Archivum Mathematicum

Drumi Dimitrov Bajnov; Svetla Dimitrova Milusheva

Применение метода усреднения к одной двухточечной краевой задаче для нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 14 (1978), No. 2, 61--74

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106993`

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIV: 61—74, 1978

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ОДНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Д. БАЙНОВ, С. Д. МИЛУШЕВА

(Поступило в редакцию 20го мая 1977г)

Метод усреднения возник первоначально в небесной механике. Основный прием этого метода заключается в том, что правые части сложных дифференциальных уравнений, описывающие колебания или вращение заменялись сглаженными, усредненными функциями, не содержащими явно времени t и быстро изменяющихся параметров системы. Получающиеся в результате усредненные уравнения либо точно интегрировались, либо в какой — то мере упрощались, что позволило получить важные выводы относительно изучаемого движения как качественного, так и количественного характера.

Математические основы метода усреднения были положены в работах Н. Н. Крылова [1], [2], Н. Н. Боголюбова [3], Ю. А. Митропольского [4], [5], [6], В. М. Волосова [7], [8] и А. Н. Филатова [9].

Научные исследования многих ученых посвященные расширению возможностей метода и распространению его на новые классы важных задач. В настоящей работе обоснован метод усреднения для решения двухточечной краевой задачи для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

Надо отметить, что метод усреднения для решения двухточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений был впервые обоснован в [10], [11].

Пусть для системы

$$\dot{x} = \varepsilon X\Big(t, x, y, z, \int_0^{y(t)} \varphi_1(t, s, x(s), y(s), z(s))\,\mathrm{d}s\Big),$$

$$\dot{y} = \varepsilon Y\Big(t, x, y, z, \int_0^{y(t)} \varphi_2(t, s, x(s), y(s), z(s))\,\mathrm{d}s\Big), \tag{1}$$

$$\dot z = Z\Big(t, x, y, z, \int\limits_0^{y(t)} \varphi_3(t, s, x(s), y(s), z(s))\,\mathrm{d}s\Big),$$

где x, $X \in R_n$, y, $Y \in R_1$, z, $Z \in R_m$, $\varphi_k \in R_{pk}$, $(k = \overline{1,3})$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, задано краевое условие

$$(2)\qquad \begin{array}{llll} x(0) = x^\circ, & y(0) = y^\circ, & R[\lambda, z(0), z(T)] = 0, & \\ \lambda \in \Lambda \in R_m, & R \in R_m, & T = L\varepsilon^{-1}, & L = \mathrm{const} > 0. \end{array}$$

Наряду с системой (1) рассмотрим вырожденную по отношению к ней систему

$$(3)\qquad \begin{gathered} x = \mathrm{const}, \qquad y = \mathrm{const}, \\ \dot z = Z\Big(t, x, y, z, \int\limits_0^{y} \varphi_3(t, s, x, y, z(s))\,\mathrm{d}s\Big) \end{gathered}$$

с краевым условием

$$(4)\qquad R[\lambda, z(0), z(T)] = 0.$$

Предположим, что решение краевой задачи (3), (4) известно и имеет вид

$$(5)\qquad z = \psi(t, x, y, \lambda, T), \qquad x = \mathrm{const}, \qquad y = \mathrm{const}.$$

Вычислим интегралы

$$\int\limits_0^{y} \varphi_i\big(t, s, x, y, \psi(s, x, y, \lambda, T)\big)\,\mathrm{d}s = \tilde\varphi_i(t, x, y, \lambda, T).$$

(Здесь и всюду дальше $i = 1, 2$).

Тогда, если вдоль интегральных кривых $z = \psi(t, x, y, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от λ средние значения

$$(6)\qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^{T} X\big(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, T), \tilde\varphi_1(t, x, y, \lambda, T)\big)\,\mathrm{d}t = \bar X(x, y),$$

$$(7)\qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^{T} Y\big(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, T), \tilde\varphi_2(t, x, y, \lambda, T)\big)\,\mathrm{d}t = \bar Y(x, y),$$

то усредненной системой первого приближения для медленных переменных $x(t)$ и $y(t)$ краевой задачи (1), (2) назовем систему

$$(8)\qquad \dot\xi = \varepsilon\bar X(\xi, \eta), \qquad \dot\eta = \varepsilon\bar Y(\xi, \eta)$$

с начальным условием

$$(9)\qquad \xi(0) = x^\circ, \qquad \eta(0) = y^\circ.$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и $A = (a_{ij})_{kl}$, то по определению

$$\| x \| = [\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad \| A \| = [\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_{ij}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем теорему о близости компонентов $x(t)$ и $y(t)$ решения $\{x(t), y(t), z(t)\}$ краевой задачи (1), (2) и решения задачи Коши (8), (9).

