^+ = b_1(\ldots)\,\bar{y}$ ein hamiltonscher Weg in B_1^3 mit $\bar{y} \in G(B_1, b)$, $\bar{y} \neq b_1$ bedeutet ($g(y, a'_1) \leqq 3$; $g(a_1, b_1) = 4$; $g(y, \bar{y}) = 2$).

Haben a und b die Valenz 2, dann darf nicht gleichzeitig $| A_1 | \geqq 2$ und $| B_1 | \geqq 2$ sein, denn sonst ist G bezüglich $(\{a, b\}, y)$ ein Graph des Typs 1. Ist etwa $| A_1 | = 1$, so ist $w = y(yb'_1)\, \bar{w}_1(b_1 a_1)\, a_1$ ein hamiltonscher Weg in $G^4 - \{a, b\}$, der die geforderten Eigenschaften besitzt, wenn wir $\bar{y} = a_1$ wählen ($g(y, b'_1) \leqq 3$; $g(b_1, a_1) = 4$; $g(y, \bar{y}) = 2$). Analog schließt man für $| B_1 | = 1$. Damit ist der Fall, daß $G(C, a) \cap G(C, b) \neq \emptyset$ ist, behandelt.

Ist $G(C, a) \cap G(C, b) = \emptyset$, so ist $u \neq v$ und damit $| C | \geqq 2$.

Es sei zunächst $y = u$. Wegen $| C | \geqq 2$ gibt es nach Satz 2 aus [2] in C Knoten $u' \in C(u)$ und $\bar{v}$ mit $1 \leqq g(v, \bar{v}) \leqq 2$ derart, daß in C^3 ein hamiltonscher Weg w_0 existiert, der v mit $\bar{v}$ verbindet und die Kante (uu') enthält. Wir bilden nun $w_{bc} = w_c(\bar{v}b_l)\, w_b^{-1}(b'_1 v)$. w_{bc} ist ein Kreis in $G^4 - \{a, b\}$, denn es gilt: $g(\bar{v}, b_l) \leqq 4$, $g(b'_1, v) \leqq 3$. Insbesondere ist w_{bc} ein hamiltonscher Kreis in $(G - \{A_1, \ldots, A_k\})^4 - \{a, b\}$, der die Folge $u(uu')\,u'$ bzw. $u'(u'u)\,u$ enthält. Ersetzen wir diese Folge durch die Folge $\bar{w}_a = u(ua_k)\, w_a'^{-1}(a'_1 u')\, u'$ bzw. $\bar{w}_a^{-1}$, die ein Weg in $G^4 - \{a, b\}$ ist ($g(u, a_k) = 2$; $g(a'_1, u') = 4$), so entsteht ein hamiltonscher Kreis in $G^4 - \{a, b\}$. Auf diesem Kreis sind die Knoten u und a_k benachbart. Entfernt man die Kante (ua_k) aus dem Kreis, so entsteht der gesuchte hamiltonsche Weg in $G^4 - \{a, b\}$; dabei ist $\bar{y} = a_k$ zu setzen.

Ist $y = v$, so kann man analog konstruieren.

Somit bleibt noch der Fall, daß die Knoten u, v, y paarweise voneinander verschieden sind. Dann gilt $| C | \geqq 3$. Angenommen, es gibt einen Knoten $u' \in C(u)$, der von v und y verschieden ist. Dann gilt $| C | \geqq 4$ und $\{u, u'\} \cap \{v, y\} = \emptyset$.

