Archivum Mathematicum

Vítězslav Novák

Über Realisierungen geordneter Mengen

Archivum Mathematicum, Vol. 11 (1975), No. 4, 241--245

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106917`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XI: 241—246, 1975

ÜBER REALISIERUNGEN GEORDNETER MENGEN

VÍTĚZSLAV NOVÁK,*) Brno
(Eingegangen am 26. April 1975)

0. Einleitung. In der Literatur, die die Theorie der geordneten Mengen behandelt, werden oft die sog. *universellen Mengen* studiert. Eine m-universelle geordnete Menge (wo m eine Mächtigkeit ist) ist eine geordnete Menge, die zu jeder geordneten Menge G mit card $G \leqq$ m eine isomorphe Untermenge enthält. Schon F. Hausdorff [2] hat gezeigt, daß die Ordinalpotenz des Typs ${}^{\omega_\nu}3$ eine $\aleph_\nu$ – universelle linear geordnete Menge ist. W. Sierpiński [6] hat bewiesen, daß sogar die Ordinalpotenz des Typs ${}^{\omega_\nu}2$ eine $\aleph_\nu$-universelle linear geordnete Menge ist. Seinen Beweis hat M. Novotný [4] und E. Mendelson ([5], Appendix) wesentlich vereinfacht. Als universelle geordnete Mengen haben sich die Kardinalpotenzen erwiesen. M. Novotný [4] hat bewiesen, daß die Kardinalpotenz des Typs $\mathbf{2}^{\aleph_\nu}$ eine $\aleph_\nu$-universelle geordnete Menge ist. Er hat auch dichte Untermengen in geordneten Mengen definiert und folgendes gezeigt: Wenn eine geordnete Menge G eine dichte Untermenge H mit card$H$ = m enthält, dann ist G mit einer Untermenge der Kardinalpotenz des Typs $\mathbf{2}^{\mathrm{m}}$ isomorph. Das Ziel dieser Note ist, die Definition der dichten Untermenge zu schwächen und dann dasselbe Resultat zu bekommen.

1. Bezeichnungen, Symbolik. Hier erwähnen wir einige bekannte Operationen mit geordneten Mengen ([1]) und einige Bezeichnungen. Wenn A, B geordnete Mengen sind, dann ist die *Kardinalpotenz* A^B die Menge aller isotonen Abbildungen $f: B \to A$, wobei die Relation $f \leqq g$ für $f \in A^B$, $g \in A^B$ dann und nur dann gilt, wenn $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in B$ ist. Wenn speziell B eine Antikette ist (je zwei verschiedene Elemente sind unvergleichbar), dann ist A^B die Menge aller Abbildungen $f: B \to A$ mit der oben erwähnten Ordnung. Die *Ordinalpotenz* ${}^BA$ ist die Menge aller Abbildungen $f: B \to A$, wobei die Relation $f \leqq g$ für $f \in {}^BA$, $g \in {}^BA$ dann und nur dann gilt, wenn folgendes gilt: für jedes $x \in B$ mit $f(x) \nleqq g(x)$ gibt es ein Element $y \in B$, $y < x$ so, daß $f(y) < g(y)$ und $f(t) \leqq g(t)$ für alle $t \in B$, $t \leqq y$ gilt. Wenn speziell B eine wohlgeordnete Menge ist, dann ist ${}^BA$ nach dem Prinzip der ersten Differenz geordnet: für $f \in {}^BA$, $g \in {}^BA$ gilt $f < g$, resp. $f \parallel g$ dann und nur dann, wenn $f(x) < g(x)$, resp. $f(x) \parallel g(x)$, wo $x \in B$ das kleinste Element mit $f(x) \neq g(x)$ ist. Wir bemerken noch,

*) Diese Arbeit entstand während der Tätigkeit des Verfassers in dem Mathematischen Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften in Brno, im Oktober 1974 bis März 1975.

daß im Falle, wenn B eine Antikette ist, die Kardinalpotenz A^B und die Ordinalpotenz ${}^B A$ gleich sind. Mit dem Symbol $\mathbf{2}$ bezeichnen wir die zweielementige Kette $\{0, 1; 0 < 1\}$ und auch den Typ dieser Kette. Jede Menge, die nicht als geordnet bezeichnet wird, erwägen wir als eine Antikette. Ist G eine geordnete Menge und $x \in G$, dann bezeichnen wir mit dem Symbol $A(x)$ die Menge $\{t;\ t \in G,\ t < x\}$ und mit dem Symbol $E(x)$ die Menge $\{t;\ t \in G,\ t > x\}$. Ist G eine linear geordnete Menge und $H \subseteqq G$, dann heißt H *dichte Untermenge* (im Hausdorffschen Sinne) der Menge G dann und nur dann, wenn folgendes gilt: für je zwei Elemente $x, y \in G$, $x < y$ existieren $x', y' \in H$ mit $x \leqq x' < y' \leqq y$. Das Minimum der Mächtigkeiten der dichten Untermengen der Menge G wird die *Separabilität* der Menge G genannt und als $\operatorname{sep} G$ bezeichnet.