Теорема 1. Пусть:

1. Функции $X(t, x, y, z, u_1)$ и $Y(t, x, y, z, u_2)$ определены и непрерывны для всех $t \in \Delta = [0, \infty)$, $(x, y, z, u_1, u_2) \in \Omega = \Omega(x, y, z, u_1, u_2) = \Omega(x) \times \Omega(y) \times \Omega(z) \times \times \Omega(u_1) \times \Omega(u_2)$, где $\Omega(x)$, $\Omega(y)$, $\Omega(z)$ – некоторые открытые области пространств R_n, R_1^+ и R_m соответственно, а $\Omega(u_i) = R_{pi}$.

Функции $\varphi_i(t, s, x, y, z)$ определены и непрерывны для всех $t \in \Delta$, $s \in \Delta$ и $(x, y, z) \in \Omega(x, y, z)$.

2. В соответствующих проекциях области $\Omega(t, s, x, y, z, u_1, u_2) = \Delta \times \Delta \times \Omega$ выполняются неравенства

$$\| X(t, x, y, z, u_1) \| \leqq M_1, \qquad \| Y(t, x, y, z, u_2) \| \leqq M_2,$$

$$\| X(t, x, y, z, u_1) - X(t, x', y', z', u_1') \| \leqq \lambda_1 \| x - x' \| + \mu_1 \| y - y' \| + \\ + \Theta_{11}(t) \| z - z' \| + \nu_1 \| u_1 - u_1' \|,$$

$$\| Y(t, x, y, z, u_2) - Y(t, x', y', z', u_2') \| \leqq \lambda_2 \| x - x' \| + \mu_2 \| y - y' \| + \\ + \Theta_{12}(t) \| z - z' \| + \nu_2 \| u_2 - u_2' \|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} X(t, x, y, z, u_1) \right\| \leqq \Theta_{21}(t), \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial z} Y(t, x, y, z, u_2) \right\| \leqq \Theta_{22}(t),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u_1} X(t, x, y, z, u_1) \right\| \leqq \Theta_{31}(t), \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial u_2} Y(t, x, y, z, u_2) \right\| \leqq \Theta_{32}(t),$$

$$\| \varphi_i(t, s, x, y, z) \| \leqq N_i, \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial z} \varphi_i(t, s, x, y, z) \right\| \leqq \delta_i(t, s) \leqq B_i,$$

$$\| \varphi_i(t, s, x, y, z) - \varphi_i(t, s, x', y', z') \| \leqq \sigma_i(t, s) (\| x - x' \| + \| y - y' \| + \\ + \| z - z' \|),$$

где λ_i, μ_i, ν_i, M_i, N_i, B_i – положительные постоянные, а функции $\Theta_{1i}(t)$, $\Theta_{3i}(t)$ и $\sigma_i(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Theta_{1i}(\tau) \, d\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\int_0^t \Theta_{3i}(\tau) \, d\tau \leqq D_i = \text{const}, \qquad c_2 = \| y^\circ \| + LM_2, \qquad c = \max(c_2, b_2),$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^c \sigma_i(\tau, s) \, ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

3. Через каждую точку области $\Omega(t, x, y, z)$ проходит единственная интегральная кривая краевой задачи (3), (4), соответствующая некоторому значению параметра λ причем:

а) Эта кривая определена для всех $t \in \Delta$ и при этих значениях t целиком лежит внутри области $\Omega(z)$.

б) Решение $z = \psi(t, x, y, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4) и $\frac{\partial}{\partial T}\psi(t, x, y, \lambda, T)$ — непрерывные по совокупности всех своих переменных функции, удовлетворяющие в области $\{\Omega(t, x, y) \times \Lambda,\ T \geqq 0\}$ неравенствам

$$\| \psi(t, x, y, \lambda, T) \| \leqq K, \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial T} \psi(t, x, y, \lambda, T) \right\| \leqq g(t, T),$$

где K — положительная постоянная.

4. Для функции $\Theta_{2i}(t)$, $\Theta_{3i}(t)$, $\delta_i(t, s)$ и $g(t, T)$ в области $\{t \geqq 0, s \geqq 0, T \geqq 0\}$ выполняются условия

$$\| g(t, T) \| \leqq K_1 = \text{const},$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \Theta_{2i}(s)\, g(s, \tau)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \mathrm{d}l \int_0^{c_2} \Theta_{3i}(l)\, \delta_i(l, s)\, g(s, \tau)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

5. Система (1) имеет единственное, ограниченное и непрерывное решение $\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ ($\| x(t) \| \leqq b_1$, $\| y(t) \| \leqq b_2$, $\| z(t) \| \leqq b_3$, $b_k = \text{const}$, $k = \overline{1,3}$) определено для всех $t \geqq 0$ и удовлетворяющее условиям

$$x(0) = x^\circ, \qquad y(0) = y^\circ, \qquad R[\lambda, z(0), z(T)] = 0. \tag{10}$$

(в (10) под λ подразумевается некоторое фиксированное значение параметра λ из области Λ).