Damit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 erfüllt. Es gibt dann in C Knoten u^+, u'^+ mit $g(u, u^+) + g(u', u'^+) \leqq 1$ und Knoten $\bar{v}, \bar{y}$ mit $1 \leqq g(v, \bar{v}) \leqq 2$, $1 \leqq g(y, \bar{y}) \leqq 2$ derart, daß in C^4 ein hamiltonscher Weg w_c existiert, der u^+ mit u'^+ verbindet und die Kanten $(v\bar{v})$ und $(y\bar{y})$ enthält; dabei ist $\{v, \bar{v}\} \neq \{y, \bar{y}\}$. Ersetzen wir in w_c die Folge $v(v\bar{v})\,\bar{v}$ bzw. $\bar{v}(\bar{v}v)\,v$ durch die Folge

$$\bar{w}_b = v(vb'_1)\, w_b(b_l\bar{v})\,\bar{v} \qquad \text{bzw. } \bar{w}_b^{-1}$$

($g(v, b'_1) \leqq 3$; $g(b_l, \bar{v}) \leqq 4$), so entsteht ein hamiltonscher Weg $w_{bc} = u^+(\ldots)\,u'^+$ in $(G - \{A_1, \ldots, A_k\})^4 - \{a, b\}$, der die Kante $(y\bar{y})$ enthält.

Damit ist dann $\bar{w} = w_{bc}(u'^{+}a_k)\, w_a'^{-1}(a_1' u^{+})$ ein hamiltonscher Kreis in $G^4 - \{a, b\}$ $(g(u'^{+}, a_k) \leqq 4;\ g(a_1', u^{+}) \leqq 4)$. Dieser Kreis $\bar{w}$ enthält nun auch die Kante $(y\bar{y})$. Durch Streichen dieser Kante in $\bar{w}$ entsteht der gesuchte hamiltonsche Weg von $G^4 - \{a, b\}$. Gibt es keinen Knoten $u' \in C(u)$, der von y und v verschieden ist, dann gilt $C(u) \subseteqq \{y, v\}$. Damit können die Fälle $C(u) = \{y\}$, $C(u) = \{v\}$ und $C(u) = \{y, v\}$ auftreten.

Ist $C(u) = \{y\}$, so muß u ein Endknoten von C sein. Wir bilden den Graphen $C' = C - \{u\}$; dieser Graph ist zusammenhängend und hat mindestens zwei Knoten. Dann gibt es nach Satz 2 aus [2] in C' Knoten $v' \in C(v)$ und $\bar{y}$ mit $1 \leqq g(y, \bar{y}) \leqq 2$ derart, daß in C'^3 ein hamiltonscher Weg w_c' existiert, der y mit $\bar{y}$ verbindet und die Kante (vv') enthält.

Wir bilden den Weg $\bar{w}_b = v(vb_1')\, w_b(b_l v')\, v'$ in $G^3 - \{a, b\}$ $(g(v, b_1') \leqq 3;$ $g(b_l, v') \leqq 3)$. Ersetzt man in w_c' die Folge $v(vv')\, v'$ bzw. $v'(v'v)\, v$ durch $\bar{w}_b$ bzw. $\bar{w}_b^{-1}$, so entsteht ein hamiltonscher Weg $w_c = y(\ldots)\,\bar{y}$ in $(G - \{A_1, \ldots, A_k, u\})^3 - \{a, b\}$. Auf diesem Weg hat y gewiß einen Nachbarn p mit $g(y, p) \leqq 3$. Ersetzt man dann die Folge $y(yp)\, p$ in w_c durch die Folge

$$y(ya_1')\, w_a'(a_k u)\, u(up)\, p,$$

so entsteht der gesuchte hamiltonsche Weg in $G^4 - \{a, b\}$ $(g(y, a_1') \leqq 4; g(a_k, u) = 2;$ $g(u, p) \leqq 4)$.

Im Falle $C(u) = \{v\}$ ist u wieder Endknoten von C. Wir bilden wie vorher bei $C(u) = \{y\}$ den Graphen C' sowie die Wege w_c', $\bar{w}_b$ und w_c. Auf w_c hat der Knoten v gewiß einen Nachbarn p mit $g(v, p) \leqq 3$. Ersetzt man dann in w_c die Folge $v(vp)\, p$ bzw. $p(pv)\, v$ durch die Folge $\bar{w}_a = v(va_1')\, w_a'(a_k u)\, u(up)\, p$ bzw. $\bar{w}_a^{-1}$, so entsteht der verlangte hamiltonsche Weg in $G^4 - \{a, b\}$ $(g(v, a_1') \leqq 4; g(a_k, u) = 2; g(u, p) \leqq 4)$.