2. Lemma. *Sei G eine geordnete Menge, $T \neq 0$ eine Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(A) *Für jedes $t \in T$ existiert eine Abbildung f_t: $G \to \mathbf{2}$ und das System $\{f_t;\ t \in T\}$ dieser Abbildungen hat folgende Eigenschaft: $x, y \in G$, $x \leqq y \Leftrightarrow f_t(x) \leqq f_t(y)$ für alle $t \in T$.*

(B) *Es existiert eine Untermenge $G' \subseteqq \mathbf{2}^T$ so, daß G mit G' isomorph ist.*

Beweis. I. Setzen wir voraus, daß (A) gilt. Für beliebiges $t \in T$ und beliebiges $x \in G$ bezeichnen wir $\varphi(x)(t) = f_t(x)$. Für ein gegebenes $x \in G$ ist $\varphi(x)$ eine Abbildung $T \to \mathbf{2}$, d. h. $\varphi(x) \in \mathbf{2}^T$. Also ist φ eine Abbildung $G \to \mathbf{2}^T$. Bezeichnen wir $\varphi(G)$ als G'. Wir beweisen, daß φ ein Isomorphismus $G \to G'$ ist. Für $x, y \in G$ haben wir $x \leqq y$ dann und nur dann, wenn $f_t(x) \leqq f_t(y)$ für alle $t \in T$ ist, d. h. $\varphi(x)(t) \leqq \varphi(y)(t)$ für alle $t \in T$ und das ist äquivalent mit $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$.

II. Setzen wir voraus, daß (B) gilt und sei φ ein Isomorphismus G auf G'. Für jedes $x \in G$ und jedes $t \in T$ setzen wir $f_t(x) = \varphi(x)(t)$. Dann ist f_t eine Abbildung $G \to \mathbf{2}$ für jedes $t \in T$. Wir beweisen, daß das System $\{f_t;\ t \in T\}$ die Eigenschaft aus der Aussage (A) hat.

Seien $x, y \in G$; dann ist $x \leqq y$ äquivalent mit $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$, d. h. mit $\varphi(x)(t) \leqq \leqq \varphi(y)(t)$ für alle $t \in T$ und das bedeutet $f_t(x) \leqq f_t(y)$ für alle $t \in T$.

3. Bemerkung. Die Aussage (A) kann so formuliert werden:

$x, y \in G$, $x < y \Leftrightarrow f_t(x) \leqq f_t(y)$ für alle $t \in T$ und es existiert ein $t_0 \in T$ mit $f_{t_0}(x) = 0 < 1 = f_{t_0}(y)$,

$x, y \in G$, $x \parallel y \Leftrightarrow$ es existieren $t_1, t_2 \in T$ mit $f_{t_1}(x) = 0, f_{t_1}(y) = 1, f_{t_2}(x) = 1, f_{t_2}(y) = 0$.

4. Definition. *Sei G eine geordnete Menge, $x \in G$. Wir sagen, daß das Element x die Eigenschaft α hat,*[1]) *wenn ein Element $y \in G$ so existiert, daß $x \parallel y$ und $E(x) \subseteqq E(y)$ gilt.*

---

[1]) Siehe [4].

5. Definition. *Sei G eine geordnete Menge, $x \in G$. Wir sagen, daß das Element x die Eigenschaft β hat,*[1]) *wenn ein Element $y \in G$ so existiert, daß $x \parallel y$ und $A(x) \subseteqq A(y)$ gilt.*

6. Bemerkung. Jedes maximale Element, das nicht das größte Element ist, hat die Eigenschaft α. Jedes minimale Element, das nicht das kleinste Element ist, hat die Eigenschaft β.