6. Для всех $(x, y, \lambda) \in \Omega(x, y) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра λ пределы (6) и (7), причем предельные переходы в (6) и (7) происходят равномерно относительно совокупности $(x, y, \lambda) \in \Omega(x, y) \times \Lambda$.

7. Существует единственное решение $\{\xi(t), \eta(t)\}$ задачи Коши (8), (9), которое определено и непрерывно для всех $t \geqq 0$ и лежит в области $\Omega(x, y)$ вместе с некоторой ϱ — окрестностью $(0 < \varrho = \text{const})$.

Тогда, если $\{x(t), y(t), z(t)\}$ — решение краевой задачи (1), (2), а $\{\xi(t), \eta(t)\}$ — решение задачи Коши (8), (9), то для любых $\omega > 0$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^\circ > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$ на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство $\| x(t) - \xi(t) \| + \| y(t) - \eta(t) \| < \omega$.

Доказательство. Введем функции

$$V_1(t, x, y) = \int_{\Omega(x, y)} \Delta_a(x - x', y - y') \left\{ \int_0^t [X(\tau, x', y', \psi(\tau, x', y', \lambda, t), \right.$$

$$\tilde{\varphi}_1(\tau, x', y', \lambda, t)) - \bar{X}(x', y')] \, d\tau\} \, dx' \, dy',$$

$$V_2(t, x, y) = \int_{\Omega(x,y)} \Delta_a(x - x', y - y') \left\{ \int_0^t [Y(\tau, x', y', \psi(\tau, x', y', \lambda, t), \right.$$

$$\left. \tilde{\varphi}_2(\tau, x', y', \lambda, t)) - \bar{Y}(x', y')] \, d\tau \right\} dx' \, dy',$$

где

$$\Delta_a(x, y) = \begin{cases} A_a\left(1 - \dfrac{\| x \|^2 + \| y \|^2}{a^2}\right)^2 & \text{при } \| x \|^2 + \| y \|^2 \leqq a^2 \\ 0 & \text{при } \| x \|^2 + \| y \|^2 > a^2; \end{cases}$$

$$\int_{R_{n+1}} \Delta_a(x, y) \, dx \, dy = 1.$$

В силу условий теоремы существуют такие монотонно убывающие функции $\alpha_i(t)$ ($\alpha_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$), что для всех $(x, y) \in \Omega(x, y)$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t [X(\tau, x, y, \psi(\tau, x, y, \lambda, t), \tilde{\varphi}_1(\tau, x, y, \lambda, t)) - \bar{X}(x, y)] \, d\tau \right\| \leqq \alpha_1(t),$$

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t [Y(\tau, x, y, \psi(\tau, x, y, \lambda, t), \tilde{\varphi}_2(\tau, x, y, \lambda, t)) - \bar{Y}(x, y)] \, d\tau \right\| \leqq \alpha_2(t).$$

Следовательно для всех точек (x, y), a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x, y)$ при $t \geqq 0$ выполняются неравенства

(11) $$\| V_i(t, x, y) \| \leqq t\alpha_i(t),$$

(12) $$\left\| \frac{\partial V_i(t, x, y)}{\partial x} \right\| \leqq I_a t\alpha_i(t),$$

(13) $$\left\| \frac{\partial V_i(t, x, y)}{\partial y} \right\| \leqq I_a t\alpha_i(t),$$

где

$$I_a = \max\left(\int_{R_{n+1}} \left\| \frac{\partial \Delta_a(x, y)}{\partial x} \right\| dx \, dy, \quad \int_{R_{n+1}} \left\| \frac{\partial \Delta_a(x, y)}{\partial y} \right\| dx \, dy \right).$$

Рассмотрим выражения

$$P_1(t, x, y) = \frac{\partial V_1(t, x, y)}{\partial t} - X(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, t), \tilde{\varphi}_1(t, x, y, \lambda, t)) + \bar{X}(x, y),$$

$$P_2(t, x, y) = \frac{\partial V_2(t, x, y)}{\partial t} - Y(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, t), \tilde{\varphi}_2(t, x, y, \lambda, t)) + \bar{Y}(x, y).$$

Для всех точек (x, y), a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x, y)$, при $t \geqq 0$ получаем

$$\| P_i(t, x, y) \| \leqq [2(\lambda_i + \mu_i + \nu_i N_i) + B_i D_i K_1] \, a + 2K\Theta_{1i}(t) +$$

$$+ 2\nu_i(K + a)\int_0^y \sigma_i(t, s)\,\mathrm{d}s + 2\nu_i(K + a)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\int_0^y \sigma_i(t, s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_0^t \Theta_{2i}(\tau)\,g(\tau, t)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \Theta_{3i}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\int_0^y \delta_i(\tau, s)\,g(s, t)\,\mathrm{d}s.$$