Es sei nun $C(u) = \{v, y\}$.

Ist $|C| = 3$, so ist $w = y(yb_l)\, w_b^{-1}(b_1' u)\, u(ua_1')\, w_a'(a_k v)\, v$ der gesuchte hamiltonsche Weg von $G^4 - \{a, b\}$; dabei ist $\bar{y} = v$ zu wählen $(g(y, b_l) \leqq 4;\ g(b_1', u) \leqq 4;$ $g(u, a_1') \leqq 3;\ g(a_k, v) = 3;\ 1 \leqq g(y, \bar{y}) \leqq 2)$.

Wir können also $|C| \geqq 4$ voraussetzen. Ist $C' = C - \{u\}$ zusammenhängend, so können wir wie im Fall $C(u) = \{y\}$ schließen. Sei daher $C' = C - \{u\}$ nicht zusammenhängend. Entfernen wir aus C die Knoten u, v und y, so zerfällt C in Komponenten, von denen keine sowohl mit y als auch mit v verbunden ist.

Seien $Y_1, \ldots, Y_m$ diejenigen Komponenten, die nur mit y und $V_1, \ldots, V_n$ diejenigen, die nur mit v verbunden sind. Weiter sei:

$y_i \in C(Y_i, y), y_i' \in Y_i(y_i), w_{y_i} = y_i'(\ldots)\, y_i$ ein hamiltonscher Weg in Y_i^3 für $i = 1, \ldots, m$;

$v_j \in C(V_j, v), v_j' \in V_j(v_j), w_{v_j} = v_j'(\ldots)\, v_j$ ein hamiltonscher Weg in V_j^3 für $j = 1, \ldots, n$.

Durch Aneinanderfügen der w_{y_i} bzw. w_{v_j} bilden wir die Wege $w_y = y_1'(\ldots)\, y_m$ in $C^3 - \{u, v, y\}$ bzw. $w_v = v_1'(\ldots)\, v_n$ in $C^3 - \{u, v, y\}$.

Damit ist

$$w = y(yy_1')\, w_y(y_m a_k)\, w_a'^{-1}(a_1' v)\, v(vv_1')\, w_v(v_n b_1')\, w_b(b_l u)\, u$$

im Falle $m \neq 0$, $n \neq 0$ der gesuchte hamiltonsche Weg in $G^4 - \{a, b\}$; dabei wähle man $\bar{y} = u$. ($g(y, y_1') \leqq 2$; $g(y_m, a_k) \leqq 4$; $g(a_1', v) \leqq 4$; $g(v, v_1') \leqq 2$; $g(v_n, b_1') \leqq 4$; $g(b_l, u) = 3$; $g(y, \bar{y}) = 1$.)

Ist $m = 0$, so ersetze man in w die Folge $(yy_1')\, w_y(y_m a_k)$ durch (ya_k) ($g(y, a_k) \leqq 3$); ist $n = 0$, so ersetze man in w die Folge $(vv_1')\, w_v(v_n b_1')$ durch (vb_1') ($g(v, b_1') \leqq 3$). Der Fall $m = n = 0$ tritt wegen $|C| \geqq 4$ nicht auf.

Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Bemerkung: Ist G ein Graph des Typs 1 oder des Typs 2 bezüglich des geordneten Paares $(\{a, b\}, y)$, dann gibt es in $G - \{a, b, y\}$ keinen Knoten $\bar{y}$ mit $1 \leqq g(y, \bar{y}) \leqq 2$ derart, daß sich y mit $\bar{y}$ in $G^4 - \{a, b\}$ durch einen hamiltonschen Weg verbinden läßt.

