Léonid E. Krivochéine; Démètre J. Mangeron; Mehmet Namik Oğuztöreli; D. Salandi

Problèmes concernant différentes classes d'équations intégro-différentielles non linéaires aux opérateurs polyvibrants

Archivum Mathematicum, Vol. 12 (1976), No. 2, 75--80

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106931`

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XII: 75—80, 1976

PROBLEMES CONCERNANT DIFFERENTES CLASSES D'EQUATIONS INTEGRO-DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES AUX OPERATEURS POLYVIBRANTS

L. E. KRIVOCHÉINE[1]), D. MANGERON[2]), M. N. OGUZTORELI[3]) et D. SALANDI[4])

A la Mémoire de M. LUCIEN GODEAUX

Maître à nous tous

(Présenté le 7 juillet 1976)

Resumé. – Les auteurs, tout en continuant la série de leurs travaux consacrés à l'étude des équations polyvibrantes [1]–[6], dont l'essor est dû à l'initiateur des Colloques internationaux du CBRM, aujourd'hui notre profondément regretté Maître, M. L. Godeaux, et dont le champ d'application inclut, entre autres, l'automation des projets de construction des surfaces de forme quelconque [7] et la propagation des ondes électromagnétiques dans le plasma [8], exposent dans ce qui suit le problème de la capacité de détermination des solutions d'une classe d'équations intégrodifférentielles non linéaires aux opérateurs polyvibrants et donnent les résultats de l'évaluation des erreurs commises si l'on se borne aux solutions approchées du système différentiel aux structures complexes considéré.

Summary. – The authors have published a set of their research work devoted to studies on polyvibrating or polywave equations [1]–[6], subsequently applied, for. instance, to problems concerning automated design of free form surfaces [7] or to propagation of electromagnetic waves in plasma [8]. In what follows the capacity of determination of the solutions of a certain class of nonlinear integro-differential systems with polywave or polyvibrating operators is studied. The existence, the unicity

[1]) Kirgizian State University, Frunze, Kirg. SSR, U.S.S.R.

[2]) Polytechnic Institute of Jassy. At present: Visiting Professor, Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada. Romania.

The author wishes to express his warmest thanks for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of the University of Alberta and subsequently in the Department of Computer Science of the Concordia University.

[3]) Department of Mathematics. The University of Alberta. The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada under Grant NRC-A4 345 through the University of Alberta, Edmonton, Alta.

[4]) Istituto di Matematica dell'Università di Perugia, Italia.

and the stability theorems are established, the valuation of the commited errors by choosing approximate solutions is given and the relationship with a very recent previous work [9] is pointed out.

1. Les auteurs, tout en continuant la série de leurs travaux consacrés à l'étude des équations polyvibrantes [1]–[6], dont l'essor est dû à l'initiateur des Colloques internationaux de CBRM, aujourd'hui notre profondément regretté Maître, M. L. Godeaux, et dont le champs d'application inclut, entre autres, l'automation des projets de construction des surfaces de forme quelconque [7] et la propagation des ondes électromagnétiques dans le plasma [8], exposent dans ce qui suit le problème de la capacité de détermination des solutions d'une classe d'èquations intégrodifférentielles aux opérateurs polyvibrants et donnent les résultats de l'évaluation des erreurs commises si l'on se borne aux solutions approchées du système différentiel aux structures complexes considéré ci-dessous.