Положим

$$\tilde{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon V_1(t, \xi(t), \eta(t)),$$
$$\tilde{y}(t) = \eta(t) + \varepsilon V_2(t, \xi(t), \eta(t)).$$

Так как $\{\xi(t), \eta(t)\}$ при $t \geqq 0$ принадлежит области $\Omega(x, y)$ вместе со своей ϱ — окрестностью, то при $a < \varrho$ для функций $V_i(t, \xi, \eta)$ на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ имеет место соотношение

$$\| \varepsilon V_i(t, \xi(t), \eta(t)) \| \leqq \varepsilon t\alpha_i(t) \leqq \sup_{0\leqq\tau\leqq L} \tau\alpha_i(\tau\varepsilon^{-1}) \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда видно, что если ε достаточно мало, то

$$\| \tilde{x}(t) - \xi(t) \| + \| \tilde{y}(t) - \eta(t) \| < \frac{1}{2}\min(\varrho, \omega). \tag{15}$$

Следовательно на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ кривая $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\}$ принадлежит области $\Omega(x, y)$ вместе в некоторой ϱ_1 — окрестностью ($0 < \varrho_1 < \varrho$) и $\| \tilde{x}(t) \| \leqq d_1$, $\| \tilde{y}(t) \| \geqq d_2$, $d_i = \mathrm{const}$.

Рассмотрим функции

$$(16)\qquad \begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} - \varepsilon X\Big(t, \tilde{x}, \tilde{y}, z, \int_0^{\tilde{y}(t)} \varphi_1(t, s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s), z(s))\,\mathrm{d}s\Big), \\ Q_2(t) &= \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} - \varepsilon Y\Big(t, \tilde{x}, \tilde{y}, z, \int_0^{\tilde{y}(t)} \varphi_2(t, s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s), z(s))\,\mathrm{d}s\Big), \end{aligned}$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$, а $z = z(t)$ — функция входящая в решение краевой задачи (1), (2).

Принимая во внимание (11)—(14) находим, что при $\varepsilon < Lc_2^{-1}$,

$$\| Q_i(t) \| \leqq \varepsilon \| P_i(t, \xi, \eta) \| + \varepsilon^2[\lambda_i t\alpha_1(t) + \mu_i t\alpha_2(t)] +$$

$$+ \varepsilon(K + b_3)\,\Theta_{1i}(t) + \varepsilon\nu_i\left(2c_1 + 2c_2 + \frac{1}{2}\min(\varrho, \omega) + K + b_3\right)\int_0^{c_2} \sigma_i(t, s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \varepsilon^2\nu_i N_i t\alpha_2(t) + \varepsilon^2(M_1 + M_2)\,\mathrm{I}_a t\alpha_i(t), \qquad c_1 = \| x^\circ \| + LM_1.$$

Из условый теоремы следует, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ кривая $\{x(t), y(t)\}$, где $x(t), y(t)$ — компоненты решения $\{x(t), y(t), z(t)\}$ краевой задачи (1), (2), не покидает области $\Omega(x, y)$. Тогда на этом отрезке из (1) и (16) имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| x - \tilde{x} \| \leqq \varepsilon\lambda_1 \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon(\mu_1 + \nu_1 N_1) \| y - \tilde{y} \| +$$

$$+ \varepsilon\nu_1(b_1 + b_2 + d_1 + d_2) \int_0^{b_2} \sigma_1(t, s)\, \mathrm{d}s + \| Q_1(t) \|, \tag{17a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| y - \tilde{y} \| \leqq \varepsilon\lambda_2 \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon(\mu_2 + \nu_2 N_2) \| y - \tilde{y} \| +$$

$$+ \varepsilon\nu_2(b_1 + b_2 + d_1 + d_2) \int_0^{b_2} \sigma_2(t, s)\, \mathrm{d}s + \| Q_2(t) \|. \tag{17б}$$

Суммируя (17а) и (17б) получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\| x - \tilde{x} \| + \| y - \tilde{y} \|) \leqq \varepsilon c_0(\| x - \tilde{x} \| + \| y - \tilde{y} \|) +$$

$$+ \varepsilon \int_0^{b_2} [\tilde{c}_1\sigma_1(t, s) + \tilde{c}_2\sigma_2(t, s)]\, \mathrm{d}s + \| Q_1(t) \| + \| Q_2(t) \|, \tag{18}$$

где

$$c_a = \max(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2 + \nu_1 N_1 + \nu_2 N_2),$$
$$\tilde{c}_i = (b_1 + b_2 + \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2)\, \nu_i.$$

Из (18) ввиду того, что $\tilde{x}(0) = x(0)$ и $\tilde{y}(0) = y(0)$ следует

$$\| x - \tilde{x} \| + \| y - \tilde{y} \| \leqq \int_0^t \{\varepsilon \int_0^{b_2} [\tilde{c}_1\sigma_1(\tau, s) + \tilde{c}_2\sigma_2(\tau, s)]\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \| Q_1(\tau) \| + \| Q_2(\tau) \| \} \exp\{\varepsilon c_0(t - \tau)\}\, \mathrm{d}\tau. \tag{19}$$

Дальше доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [12].