Hilfssatz 5. *Es seien G ein zusammenhangender Graph, $a_1, \ldots, a_p$ paarweise verschiedene Knoten von G, die ein Netz N in G erzeugen, $|G| \geqq p + 3$, $p \geqq 3$. Dann gilt:*

$G^{p+1} - N$ ist hamiltonsch dann und nur dann, wenn G die nachfolgenden Eigenschaften E_1 und E_2 erfüllt:

E_1: Es gibt in G keinen Knoten a derart, daß $a_1, \ldots, a_p$, a eine p-Brücke von G erzeugen.

E_2: Ist $p = 3$ und N ein Weg in G, dessen Knoten reine Brückenknoten von G sind, wobei die Endknoten von N den Grad 2 und der innere Knoten von N den Grad 3 in G besitzen, so darf der nicht zu N gehorende Nachbarknoten des inneren Knotens von N kein reiner Bruckenknoten des Grades 2 in G sein.

Der Beweis dieses Satzes findet sich in [9].

Hilfssatz 6. *Seien G ein zusammenhängender Graph mit $|G| \geqq 6$ und a_1, a_2, a_3 beliebige, aber paarweise verschiedene Knoten von G. Dann gilt: $G_4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ ist dann und nur dann hamiltonsch, falls folgende Bedingungen von den Knoten a_1, a_2, a_3 in G erfüllt werden:*

(1) *Es gibt in G keinen Knoten a derart, daß a_1, a_2, a_3, a eine 3-Brücke in G erzeugen.*

(2) *Erzeugen a_1, a_2, a_3 einen Weg N in G, dessen Knoten reine Brückenknoten von G sind, wobei die Endknoten von N die Valenz 2 und der innere Knoten von N die Valenz 3 in G besitzen, so darf der nicht zu N gehörende Nachbarknoten des inneren Knotens von N kein reiner Brückenknoten der Valenz 2 in G sein.*

(3) *Bilden a_1, a_2, a_3 genau drei Netzbestandteile in G,[1]) besitzen ferner a_1, a_2, a_3 genau einen gemeinsamen Nachbarknoten u in G, dessen Valenz in G gleich 3 ist und ist die Valenz von a_1, a_2, a_3 jeweils gleich 2 in G, so ist wenigstens einer der*

[1]) D.h., a_1, a_2, a_3 sind in G paarweise nicht-adjazent

Knoten a_1, a_2, a_3 kein nichttrivialer Brückenknoten in G.

Beweis: Seien die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt. Erzeugen die Knoten a_1, a_2, a_3 ein Netz in G, so liefert Hilfssatz 5 unsere Behauptung. Für das Weitere sollen daher a_1, a_2, a_3 kein Netz in G erzeugen. Dann ist einer dieser Knoten – o. B. d. A. sei es a_3 – mit keinem der beiden anderen in G durch eine Kante verbunden. Wir streichen nun a_3 in G; G zerfällt jetzt in gewisse Komponenten $Z_1, \ldots, Z_s$. Seien $x_i \in G(Z_i, a_3)$, $x'_i \in Z_i(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, s$ gewählt; es ist dabei stets $x_i \neq a_1$, $x_i \neq a_2$.

I. Wir untersuchen zunächst den Fall, daß a_1, a_2 in der gleichen Komponente – o. B. d. A. sei es Z_1 – liegen. Damit ist $|Z_1| \geqq 3$. Ist nun $s = 1$, so ist $|Z_1| \geqq 5$ (wegen $|G| \geqq 6$). Nach [2], Satz 5, ist Z_1^4 stets 2-hamiltonsch, also $Z_1^4 - \{a_1, a_2\}$ hamiltonsch und damit $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ hamiltonsch.

Es sei jetzt $s \geqq 2$. Wir wählen einen hamiltonschen Weg $w_i = x_i(\ldots)\, x'_i$ in Z_i^3 für $i = 2, \ldots, s$ und bilden durch Aneinanderfügen den Weg $w_0 = x_2(\ldots)\, x'_s$ in $G^3 - \{a_3\}$.