2. Soit l'équation intégrodifférentielle non linéaire aux opérateurs polyvibrants

$$M^2[u(x,t)] = f[x, t, u(x,t), M]u(x,t),$$

$$\tag{1} \int_a^x K(x,t,\zeta,u(\zeta,t),M[u(\zeta,t)])\,d\zeta, \quad \int_\alpha^t P(x,t,\tau,u(x,\tau),M[u(x,\tau)])\,d\tau] \equiv A[u],$$

où la fonction inconnue $u(x, t)$ est soumise aux conditions à la frontière classiques

$$\tag{2} \begin{aligned} &u(x,\alpha) = \varphi(x), \quad u(a,t) = \psi(t), \quad \varphi(a) = \psi(\alpha) = p, \\ &u'_x(a,t) = r(t), \quad u'_t(x,\alpha) = \beta(x), \quad r'(\alpha) = s'(a) = g, \end{aligned}$$

$M^n[.] \equiv \partial^{2n}/\partial x^n\, \partial t^n$ est l'opérateur polyvibrant d'ordre n à deux variables indépendantes, correspondant dans (1) à $n = 2$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $s(x)$ et $r(t)$ sont des fonctions définies, continues et continuement différentiables par rapport à leurs argumenta pour $\forall(x,t) \in [a,b] \times [\alpha,\gamma]$ et les fonctions $f(x,t,v_1,v_2,v_3,v_4)$, $K(x,t,\zeta,v_5,v_6)$ et $P(x,t,\tau,v_7,v_8)$, définies, continues et lipschitziennes dans le domaine

$$D = \{a \leqq \zeta \leqq x \leqq b, \alpha \leqq \tau \leqq t \leqq \gamma, 0 \leqq |v_i| \leqq r_i = \text{const}, \ i = \overline{1,8}\}$$

par rapport à leurs arguments v_i, $i = \overline{1,8}$. Soient encore $L_{if}(x,t)$, $i = \overline{1,4}$, $L_{iK}(x,t,\zeta)$, $i = 1, 2$ et $L_{iP}(x,t,\tau)$, $i = 1, 2$, les coefficients de Lipschitz correspondants, continus et non négatifs dans D.

Tout en renonçant ici à l'utilisation de l'une des méthodes exposées dans [9] à l'occasion de l'étude d'une autre classe d'équations intégrodifférentielles non linéaires aux opérateurs polyvibrants, on en déduit de l'équation (1), tout en tenant compte des conditions (2), l'équation

$$\tag{3} M[u(x,t)] = g(x,t) + \int_a^x \int_\alpha^t A[u]\,d\Theta\,d\eta, \qquad g(x,t) \equiv s'(x) + r'(t) - g,$$

et par suite, après avoir mis

$$\mathrm{M}[u(x, t)] = w(x, t), \tag{4}$$

on obtient, toujours en vertu du système (2), la relation

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t) - p + \int_a^x \int_\alpha^t w(\zeta, \tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\zeta \equiv$$

$$\equiv \sigma(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t w(\zeta, \tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\zeta, \tag{5}$$

et, en définitif, pour la nouvelle fonction inconnue $w(x, t)$, l'équation intégrale non linéaire

$$w(x, t) = g(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t f[\eta, \Theta, \sigma(\eta, \Theta) + \int_a^\eta \int_\alpha^\Theta w(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\xi, w(\eta, \Theta),$$

$$\int_a^\eta K(\eta, \Theta, \xi, \sigma(\xi, \Theta) + \int_a^\xi \int_\alpha^\Theta w(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\xi, w(\xi, \Theta))\, \mathrm{d}\xi, \tag{6}$$

$$\int_\alpha^\Theta P(\eta, \Theta, \tau, \sigma(\eta, \tau) + \int_a^\eta \int_\alpha^\tau w(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\xi, w(\eta, \tau))\, \mathrm{d}\tau]\, \mathrm{d}\Theta\, \mathrm{d}\eta \equiv H[w].$$

Après avoir étudié le comportement de l'opérateur non linéaire $H[.]$ et établi les conditions afin qu'il soit un opérateur de contraction dans D, on est conduit, pour $\|\,.\,\| = \lim_D |\,.\,|$, au suivant.