Пусть вдоль интегральных кривых $z = \psi(t, x, y, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от λ средние значения

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, T), u_1)\, \mathrm{d}t = \overline{X}(x, y, u_1), \tag{20}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_1(t, s, x, y, \psi(s, x, y, \lambda, T))\, \mathrm{d}s = \overline{\varphi}_1(t, x, y), \tag{21}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, T), u_2)\, \mathrm{d}t = \overline{Y}(x, y, u_2), \tag{22}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_2(t, s, x, y, \psi(s, x, y, \lambda, T))\, \mathrm{d}s = \overline{\varphi}_2(t, x, y). \tag{23}$$

Тогда усредненной системой первого приближения для медленных переменных $x(t)$ и $y(t)$ краевой задачи (1), (2) назовем систему

$$\dot{\xi} = \varepsilon\overline{X}(\xi, \eta, \int_0^{\eta(t)} \overline{\varphi}_1(t, \xi(s), \eta(s))\, \mathrm{d}s) \tag{24}$$

(24) $$\dot{\eta} = \varepsilon \overline{Y}(\xi, \eta, \int_0^{\eta(t)} \overline{\varphi}_2(t, \xi(s), \eta(s))\, \mathrm{d}s)$$

с начальным условием

(25) $$\xi(0) = x^\circ, \qquad \eta(0) = y^\circ$$

Теорема 2. Пусть:

1. Выполнены условия 1, 3 и 5 теоремы 1.

2. В соответствующих проекциях области $\Omega(t, s, x, y, z, u_1, u_2) = \Delta \times \Delta \times \Omega$ выполняются неравенства

$$\| X(t, x, y, z, u_1) \| \leqq M_1, \qquad \| Y(t, x, y, z, u_2) \| \leqq M_2,$$

$$\| X(t, x, y, z, u_1) - X(t, x', y', z', u_1') \| \leqq \lambda_1 \| x - x' \| + \mu_1 \| y - y' \| + \\ + \Theta_{11}(t) \| z - z' \| + \nu_1 \| u_1 - u_1' \|,$$

$$\| Y(t, x, y, z, u_2) - Y(t, x', y', z', u_2') \| \leqq \lambda_2 \| x - x' \| + \mu_2 \| y - y' \| + \\ + \Theta_{12}(t) \| z - z' \| + \nu_2 \| u_2 - u_2' \|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} X(t, x, y, z, u_1) \right\| \leqq \Theta_{21}(t), \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial z} Y(t, x, y, z, u_2) \right\| \leqq \Theta_{22}(t),$$

$$\| \varphi_i(t, s, x, y, z) \| \leqq N_i,$$

$$\| \varphi_i(t, s, x, y, z) - \varphi_i(t, s, x', y', z) \| \leqq \sigma_i(t, s) (\| x - x' \| + \| y - y' \|),$$

где λ_i, μ_i, ν_i, M_i, N_i — положительные постоянные, а функции $\Theta_{1i}(t)$ и $\sigma_i(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Theta_{1i}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^c \sigma_i(\tau, s)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$c_2 = \| y^\circ \| + LM_2, \qquad c = \max(b_2, c_2).$$

3. Для функцнй $\Theta_{2i}(t)$ и $g(t, T)$ в области $\{t \geqq 0,\ T \geqq 0\}$ выполнено условие

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \Theta_{2i}(s)\, g(s, \tau)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

4. Для всех $(t, x, y, u_1, u_2, \lambda) \in \Omega(t, x, y, u_1, u_2) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра λ пределы (20)–(23), причем предельные переходы в (20)–(23) происходят равномерно относительно совокупности $(t, x, y, u_1, u_2, \lambda) \in \in \Omega(t, x, y, u_1, u_2) \times \Lambda$.

Функции $\overline{X}(x, y, u_1)$, $\overline{Y}(x, y, u_2)$, $\overline{\varphi}_i(t, x, y)$, $\dfrac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_i(t, x, y)$ определены и непрерывны в области $\Omega(t, s, x, y, z, u_1, u_2)$ и удовлетворяют в этой области условиям

$$\| \bar{\varphi}_i(t, x, y) - \varphi_i(t, s, x, y, z) \| \leqq \Phi_i(t, s),$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^{c_2} \Phi_i(\tau, s) \, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \bar{\varphi}_i(t, x, y) \right\| \leqq H_i(t),$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tau H_i(\tau) \, \mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

5. Существует единственное решени $\{\xi(t), \eta(t)\}$ задачи Коши (24), (25), которое определено и непрерывно для всех $t \geqq 0$ и при этих значениях t лежит в области $\Omega(x, y)$ вместе с некоторой ϱ – окрестностью ($0 < \varrho = \text{const}$).