Wir untersuchen jetzt folgende Fälle:

a) $|Z_1| = 3$;

b) $|Z_1| \geqq 4$ und Z_1 ist bezüglich des geordneten Paares $(\{a_1, a_2\}, x_1)$ kein Graph des Typs 1 bzw. 2;

c) $|Z_1| \geqq 4$ und Z_1 ist bezüglich des geordneten Paares $(\{a_1, a_2\}, x_1)$ ein Graph des Typs 1;

d $|Z_1| \geqq 4$ und Z_1 ist bezüglich des geordneten Paares $(\{a_1, a_2\}, x_1)$ ein Graph des Typs 2.

Zu a. Z_1 enthält nur die Knoten a_1, a_2, x_1. Von diesen ist nur x_1 in G mit a_3 durch eine Kante verbunden, also $G' = G - \{a_1, a_2\}$ zusammenhängend. Damit ist $G'^3 - \{a_3\}$ hamiltonsch (siehe [2], Satz 5), also erst recht $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$.

Zu b. Auf Grund von Hilfssatz 4 existiert jetzt in $Z_1 - \{a_1, a_2, x_1\}$ ein Knoten $\bar{x}_1$ mit folgenden Eigenschaften:

i
$$g(x_1, \bar{x}_1) \leqq 2,$$

n $Z_1^4 - \{a_1, a_2\}$ gibt es einen hamiltonschen Weg $w_1 = x_1(\ldots)\, \bar{x}_1$.

Damit ist

$$w = w_1(\bar{x}_1 x_2)\, w_0(x'_s x_1)$$

ein hamiltonscher Kreis in $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ $(g(\bar{x}_1, x_2) \leqq 4,\ g(x'_s, x_1) \leqq 3)$.

Zu c. a_1, a_2, a_3 bilden jetzt drei Netzbestandteile; insbesondere sind a_1, a_2 reine Brückenknoten des Grades 2 in Z_1. Ferner ist $G(a_1) \cap G(a_2) \cap G(a_3) = \{x_1\}$.

Wir dürfen jetzt annehmen, daß $|G(Z_1, a_3)| = 1$ ist (damit sind a_1, a_2 reine Brückenknoten des Grades 2 sogar in G); denn gäbe es einen Knoten $\bar{x}_1 \in Z_1$ mit $g(\bar{x}_1, a_3) = 1$ und $\bar{x}_1 \neq x_1, \bar{x}_1 \neq a_i, (i = 1, 2)$, so wäre Z_1 bezüglich des geordneten Paares $(\{a_1, a_2\}, \bar{x}_1)$ weder vom Typ 1 noch vom Typ 2, was wegen $|Z_1| \geqq 4$ dann sofort den schon behandelten Fall b) nach sich zieht. Beim Streichen von a_1, a_2, x_1 in Z_1 zerfällt Z_1 in zwei (verschiedene) Komponenten U_1, U_2 mit $|U_i| \geqq 2\ (i = 1, 2)$;

o. B. d. A. sei U_i in Z_1 gerade mit a_i verbunden ($i = 1, 2$). Wegen der Struktur von Z_1 ist $|Z_1(U_i, a_i)| = 1$, $i = 1, 2$. Mit $\{u_i\} = Z_1(U_i, a_i)$, $u_i' = U_i(u_i)$, $\bar{w}_i = w(u_i, u_i')$ in U_i^3 ($i = 1, 2$), bilden wir $\bar{w} = \bar{w}_1(u_1'x_1)\, x_1(x_1u_2')\, \bar{w}_2^{-1} = u_1(\ldots)\, u_2$. $\bar{w}$ ist ein hamiltonscher Weg von $Z_1^3 - \{a_1, a_2\}$.