Théorème 1. *Condition suffisante afin que le système différentiel possédant la structure complexe* (1), (2) *admet une solution et une seule s'exprime par l'inégalité*

$$k_1 = \| \int_a^x \int_\alpha^t \{L_{1f}(\eta, \Theta)(\eta - a)(\Theta - \alpha) + L_{2f}(\eta, \Theta) + L_{3f}(\eta, \Theta) \times$$

$$\int_a^\eta [L_{1K}(\eta, \Theta, \xi)(\xi - a)(\Theta - \alpha) + L_{2K}(\eta, \Theta, \xi)]\, \mathrm{d}\xi + \tag{7}$$

$$L_{4f}(\eta, \Theta) \int_\alpha^\Theta [L_{1\mathrm{P}}(\eta, \Theta, \tau)(\eta - a)(\Theta - \alpha) + L_{2\mathrm{P}}(\eta, \Theta, \tau)]\, \mathrm{d}\tau\}\, \mathrm{d}\Theta\, \mathrm{d}\eta \| < 1$$

et, une fois la validité de (7) *en est assurée, cette solution peut être construite grâce à l'application de la méthode des itérations*

$$u_n(x, t) = \sigma(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t w_n(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\xi, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

où l'on a mis

$$w_n(x, t) = w_{n-1}(x, t) + \lambda r_{n-1}(x, t), \quad \lambda = \text{const},$$

(9) $$r_{n-1}(x, t) = w_{n-1}(x, t) - H[w_{n-1}].$$

En choisissant le nombre constant λ en vertu de (7) de sorte que l'on ait

$$k_2 = | 1 + \lambda | + k_1 | \lambda | < 1,$$

on obtient les évaluations des erreurs commises

(10) $$\| w(x, t) - w_n(x, t) \| \leqq k_2^n \| w_0 - H[w_0] \| : (1 - k_1) = R_n$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0,$$

(11) $$\| u(x, t) - u_n(x, t) \| \leqq (x - a)(t - \alpha) R_n$$

et il s'ensuit que le processus des approximations successives (8) converge uniformément and absolument dans D vers la solution du problème (1), (2).

3. *Etude de la stabilité dans D des solutions du problème* (1), (2).

Soit

(12) $$M^2[v(x, t)] = f[x, t, v(x, t), M[v(x, t)], \int_a^x N(x, t, \xi, v(\xi, t), M[v(\xi, t)]) \, d\xi, \int_\alpha^t Q(x, t, \tau, v(x, \tau), \quad M[v(x, \tau)] \, d\tau] \equiv R[v],$$

(13) $$\begin{aligned} &v(x, \alpha) = \varphi(x), \quad v(a, t) = \psi(t), \quad \varphi(a) = \psi(\alpha) = p, \\ &v'_x(a, t) = r(t), \quad v'_t(x, \alpha) = s(x), \quad r'(\alpha) = s'(a) = q, \end{aligned}$$

le système „perturbé" du système initial (1), (2), où la nouvelle fonction inconnue est $v(x, t)$ et les fonctions $N(.)$ et $Q(.)$ sont reliées, pour chaque quadruple de fonctions y_i, z_i $(i = \overline{1-4})$ arbitraires et continues dans D et pour $\delta_i(.)$ $(i = \overline{1-6})$-fonctions définies, non négatives et continues dans le même domaine, aux fonctions $K(.)$ et $P(.)$ par les inégalités

(14) $$\left\{ \begin{aligned} &| K(x, t, \zeta, J_1, J_2) - N(x, t, \zeta, z_1, z_2) | \leqq \\ &\delta_1(x, t, \zeta) + \delta_2(x, t, \zeta) \, | y_1 - z_1) + \delta_3(x, t, \zeta) \, | y_2 - z_2 |, \\ &| P(x, t, \tau, y_3, y_y) - Q(x, t, \tau, z_3, z_y) | \leqq \\ &\delta_4(x, t, \tau) + \delta_5(x, t, \tau) \, | y_3 - z_3 | + \delta_6(x, t, \tau) \, | y_4 - z_4 | \end{aligned} \right.$$