Тогда, если $\{x(t), y(t), z(t)\}$ – решение краевой задачи (1), (2), а $\{\xi(t), \eta(t)\}$ – решение задачи Коши (24), (25), то для любых $\omega > 0$ и $L > 0$, можно указать такое $\varepsilon^\circ > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$ на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ выполнялось неравенство $\| x(t) - \xi(t) \| + \| y(t) - \eta(t) \| < \omega$.

Пусть вдоль интегральных кривых $z = \psi(t, x, y, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от λ средние значения

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, T), u_1) \, \mathrm{d}t = \bar{X}(x, y, u_1), \tag{26}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_1(t, s, x, y, \psi(s, x, y, \lambda, T)) \, \mathrm{d}t = \bar{\varphi}_1(s, x, y), \tag{27}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(t, x, y, \psi(t, x, y, \lambda, T), u_2) \, \mathrm{d}t = \bar{Y}(x, y, u_2), \tag{28}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_2(t, s, x, y, \psi(s, x, y, \lambda, T)) \, \mathrm{d}t = \bar{\varphi}_2(s, x, y). \tag{29}$$

Тогда усредненной системой первого приближения для медленных переменных $x(t)$ и $y(t)$ краевой задачи (1), (2) назовем систему

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon \bar{X}\Big(\xi, \eta, \int_0^{\eta(t)} \bar{\varphi}_1(s, \xi(s), \eta(s)) \, \mathrm{d}s\Big) \\ \dot{\eta} &= \varepsilon \bar{Y}\Big(\xi, \eta, \int_0^{\eta(t)} \bar{\varphi}_2(s, \xi(s), \eta(s)) \, \mathrm{d}s\Big) \end{aligned} \tag{30}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^\circ, \qquad \eta(0) = y^\circ. \tag{31}$$

Теорема 3. Пусть:

1. Выполнены условия 1, 2 и 3 теоремы 2.

2. Для всех $(s, x, y, u_1, u_2, \lambda) \in \Omega(s, x, y, u_1, u_2) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра λ пределы (26)–(29), причем предельные переходы в (26)–(29) происходят равномерно относительно совокупности $(s, x, y, u_1, u_2, \lambda) \in \in \Omega(s, x, y, u_1, u_2) \times \Lambda$.

Функции $\bar{X}(x, y, u_1)$, $\bar{Y}(x, y, u_2)$, $\bar{\varphi}_i(s, x, y)$ определены и непрерывны в области $\Omega(t, s, x, y, z, u_1, u_2)$ и удовлетворяют в этой области условиям

$$\| \bar{\varphi}_i(s, x, y,) - \varphi_i(t, s, x, y, z) \| \leqq \Phi_i(t, s),$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^{c_2} \Phi_i(\tau, s)\, ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

3. Существует единственное решение $\{\xi(t), \eta(t)\}$ задачи Коши (30), (31), которое определено и непрерывно для всех $t \geqq 0$ и при этих значениях t лежит в области $\Omega(x, y)$ вместе с некоторой ϱ — окрестностью $(0 < \varrho = \text{const})$.

Тогда если $\{x(t), y(t), z(t)\}$ — решение краевой задачи (1), (2), а $\{\xi(t), \eta(t)\}$ — решение задачи Коши (30), (31), то для любых $\omega > 0$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^\circ > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$, на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство $\| x(t) - \xi(t) \| + \| y(t) - \eta(t) \| < \omega$.

Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично теоремы 1.

Рассмотрим систему

$$(32) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X\Big(t, x, y, z, \int_0^{y(t)} \varphi_1(t, s, x(s), y(s), z(s))\, ds\Big) \\ \dot{y} &= Y\Big(t, x, y, z, \int_0^{y(t)} \varphi_2(t, s, x(s), y(s), z(s))\, ds\Big) \\ \dot{z} &= Z\Big(t, x, y, z, \int_0^{y(t)} \varphi_3(t, s, x(s), y(s), z(s))\, ds\Big), \end{aligned}$$

где $x, X \in R_n$, y, $Y \in R_1$, z, $Z \in R_m$, $\varphi_k \in R_{pk}$, $k = 1,3$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть для системы (32) задано краевое условие

$$(33) \qquad \begin{aligned} &x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), z(0), y(T), z(T)] = 0, \\ &\lambda \in \Lambda \subset R_{m+1}, \qquad R \in R_{m+1}, \qquad T = L\varepsilon^{-1}, \qquad L = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Наряду с системой (1) рассмотрим вырожденную по отношению к ней систему

$$(34) \qquad \begin{aligned} x &= \text{const} \\ \dot{y} &= Y\Big(t, x, y, z, \int_0^{y(t)} \varphi_2(t, s, x, y(s), z(s))\, ds\Big) \\ \dot{z} &= Z\Big(t, x, y, z, \int_0^{y(t)} \varphi_3(t, s, x, y(s), z(s))\, ds\Big) \end{aligned}$$