Weiter ist für $s \geqq 3$

$$\bar{w}_0 = w(w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}, w_s^{-1}) = x_2(\ldots)\, x_s$$

ein hamiltonscher Weg in $(G - Z_1)^4 - \{a_3\}$ $(g(x'_{s-1}, x'_s) \leqq 4)$ und somit

$$w = \bar{w}(u_2x_2)\, \bar{w}_0(x_su_1) \qquad \text{für } s \geqq 3$$

ein hamiltonscher Kreis in $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ $(g(u_2, x_2) = g(x_s, u_1) = 4)$.

Ist $s = 2$, so ist

$$w = \begin{cases} \bar{w}(u_2x_2)\, x_2(x_2u_1) & \text{für } |Z_2| = 1 \\ \bar{w}(u_2x_2)\, w_2'(\bar{x}_2u_1) & \text{für } |Z_2| \geqq 2 \text{ und } |G(Z_2, a_3)| = 2 \end{cases}$$

mit $\bar{x}_2 \in G(Z_2, a_3)$, $\bar{x}_2 \neq x_2$ und einem hamiltonschen Weg $w_2' = x_2(\ldots)\,\bar{x}_2$ in Z_2^3 ein hamiltonscher Kreis in $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ $(g(u_2, x_2) = g(x_2, u_1) = g(\bar{x}_2, u_1) = 4)$.

Ist im Falle $s = 2$ nun $|Z_2| \geqq 2$ und $|G(Z_2, a_3)| = 1$, also $G(Z_2, a_3) = \{x_2\}$, so ist neben a_1, a_2 auch a_3 ein reiner Brückenknoten der Valenz 2 in G.

Damit ist aber Voraussetzung (3) verletzt.

Zu d. Jetzt erzeugen a_1, a_2 ein Netz A_1 von G; die Netzbestandteile der Knoten a_1, a_2, a_3 in G sind A_1 und $A_2 = \{a_3\}$. O. B. d. A. sei $Z_1(a_1) = \{x_1, a_2\}$. $U_1, \ldots, U_r$ sollen die Komponenten von $Z_1 - \{a_1, a_2, x_1\}$ sein; wegen $|Z_1| \geqq 4$ ist $r \geqq 1$. Offenbar ist $G(U_i, a_1) = \emptyset$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Ist $G - A_1$ nicht zusammenhängend (d. h. die Kante (a_3x_1) ist in G die einzige Verbindungskante von a_3 mit Z_1), dann erzeugen a_3, x_1, a_1, a_2 eine 3-Brücke von G (man beachte $r \geqq 1$, $s \geqq 2$), was unserer Voraussetzung (1) widerspricht.

Es sei damit $G - A_1$ als zusammenhängend vorausgesetzt; insbesondere ist also $|G(Z_1, a_3)| \geqq 2$. Die von x_1 verschiedenen Elemente von $G(Z_1, a_3)$ sind Knoten, die in gewissen der Komponenten $U_1, \ldots, U_r$ auftreten (man beachte, daß a_1, a_2, a_3 kein Netz erzeugen). Wir wählen ein $x \in G(Z_1, a_3)$ mit $x \neq x_1$; o. B. d. A. sei $x \in U_1$. Für $r \geqq 2$ bzw. $r = 1$ und $|U_1| \geqq 2$ ist Z_1 bezüglich des geordneten Paares $(\{a_1, a_2\}, x)$ weder ein Graph des Typs 1 noch des Typs 2, so daß Fall b) eintritt.

Ist $r = 1$ und $|U_1| = 1$, so ist offenbar $w = x_1(x_1x_2)\, w_0(x_s'x)\, x(xx_1)$ ein hamiltonscher Kreis von $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ $(g(x, x_1) = 2)$.

II. Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß a_1, a_2 nicht in einer gemeinsamen Komponente Z_i liegen; wir nehmen an, es sei $a_i \in Z_i$ ($i = 1, 2$). Es ist gewiß $x_i \neq a_i$ ($i = 1, 2$), da a_1, a_2, a_3 kein Netz erzeugen; damit ergibt sich sofort $|Z_i| \geqq 2$ ($i = 1, 2$). Wir bilden durch Aneinanderfügen von $w_3, \ldots, w_s$ den Weg $w_0' = x_3(\ldots)\, x_s'$ in $G^3 - \{a_3\}$ für $s \geqq 3$. w_0' ist hamiltonscher Weg von $(G - \{Z_1, Z_2\})^3 - \{a_3\}$.