7. Definition. *Sei G eine geordnete Menge, $H \subseteqq G$. Wir nennen die Menge H o-dicht in G dann und nur dann, wenn folgendes gilt:*

(1) *$x, y \in G, x < y \Rightarrow$ es existieren $x', y' \in H$ mit $x \leqq x' < y' \leqq y$.*

(2) *H enthält alle Elemente der Menge G mit der Eigenschaft α.*

8. Definition. *Sei G eine geordnete Menge, $H \subseteqq G$. Wir nennen die Menge H u-dicht in G dann und nur dann, wenn folgendes gilt:*

(1) *$x, y \in G, x < y \Rightarrow$ es existieren $x', y' \in H$ mit $x \leqq x' < y' \leqq y$.*

(2) *H enthält alle Elemente der Menge G mit derEigenschaft β.*[2])

9. Lemma. *Sei G eine geordnete Menge, $H \subseteqq G$, H o-dicht in G, $x, y \in G$. Wenn die Relation $t \geqq y$ für alle $t \in H$, $t \geqq x$ gilt, dann ist $x \geqq y$.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß die Relation $t \geqq y$ für alle $t \in H$, $t \geqq x$ gilt, aber $x \ngeqq y$. Dann ist $x \bar{\in} H$, denn wäre $x \in H$, dann $x \geqq x$, $x \ngeqq y$, was ein Widerspruch mit der Voraussetzung ist. Ist $x < y$, dann existieren $x', y' \in H$ mit $x \leqq \leqq x' < y' \leqq y$ und das ist ein Widerspruch, denn $x' \in H$, $x' \geqq x$, $x' \ngeqq y$. Also $x \parallel y$. Wenn x ein maximales Element in G wäre, dann $x \in H$ nach 6., was ein Widerspruch ist. Also $E(x) \neq \emptyset$ und sei $z \in E(x)$ ein beliebiges Element. Dann $z > x$ und deshalb existiert ein $t \in H$ mit $z \geqq t > x$. Nach der Voraussetzung folgt daraus $t \geqq y$. Es kann $t = y$ nicht gelten, denn in diesem Fall wäre $y > x$. Also $t > y$ und daraus $z > y$, d. h. $z \in E(y)$. Wir haben bewiesen $E(x) \subseteqq E(y)$ und das Element x hat die Eigenschaft α. Deshalb $x \in H$ und das ist ein Widerspruch.

Mit dualen Überlegungen beweist man

10. Lemma. *Sei G eine geordnete Menge, $H \subseteqq G$, H u-dicht in G, $x, y \in G$. Wenn die Relation $t \leqq y$ für alle $t \in H$, $t \leqq x$ gilt, dann ist $x \leqq y$.*

11. Satz. *Sei G eine geordnete Menge, $H \subseteqq G$, H o-dicht in G, T eine solche Menge, daß* $\operatorname{card} T = \operatorname{card} H$ *gilt. Dann existiert eine Untermenge $G' \subseteqq \mathbf{2}^T$ so, daß G mit G' isomorph ist.*

---

[2]) M. Novotný [4] nennt eine Untermenge H einer geordneten Menge G dicht in G, wenn sie die Eigenschaft (1) aus 7. oder 8. hat und wenn sie alle maximale und alle minimale Elemente und alle Elemente mit der Eigenschaft α und alle Elemente mit der Eigenschaft β der Menge G enthält. Nach 6. bedeutet es, daß H zugleich o-dicht und u-dicht in G ist und das größte und das kleinste Element in G — falls sie existieren — enthält.

Beweis. Sei $i: T \to H$ eine Bijektion und für jedes $t \in T$, $x \in G$ setzen wir

$$f_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leqq i(t), \\ 1, & \text{wenn } x \nleqq i(t). \end{cases}$$

Dann ist f_t eine Abbildung $G \to \mathbf{2}$ für alle $t \in T$. Wir zeigen, daß das System $\{f_t;\, t \in T\}$ die Eigenschaft aus 3. hat. Seien also $x, y \in G$, $x < y$. Wenn $f_t(y) = 0$ für ein $t \in T$ ist, dann $y \leqq i(t)$, also auch $x \leqq i(t)$, sodaß $f_t(x) = 0$. Deshalb $f_t(y) = 0 \Rightarrow f_t(x) = 0$ für alle $t \in T$ und daraus folgt $f_t(x) \leqq f_t(y)$ für alle $t \in T$. Weiter existieren $x', y' \in H$ so, daß $x \leqq x' < y' \leqq y$. Wenn $x' = i(t_0)$ ist, dann $f_{t_0}(x) = 0$, $f_{t_0}(y) = 1$. Seien $x, y \in G$, $x \parallel y$. Sind $x, y \in H$ und $x = i(t_1)$, $y = i(t_2)$, dann $f_{t_1}(x) = 0, f_{t_1}(y) = 1, f_{t_2}(x) = 1, f_{t_2}(y) = 0$. Setzen wir voraus, daß $x \in H$, $y \in G - H$, $x = i(t_1)$ gilt.