с краевым условием

$$(35) \qquad R[\lambda, y(0), z(0), y(T), z(T)] = 0.$$

Предположим, что решение краевой задачи (34), (35) известно и имеет вид

$$(36)\qquad x = \text{const}, \qquad y = \varphi(t, x, \lambda, T), \qquad z = \psi(t, x, \lambda, T)$$

и что можно вычислить интеграл

$$\int_0^{\varphi(t,x,\lambda,T)} \varphi_1(t, s, x, \varphi(s, x, \lambda, T), \psi(s, x, \lambda, T))\, \mathrm{d}s = \tilde{\varphi}_1(t, x, \lambda, T).$$

Тогда если вдоль интегральных кривых $\{y = \varphi(t, x, \lambda, T),\ z = \psi(t, x, \lambda, T)\}$ краевой задачи (34), (35), где λ рассматривается как векторный параметр, существует независящее от λ среднее значение

$$(37)\qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \varphi(t, x, \lambda, T), \psi(t, x, \lambda, T), \tilde{\varphi}_1(t, x, \lambda, T))\, \mathrm{d}t = \overline{X}(x),$$

то усредненной системой первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (32), (33) назовем систему

$$(38)\qquad \dot{\xi} = \varepsilon \overline{X}(\xi)$$

с начальным условием

$$(39)\qquad \xi(0) = x^\circ.$$

Теорема 4. Пусть:

1. Функция $X(t, x, y, z, u)$ определена и непрерывна для всех $t \in \Delta = [0, \infty)$ и $(x, y, z, u) \in \Omega = \Omega(x, y, z, u) = \Omega(x) \times \Omega(y) \times \Omega(z) \times \Omega(u)$, где $\Omega(x)$, $\Omega(y)$, $\Omega(z)$ – некоторые открытые области пространств R_n, R_1^+, R_m соответственно, а $\Omega(u) = R_{p1}$.

Функция $\varphi_1(z, s, x, y, z)$ определена и непрерывна для всех $t \in \Delta$, $s \in \Delta$, $(x, y, z) \in \Omega(x, y, z)$.

2. В соответствующих проекциях области $\Omega(t, s, x, y, z, u) = \Delta \times \Delta \times \Omega$ выполняются неравенства

$$\| X(t, x, y, z, u) \| \leqq M, \qquad \| X(t, x, y, z, u) - X(t, x', y', z', u') \| \leqq$$
$$\leqq \lambda \| x - x' \| + \Theta_1(t) \| y - y' \| + \Theta_2(t) \| z - z' \| + \nu \| u - u' \|,$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} X(t, x, y, z, u) \right\| \leqq \Theta_3(t), \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial z} X(t, x, y, z, u) \right\| \leqq \Theta_4(t),$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} X(t, x, y, z, u) \right\| \leqq \Theta_5(t), \qquad \| \varphi_1(t, s, x, y, z) \| \leqq \delta(t, s) \leqq N,$$
$$\| \varphi_1(t, s, x, y, z) - \varphi_1(t, s, x', y', z') \| \leqq \sigma(t, s)(\| x - x' \| + \| y - y' \| + \| z - z' \|)$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(t, s, x, y, z) \right\| \leqq \delta_1(t, s), \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial z} \varphi_1(t, s, x, y, z) \right\| \leqq \delta_2(t, s),$$

где M, λ, ν, N – положительные постоянные, а функции $\Theta_i(t)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t}\int_0^t \Theta_i(\tau)\,d\tau \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

3. Через каждую точку области $\Omega(t, x, y, z)$ проходит единственная интегральная кривая краевой задачи (34), (35), соответствующая некоторому значению параметра λ, причем:

а) Эта кривая определена для всех $t \in \Delta$ и при этих значениях t целиком лежит внутри области $\Omega(y, z)$.