Nach Satz 4 aus [2] existiert in Z_i $(i = 1, 2)$ ein Knoten $\bar{x}_i$ mit $g(x_i, \bar{x}_i) \leqq 2$ derart, daß es in $Z_i^3 - \{a_i\}$ einen hamiltonschen Weg w_i' gibt, der x_i mit $\bar{x}_i$ verbindet; dabei ist $x_i = \bar{x}_i$ genau dann, wenn $| Z_i | = 2$ gilt.

Somit ergibt sich, daß $w' = w_1'(\bar{x}_1 x_2)\, w_2' = x_1(\ldots)\,\bar{x}_2$ ein hamiltonscher Weg in $(G - \{Z_3, \ldots, Z_s\})^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ $(g(\bar{x}_1, x_2) \leqq 4)$ und

$$w = \begin{cases} w'(\bar{x}_2 x_1) & \text{für } s = 2 \\ w'(\bar{x}_2 x_3)\, w_0(x_s x_1) & \text{für } s \geqq 3 \end{cases}$$

ein hamiltonscher Kreis von $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ ist $(g(\bar{x}_2, x_1) \leqq 4;\ g(\bar{x}_2, g_3) \leqq 4;\ g(x_s', x_1) \leqq 3)$.

Damit ist die Hinlänglichkeit unserer Voraussetzungen (1), (2), (3) gezeigt. Der besseren Übersicht wegen soll in den folgenden Abbildungen die Struktur derjenigen Graphen verdeutlicht werden, die eine der genannten Voraussetzungen verletzen.

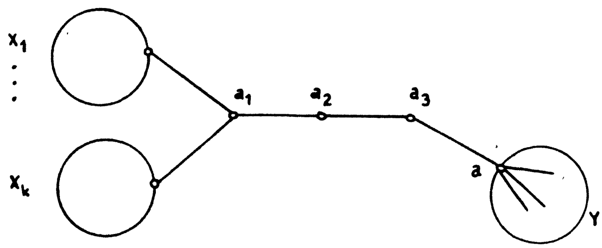

Abb. 1 Voraussetzung (1) verletzt $(k \geqq 1, | Y | \geqq 2)$

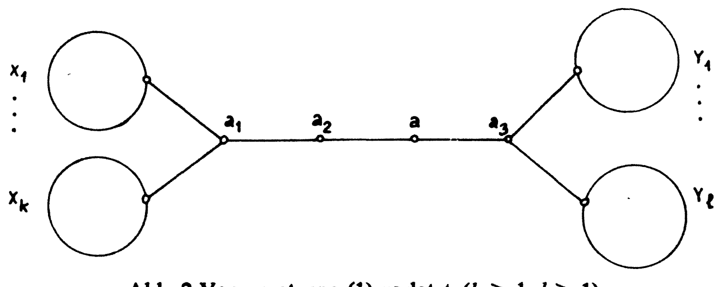

Abb. 2 Voraussetzung (1) verletzt $(k \geqq 1, l \geqq 1)$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) auch notwendig sind; bei (1) ist dies unmittelbar einsichtig, für (2) bzw. (3) überlegt man sich dies am günstigsten indirekt an Hand der Abbildungen 3 bzw. 4; qed.

3. Hauptsatz. Mit den bereitgestellten Hilfsmitteln können wir nun den in Abschnitt 1 angekündigten Charakterisierungssatz beweisen.