On peut énoncer dans cet égard le suivant

Théorème 2. *Le système intégrodifférentiel non linéaire perturbé* (12), (13) *possède dans D une solution et une seule* $v(x, t) \in C^{2,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ *si l'on est assuré de la validité de l'inégalité*

$$k_3 = \| \int_a^x \int_\alpha^t \{ L_{1f}(\eta, \Theta)(\eta - a)(\Theta - \alpha) + L_{2f}(\eta, \Theta) +$$

$$(15) \qquad + L_{3f} \int_{a}^{\eta} [L_{1N}(\eta, \Theta, \xi)(\xi - a)(\Theta - \alpha) + L_{2N}(\eta, \Theta, \xi)]\, d\xi +$$

$$+ L_{4f}(\eta, \Theta) \int_{\alpha}^{\Theta} [L_{1Q}(\eta, \Theta, \tau)(\eta - a)(\Theta - \alpha) + L_{2Q}(\eta, \Theta, \tau)]\, d\tau \}\, d\Theta\, d\eta \,\| < 1$$

et cette solution peut être construite par la méthode des itérations successives

$$v_n(x, t) = \sigma(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t \Delta_n(\zeta, \tau)\, d\tau\, d\zeta \qquad \Delta_n(x, t) = \Delta_{n-1}(x, t) + \mu R_{n-1}(x, t),$$

$$R_{n-1}(x, t) \equiv \Delta_{n-1}(x, t) - g(x, t) - \int_a^x \int_\alpha^t f\Big[\zeta, \tau, \sigma(\zeta, \tau) + \int_a^\xi \int_\alpha^\tau \Delta_{n-1}(\zeta, \tau)\, d\tau\, d\zeta,$$

$$\Delta_{n-1}(\xi, \tau), \qquad \int_a^\xi N\Big(\zeta, \tau, \eta, \sigma(\eta, \tau) + \int_a^\eta \int_\alpha^\tau \Delta_{n-1}(\zeta, \tau)\, d\tau\, d\zeta, \Delta_{n-1}(\eta, \tau)\Big)\, d\eta,$$

$$(16) \qquad \int_\alpha^t Q\Big(\zeta, \tau, \Theta, \sigma(\zeta, \Theta) + \int_a^\zeta \int_\alpha^\Theta \Delta_{n-1}(\zeta, \tau)\, d\tau\, d\zeta, \Delta_{n-1}(\zeta, \Theta)\Big)\, d\Theta\Big]\, d\tau\, d\zeta,$$

où le nombre constant $\mu < 0$ *est choisi de telle manière que l'on ait* $| 1 + \mu | + | \mu | k_3 < < 1$, *tandis que l'évaluation des normes des déviations* $\| w - v \|$ et $\| u(x, t) - v(x, t) \|$ *s'exprime par les inégalités*

$$\| w - v \| \leqq$$

$$\left\| \int_a^x \int_\alpha^t \Big[L_{3f}(\eta, \Theta) \int_a^\eta \delta_1(\eta, \Theta, \zeta)\, d\zeta + L_{4f}(\eta, \Theta) \int_\alpha^\Theta \delta_4(\eta, \Theta, \tau)\, d\tau \Big]\, d\Theta\, d\eta \right\| : (1 - k_4) \equiv k_5,$$

$$\| u(x, t) - v(x, t) \| \leqq (x - a)(t - \alpha)\, k_5, \forall (x, t) \in D,$$

si l'on ait

$$k_4 = \Big\| \int_a^x \int_\alpha^t \Big\{ L_{1f}(\eta, \Theta)(\eta - a)(\Theta - \alpha) + L_{2f}(\eta, \Theta) + L_{3f}(\eta, \Theta) \times$$

$$\times \int_a^\eta [\delta_2(\eta, \Theta, \zeta)(\zeta - a)(\Theta - \alpha) + \delta_3(\eta, \Theta, \zeta)]\, d\zeta +$$

$$+ L_{4f}(\eta, \Theta) \int_\alpha^\Theta [\delta_5(\eta, \Theta, \tau)(\eta - a)(\tau - \alpha) + \delta_6(\eta, \Theta, \tau)]\, d\tau \Big\}\, d\Theta\, d\eta \Big\| < 1.$$

Remarques. — 1°. Le système intégrodifférentiel (1), (2) s'encadre dans l'ensemble des systèmes différentiels possédant la structure complexe, dont l'étude a été proposée par l'Académie royale des Sciences, des Letters et des beaux Arts de Belgique.