б) Решение $\{y = \varphi(t, x, \lambda, T),\ z = \psi(t, x, \lambda, T)\}$ краевой задачи (34), (35) и функции $\frac{\partial}{\partial T}\varphi(t, x, \lambda, T)$, $\frac{\partial}{\partial T}\psi(t, x, \lambda, T)$ — непрерывные по совокупности всех своих переменных и удовлетворяют в области $\{\Omega(t, x) \times \Lambda,\ T \geqq 0\}$ неравенствам

$$0 \leqq \varphi(t, x, \lambda, T) \leqq K, \qquad \|\psi(t, x, \lambda, T)\| \leqq K_1,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial T}\varphi(t, x, \lambda, T)\right\| \leqq g(t, T), \qquad \left\|\frac{\partial}{\partial T}\psi(t, x, \lambda, T)\right\| \leqq h(t, T).$$

4. Краевая задача (32), (33) имеет единственное ограниченное и непрерывное решение $\{x(t), y(t), z(t)\}$ определено для всех $t \geqq 0$ и удовлетворяющее условиям

$$(40) \qquad x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), z(0), y(T), z(T)] = 0,$$

$$\|x(t)\| \leqq b_1, \qquad \|y(t)\| \leqq b_2, \qquad \|z(t)\| \leqq b_3, \qquad b_i = \text{const}, \qquad i = \overline{1,3}.$$

(в (40) под λ подразумевается некоторое фиксированное значение параметра λ из области Λ).

5. Для функций $\Theta_i(t)$ $(i = \overline{3,5})$, $\sigma(t, s)$, $\delta(t, s)$, $\delta_1(t, s)$, $\delta_2(t, s)$, $g(t, T)$ и $h(t, T)$ в области $\{t \geqq 0,\ s \geqq 0,\ T \geqq 0\}$ выполняются условия

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^c \sigma(\tau, s)\,ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^c \delta(\tau, s)\,ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \Theta_i(s)\,g(s, \tau)\,ds \to 0 \quad (i = \overline{3,5}) \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \Theta_4(s)\,h(s, \tau)\,ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau dl \int_0^K \Theta_5(l)\,\delta_1(l, s)\,g(s, \tau)\,ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau dl \int_0^K \Theta_5(l)\,\delta_2(l, s)\,h(s, \tau)\,ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

где $c = \max(K, b_2)$.

6. Для всех $(x, \lambda) \in \Omega(x) \times \Lambda$ существует независящий от параметра λ предел (37), причем предельный переход в (37) происходит равномерно относительно совокупности $(x, \lambda) \in \Omega(x) \times \Lambda$.

7. Существует единственное решение $\xi(t)$ задачи Коши (38), (39), которое определено и непрерывно для всех $t \geqq 0$ и лежит в области $\Omega(x)$ вместе с некоторой ϱ — окрестностью $(0 < \varrho = \text{const})$.

Тогда, если $\{x(t), y(t), z(t)\}$ — решение краевой задачи (32), (33), а $\xi(t)$ — решение задачи Коши (38), (39), то для любых $\omega > 0$ и $L > 0$, можно указать такое $\varepsilon^\circ > 0$,что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$ на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ выполнялось неравенство $\| x(t) - \xi(t) \| < \omega$.

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 1 при помощи функции

$$v(t, x) =$$

$$= \int_{\Omega(x)} \Delta_a(x - x') \{\int_0^t [X(\tau, x', \varphi(\tau, x', \lambda, t), \psi(\tau, x', \lambda, t), \tilde{\varphi}_1(\tau, x', \lambda, t)) - \bar{X}(x')] \,\mathrm{d}\tau\} \,\mathrm{d}x',$$

где

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} A_a\left(1 - \dfrac{\| x \|^2}{a^2}\right)^2 & \text{при } \| x \| \leqq a \\ 0 & \text{при } \| x \| > a, \end{cases}$$

$\int_{R_n} \Delta_a(x) \,\mathrm{d}x = 1.$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.: *Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.* Изд-во АН УССР, Киев, 1943.

[2] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.: *Введение в нелинейную механику.* Изд-во АН УССР, Киев, 1937.

[3] Боголюбов Н. Н.: *О некоторых статистических методах в математической физике.* Изд-во АН УССР, Киев, 1945.

[4] Митропольский Ю. А.: *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.* „Наука", Москва, 1964.

[5] Митропольский Ю. А.: *Лекции по методу усреднения в нелинейной механике.* „Наукова думка", Киев, 1966.

[6] Митропольский Ю. А.: *Метод усреднения в нелинейной механике.* „Наукова думка", Киев, 1971.

[7] Волосов В. М.: *Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.* УМН, т. 17, вып. 6 (108), 1962.

[8] Волосов В. М., Моргунов Б. И.: *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.* Изд-во Московского университета, Москва, 1971.

[9] Филатов А. Н.: *Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях.* Изд-во „ФАН", Ташкент, 1971.

[10] **Байнов Д. Д.**: *Метод усреднения для одной двухточечной краевой задачи.* Математички весник, 5 (20), Св. 2, 1968.

[11] **Байнов Д. Д.**: *Асимптотические формулы для одной краевой задачи.* Труды V. международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 1, Киев, 1970.

[12] **Байнов Д. Д., Милушева С. Д.**: *Об одном варианте метода усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений стандартного типа.* Arch. Math. 3, 1975.

Д. Д. Байнов
София — 4, Оборище 23
Болгария

С. Д. Милушева
София — 8, Деде-агач 11
Болгария