Dann ist $f_{t_1}(x) = 0$, $f_{t_1}(y) = 1$. Wenn $z \geqq x$ für alle $z \in H$, $z \geqq y$ wäre, dann $y \geqq x$ nach 9., was ein Widerspruch ist. Deshalb existiert ein $z \in H$, $z \geqq y$ so, daß $z \ngeqq x$. Ist $z = i(t_2)$, dann $f_{t_2}(x) = 1, f_{t_2}(y) = 0$. Ähnlich verläuft der Beweis im Falle $x \in G - H$, $y \in H$. Sei letzlich $x, y \in G - H$. Wenn $z \geqq y$ für alle $z \in H$, $z \geqq x$ wäre, dann $x \geqq y$, was ein Widerspruch ist. Es gibt also ein $z_1 \in H$, $z_1 \geqq x$ mit $z_1 \ngeqq y$. Ist $z_1 = i(t_1)$, dann $f_{t_1}(x) = 0, f_{t_1}(y) = 1$. Ähnlich beweist man die Existenz eines $z_2 \in H$, $z_2 \geqq y$ mit $z_2 \ngeqq x$. Wenn $z_2 = i(t_2)$ ist, dann $f_{t_2}(x) = 1$, $f_{t_2}(y) = 0$. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus 2.

Mit dualen Überlegungen beweist man

12. Satz. *Sei G eine geordnete Menge, $H \subseteq G$, H u-dicht in G, T eine solche Menge, daß* $\operatorname{card} T = \operatorname{card} H$ *gilt. Dann existiert eine Untermenge $G' \subseteq \mathbf{2}^T$ so, daß G mit G' isomorph ist.*

13. Folgerung. *Jede geordnete Menge G ist isomorph mit einer Teilmenge der Kardinalpotenz $\mathbf{2}^T$, wo T eine Menge mit* $\operatorname{card} T = \operatorname{card} G$ *ist.* ([4], Satz 1.)

Beweis. Offensichtlich ist G o-dicht in G.

14. Folgerung. *Jede linear geordnete Menge G ist isomorph mit einer Teilmenge der Ordinalpotenz des Typs ${}^{\alpha}\mathbf{2}$, wo α die Anfangszahl der Mächtigkeit* $\operatorname{card} G$ *ist.* ([6], Théorème I.)

Beweis. Sei T eine Menge mit $\operatorname{card} T = \operatorname{card} G$; nach 13. existiert eine Untermenge $G' \subseteq \mathbf{2}^T$ so, daß G mit G' isomorph ist. Da T Antikette ist, gilt $\mathbf{2}^T = {}^{T}\mathbf{2}$, also $G' \subseteq {}^{T}\mathbf{2}$. Wählen wir auf T eine beliebige Wohlordnung des Typs α und bezeichnen T mit dieser Wohlordnung als $\bar{T}$. Offensichtlich ist $f, g \in {}^{T}\mathbf{2}, f \leqq g$ in ${}^{T}\mathbf{2} \Rightarrow f \leqq g$ in ${}^{\bar{T}}\mathbf{2}$. Also ist $G' \subseteq {}^{\bar{T}}\mathbf{2}$ und die Menge ${}^{\bar{T}}\mathbf{2}$ hat den Typ ${}^{\alpha}\mathbf{2}$.

15. Folgerung. *Sei G eine linear geordnete Menge, $m = \operatorname{sep} G$. Dann ist G isomorph mit einer Teilmenge der Ordinalpotenz des Typs ${}^{\alpha}\mathbf{2}$, wo α die Anfangszahl der Mächtigkeit m ist* ([3], Théorème 1).

Beweis. In G existiert eine dichte Untermenge H (im Hausdorffschen Sinne) mit card$H = m$. Da es in G keine Elemente mit der Eigenschaft α gibt, ist H o-dicht in G. Nach 11. ist G isomorph mit einer Teilmenge $G' \subseteq \mathbf{2}^T$, wo T eine Menge mit card$T = \mathrm{m}$ ist. Die Beendigung des Beweises ist nun übereinstimmend mit dem Beweis von 14.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Birkhoff G.: Lattice Theory, Third Edition, Providence, Rhode Island, 1967.

[2] Hausdorff F.: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.

[3] Novotný M.: Sur la représentation des ensembles ordonnés, Fund. Math. XXXIX (1952, 97—102.

[4] Novotný M.: O representaci částečně uspořádaných množin posloupnostmi nul a jedniček, Čas. pěst. mat. 78 (1953), 61—64.

[5] Sierpiński W.: Cardinal and Ordinal Numbers, Warszawa 1958.

[6] Sierpiński W.: Sur une propriété des ensembles ordonnés, Fund. Math. XXXVI (1949), 56—67.

V. Novák
662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a
Tschechoslowakei