Nombre de travaux des auteurs de caractère fondamental ou applicatif a été consacré à ce sujet.

2°. Dans l'une de nos prochaines Notes à insérer dans le *Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy* on exposera sauf nombre de détails algorithmiques quelques nouveaux résultats concernant le problème traîté.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. E. Krivochéine, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, *Sur l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions d'un nouveau problème à la frontière concernant certains systèmes intégro-différentiels non linéaires polyvibrants.* „Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg.", (5) 59 (1973), pp. 170—177.

[2] L. E. Krivochéine, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. P. Voinea: *Etudes des systèmes mathématiques possédant la structure complexe.* II. *Sur l'extension du problème de Goursat pour certains systèmes intégro-fonctionnels concernant une classe d'équations intégrodifférentielles non linéaires aux opérateurs polyvibrants.* „Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg.", (5) 60 (1974), pp. 585—592.

[3] L. E. Krivoshein, M. N. Oguztoreli, *Sul problema di Goursat per un'equazione integro-differenziale di Mangeron.* „Rend. Accad. Sci. e Lett dell'Istituto Lombardo", 108A (1974), pp. 42—49.

[4] D. Mangeron, L. E. Krivoshein: *Problemi concernenti varie equazioni integro-differenziali non lineari polivibranti.* „Rend. Sem. Mat. Univ. Padova". 33 (1963), pp. 226—266; 34 (1964), pp. 344—368; 35 (1965), pp. 341—363.

[5] D. Mangeron: *Problèmes à la frontière concernant les équations polyvibrantes.* „C. r. Acad. Sci., Paris", 266A (1968), pp. 870—873; 976—979; 1050—1052; 1103—1106; 1121—1124.

[6] D. Mangeron, L. E. Krivoshein: *Solutions computing of various integro-differential systems of Mathematical Physics.* "Romanian J. Appl. Mech.", 9 (1964), pp. 1195—1221; 10 (1965), pp. 3—34.

[7] a) G. Birkhoff, W. Gordon: *On the draftsman and related equations.* „J. Approx. Theory", 1 (1968), pp. 199—208.
b) W. Gordon: *Automated design of free form surfaces.* General Motors Research Series, Warren, Moch. 1968.

[8] M. N. Oguztoreli: *Electrostatic oscillations in cold homogeneous plasmas with compact support.* „J. Plasma Physics", (sous presse).

[9] S. Dzhunuzbekova, L. E. Krivoshein, K. V. Leung, M. N. Oguztoreli: *Problèmes concernant différentes classes d'équations intégrodifférentielles de Mangeron.* I. „Accad. Naz. dei Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat.", (8) 56 (1974), pp. 151—156.

[10] K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. B. Stein: *Improved neuronal models for studying neural networks.* „Kybernetik", 15 (1974), pp. 1—9.

[11] K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. B. Stein: *On the stability and numerical solutions of two neural models.* „Utilitas Mathematica" 5 (1974), pp. 167—212.

[12] A. Kutanov, L. E. Krivochéine, M. N. Oguztoreli, D. Salandi: *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. Problèmes à la frontière pour certaines classes d'équations intégrodifférentielles de Mangeron.* „Bull. Polytechn. Inst. Jassy", 20 (24), fasc. 1—2, Sect. I (1974), pp. 111—115.

D. Mangeron
Department of Computer Science, Concordia University,
1455 de Maisonneuve Blvd. West,
Montreal H3G IM8, Québec
Canada