Michail M. Konstantinov

Об оценке и устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздыванием в Банаховом пространстве

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 4, 187--190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106977`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 187—190, 1977

ОБ ОЦЕНКЕ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. М. КОНСТАНТИНОВ, София

(Поступило в редакцию 27-го мая 1976 г.)

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \text{(1)} \qquad & \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \Delta)),\ t \in J = (0, T); \\ & x(t) = \varphi(t),\ t \in I = [-\Delta, 0], \end{aligned}$$

в банаховом пространстве B с нормой $\| \,.\, \|$, где $0 < \Delta < T \leqq \infty$ и $f(t, 0, 0) \equiv 0$.

В настоящей работе находятся оценки решений и условия экспоненциальной асимптотической устойчивости тривиального решения начальной задачи (1). При этом результаты работы [1] обобщаются и уточняются.

Дальше будем предполагать, что выполнены следующие условия (A):

A1. Функция $f : G = J \times B \times B \to B$ непрерывна по t.

A2. Существует линейная интегрально-ограниченная оператор-функция $A(t)$, $t \in J$, такая что в области G выполнено неравенство

$$\| f(t, u, v) - A(t) u \| \leqq m(t) (\| u \|^{1+\alpha} + q \| v \|^{1+\alpha}),$$

где $q \geqq 0$, $\alpha > -1$, а $m(t)$ — локально ограниченная и интенгруемая на J скалярная функция.

A3. Эволюционный оператор $U(t, s) = U(t)\, U^{-1}(s)$ однородного уравнения $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \text{(2)} \qquad & \| U(t, s) \| \leqq \nu \exp (\lambda(t - s)),\ t \geqq s \geqq 0; \\ & \nu > 0,\ -\infty < \lambda < \infty. \end{aligned}$$

A4. Функция $\varphi : I \to B$ ограничена, измерима и интегруема по Бохнеру.

Отметим, что условие A3 следует из интегральной ограниченности оператор-функции $A(t)$. В частности оценка (2) имеет место в случае, когда $A(t) = A$ —

стационарный производящий оператор полугруппы $U(t)$, где $U(t)\,a \to a$ при $t \to \theta$ для каждого $a \in B$ [2].

Положим

$$\Phi_\alpha = \nu \,\| \varphi(0) \| + \nu q \int_0^\Delta m(s) \,\| \varphi(s - \Delta) \|^{1+\alpha} \exp(-\lambda s)\, ds,$$

$$Q_\alpha = q \exp(-\lambda\Delta(1 + \alpha)), \tag{3}$$

$$M_\alpha(t) = \nu \int_0^t m(s) \exp(\lambda\alpha s)\, ds.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (A). *Пусть кроме того*

$$\alpha\Phi_\alpha^\alpha (1 + Q_\alpha)\, M_\alpha(T) < 1. \tag{4}$$

Тогда при $t \in J$ *имеет место оценка*

$$\| x(t) \| \leqq \Phi_\alpha[1 - \alpha\Phi_\alpha^\alpha(1 + Q_\alpha)\, M_\alpha(t)]^{-1/\alpha} \exp(\lambda t). \tag{5}$$

Если в частности $\alpha = 0$, *то*

$$\| x(t) \| \leqq \Phi_0 \exp\big(\lambda t + M_0(t)\big), \quad t \in J. \tag{6}$$

Доказательство. В силу эквивалентного представления решения (1)

$$x(t) = U(t)\,\varphi(0) + \int_0^t U(t, s)\,[f(s, x(s), x(s - \Delta)) - A(s)\,x(s)]\, ds, \qquad t \in J,$$

и условий (А) получаем

$$\| x(t) \| \leqq \nu \left\{ \| \varphi(0) \| + \int_0^t m(s)\,[\| x(s) \|^{1+\alpha} + q\, \| x(s - \Delta) \|^{1+\alpha}] \exp(-\lambda s)\, ds \right\} \times$$

$$\times \exp(\lambda t) \leqq \left\{ \Phi_\alpha + \nu \int_0^t m(s)\,[\| x(s) \|^{1+\alpha} + q p(s)\, \| x(s - \Delta) \|^{1+\alpha}] \exp(-\lambda s)\, ds \right\} \times$$

$$\times \exp(\lambda t),$$

$$t \in J,$$

где

$$p(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, \Delta], \\ 1, & s \bar{\in} [0, \Delta]. \end{cases}$$

Следовательно $\| x(t) \| \leqq X(t)$, $t \in J$, где функция $X(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$X(t) \leqq \left\{ \Phi_\alpha + \nu \int_0^t m(s) \left[X^{1+\alpha}(s) + q X^{1+\alpha}(s - \Delta) \right] \exp(-\lambda s) \, ds \right\} \exp(\lambda t), \qquad t \in J,$$

и условию $X(t) = 0$, $t \in I$. Отсюда $X(t - \Delta) \leqq X(t) \exp(-\lambda \Delta)$.

Положим

$$Y(t) = X(t) \exp(-\lambda t). \tag{7}$$

Тогда

$$Y(t) \leqq \Phi_\alpha + \nu(1 + Q_\alpha) \int_0^t m(s) Y^{1+\alpha}(s) \exp(\lambda \alpha s) \, ds, \qquad t \in J.$$

На основании леммы Бихари из последнего неравенства и (7) получаем, что справедливо неравенство (5). Неравенство (6) получается из (5) предельным переходом $\alpha \to 0$. При этом условие (4) заведомо выполняется для $T < \infty$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (4) *при* $T = \infty$. *Пусть кроме того* $\lambda < 0$. *Тогда тривиальное решение задачи Коши* (1) *экспоненциально асимптотически устойчиво с показателем* λ.

При $\alpha \neq 0$ *и* $\lambda < 0$ *область экспоненциальной асимптотической устойчивости в множестве начальных функций можно определить следующим образом на основе* (4) *и* (3). *Пусть* $z = \varrho$ — *положительный корень уравнения*

$$z + \beta z^{1+\alpha} = \left[\alpha \nu^\alpha (1 + Q_\alpha) M_\alpha(\infty) \right]^{-1/\alpha},$$

где

$$\beta = q \int_0^\Delta m(s) \exp(-\lambda s) \, ds.$$

Тогда показатель экспоненциального роста всех решений начальной задачи (1), *порожденных функциями* φ,

$$\sup \{ \| \varphi(t) \| : t \in I \} < \varrho,$$

не больше $\lambda < 0$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (4) *при* $\alpha = 0$ *и* $T = \infty$. *Пусть кроме того*

$$\omega = \lambda + \overline{\lim_{t \to \infty}} \, t^{-1} M_0(t) < 0.$$

Тогда тривиальное решение задачи Коши (1) *глобально экспоненциально асимптотически устойчиво с показателем* ω.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кореневский Д. Г., Фещенко Т. С.: *К абстрактной задаче Коши для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Устойчивость решений.* Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 10, 1895—1898.

[2] Хилле Э., Филлипс Р.: *Функциональный анализ и полугруппы.* ИЛ, Москва, 1962.

М. М. Константинов
1504 София, ул. Омуртаг № 10
Болгария