Satz: *Für einen zusammenhängenden Graphen G mit* $|G| \geqq 6$ *ist* G^4 *genau dann 3-hamiltonsch, wenn G weder eine 3-Brücke enthält noch einen reinen Brückenknoten der Valenz 3 besitzt, dessen drei Nachbarknoten in G reine Brückenknoten der Valenz 2 sind.*

Beweis: Die angegebenen Bedingungen sind hinreichend. Sind nämlich a_1, a_2, a_3 paarweise verschiedene Knoten in G, so folgt, daß sie die Eigenschaften (1), (2), (3) von Hilfssatz 6 erfüllen, und daher ist $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$ hamiltonsch. Sind die Knoten a_1, a_2, a_3 nicht paarweise verschieden, so sichert bereits Satz 5 aus [2] die Existenz eines hamiltonschen Kreises in $G^4 - \{a_1, a_2, a_3\}$.

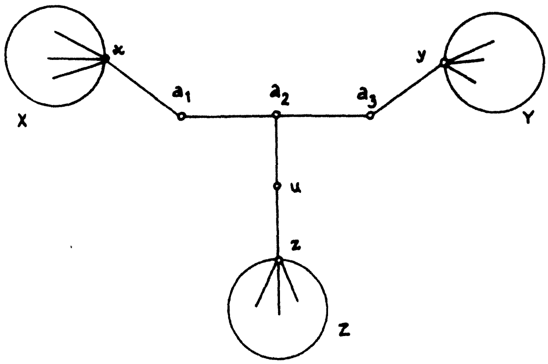

Abb. 3 Voraussetzung (2) verletzt ($|X| \geqq 2$, $|Y| \geqq 2$, $|Z| \geqq 2$)

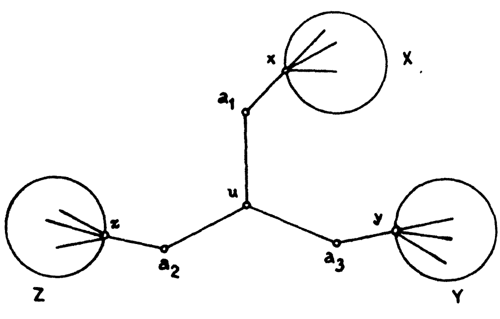

Abb. 4 Voraussetzung (3) verletzt ($|X| \geqq 2$, $|Y| \geqq 2$, $|Z| \geqq 2$)

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist unmittelbar aus Hilfssatz 6 ersichtlich. Damit sind die zusammenhängenden Graphen mit 3-hamiltonscher vierter Potenz vollständig beschrieben.

LITERATUR

[1] G. Chartrand, S. F. Kapoor: *The Cube of Every Connected Graph is 1-Hamiltonian*, Journal of Research of the National Bureau of Standards—B. Mathematical Sciences Vol. 73 B, No 1; January—March 1969.

[2] P. Heinrich: *Verallgemeinerung eines Satzes von Chartrand und Kapoor über Potenzen zusammenhängender Graphen.* Math. Nachr. Band 54, Heft 1—6, 85—97 (1972).

[3] P. Heinrich: *Zur Struktur von Potenzen zusammenhängender Graphen*, Dissertation, Bergakademie Freiberg, 1972.

[4] J. J. Karaganis: *On the cube of a graph.* Canad. Math. Bull. 11, 295—296 (1968).

[5] H. Sachs: *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil 1.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1970.

[6] G. Schaar: *Eine Eigenschaft der dritten Potenz brückenloser Graphen*, Math. Nachr. Band 51, Heft 1—6, 189—196 (1971).

[7] G. Schaar: *Eine Charakterisierung der Graphen, deren dritte Potenz 2-hamiltonsch ist.* Math. Nachr. Band 66, 145—154 (1975).

[8] M. Sekanina: *On an ordering of the set of vertices of a connected graph.* Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No 412, 137—142 (1960).

[9] P. Heinrich, G. Schaar: *Über zusammenhängende Graphen mit p-hamiltonscher* ($p + 1$)*-ter Potenz* ($p = 4$). Erscheint in Math. Nachr.

P. Heinrich, G. Schaar
Sektion Mathematik, Bergakademie Freiberg
92 Freiberg
DDR