B. V. Godun

О фундаментальных биортогональных системах в некоторых сопряженных пространствах Банаха

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 3, 431--436

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

24,3 (1983)

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ В НЕКОТОРЫХ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Б.В. ГОДУН

Содержание: В заметке доказаны два утверждения о "качестве" фундаментальных биортогональных систем в некоторых несепарабельных сопряженных банаховых пространствах.

Ключевые слова: Несепарабельное банахово пространство, сопряженное пространство, биортогональная система.

Классификация: 46B99

Пусть X - пространство Банаха и X^* - его сопряженное. Система элементов $\{x_i, x_i^*\}_{i\in I} \subset X \times X^*$ называется биортогональной, если $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in I)$. Биортогональную систему называют фундаментальной, если замыкание линейной оболочки системы $\{x_i\}_{i\in I}$ совпадает со всем пространством X $(\overline{sp}\{x_i\}_{i\in I} = X)$. С каждой биортогональной системой связана система проекторов:

$$P_i(x) = x_i^*(x)x_i, \quad Q_i(x) = x - P_i(x), \quad x\in X, \quad i\in I.$$

При этом величины

$$p(\{x_i\}) = \sup_i \|P_i\|, \quad q(\{x_i\}) = \sup_i \|Q_i\|$$

характеризуют "качество" биортогональной системы. Рассмотрим следующие характеристики банахова пространства X:

$$p(X) = \inf p(\{x_i\}), \quad q(X) = \inf q(\{x_i\}),$$

где в обоих случаях нижняя грань берется по всем фундаментальным биортогональным системам в X. Согласно известной теореме А. Пелчинского [1] $p(X)=1$ для любого сепарабельного пространства X *, значит, для таких пространств $q(X)\le 2$. Как это следует из результатов работ [2],[3], если $X=C[0,1]$, либо $X=L_1[0,1]$, то $q(X)\ge 2$. Оказывается, что этим свойством обладают и некоторые несепарабельные сопряженные банаховы пространства.

<u>Теорема 1</u>. Если E - банахово пространство с безусловным ортогональным базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и пространство E^* не сепарабельно, то $q(E^*)\ge 2$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\Gamma=\overline{sp}\{e_k^*\}_{k=1}^{\infty}\subset E^*$ - пространство коэффициентов базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_i,x_i^*\}_{i\in I}\subset E^*\times E^{**}$ - произвольная фундаментальная биортогональная система. Поскольку пространство E^* не сепарабельно, то ясно, что множество I несчетно. Так как система $\{x_i\}_{i\in I}$ фундаментальна в E^*, то каждый элемент e_k может быть аппроксимирован конечными линейными комбинациями системы $\{x_i\}_{i\in I}$. То есть для каждого $k=1,2,\dots$ найдется счетное подмножество $\mathcal{J}_k\subset I$ такое, что $e_k\in\overline{sp}\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}_k}$. Это означает, что для счетного подмножества $\mathcal{J}=\bigcup\mathcal{J}_k\subset I$ выполняется включение

$$\Gamma\subseteq\overline{sp}\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}}.$$

Зафиксируем индекс $i\in I\setminus\mathcal{J}$. В силу биортогональности системы $\{x_i,x_i^*\}_{i\in I}$ для всех $x\in\overline{sp}\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ выполняется равенство $x_i^*(x)=0$ и, значит,

$$x_i^*(x)=0 \quad \text{для всех } x\in\Gamma.$$

Это, в частности, означает, что

(1) $\quad x_i^*(S_m^*(x_i))=0 \qquad$ для всех $m=1,2,\dots,$

где $S_m^*(x) = \sum_{k \le m} x(e_k) e_k^* \quad (x \in E^*)$ — оператор взятия частной суммы по базисной последовательности $\{e_k^*\}_{k=1}^{\infty} \subset E^*$. Заметим, что из безусловной ортогональности базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что

(2) $\| x_i - 2S_m^*(x_i) \| = \| x_i \|, \quad m = 1, 2, \dots,$

(3) $\| S_m^*(x_i) \| \longrightarrow \| x_i \|, \quad m \to \infty.$

Теперь из условий (1) – (3) имеем:

$$\| Q_i \| \ge \lim_{m \to \infty} \frac{\| Q_i(x_i - 2S_m^*(x_i)) \|}{\| x_i - 2S_m^*(x_i) \|} =$$

$$= \frac{1}{\| x_i \|} \lim_{m \to \infty} \| x_i - 2S_m^*(x_i) - x_i^*(x_i - 2S_m^*(x_i)) \cdot x_i \| =$$

$$= \frac{1}{\| x_i \|} \cdot \lim_{m \to \infty} \| x_i - 2S_m^*(x_i) - x_i \| =$$

$$= \frac{2}{\| x_i \|} \lim_{m \to \infty} \| S_m^*(x_i) \| = 2 .$$

<u>Замечание 1</u>. В теореме 1 для любой фундаментальной биортогональной системы в E^* неравенство $\| Q_i \| \ge 2$ выполняется для всех за исключением быть может счетного числа индексов $i \in I$.

<u>Замечание 2</u>. Если пространство E удовлетворяет условиям теоремы 1, то E^* имеет фундаментальные биортогональные системы. Действительно, в этом случае согласно известной теореме Р. Джеймса о безусловном базисе (см. [4], с. 506) пространство E содержит подпространство, изоморфное ℓ_1. Значит, пространство E^* имеет фактор-пространство, изоморфное $\ell_1^* = \ell_\infty$, которое, как известно, содержит подпространство, изоморфное $\ell_1[0,1]$. Поскольку последнее пространство допускает лифтинг в E^* (см. [5]), то E^* содержит подпространство, изоморфное $\ell_1[0,1]$. Согласно [6] E^* имеет фундаментальную биортогональную систему.

В ситуации $E = \ell_1$ (с естественным базисом), $E^* = \ell_\infty$, из теоремы 1 получаем

<u>Следствие 1</u>. $\quad q(\ell_\infty) \geq 2$.

Поскольку переходом к эквивалентной норме каждый безусловный базис может быть сделан ортогональным ([4], с. 560), то справедливо

<u>Следствие 2</u>. Пусть E - банахово пространство с безусловным базисом, имеющее несепарабельное сопряженное. Тогда на E существует эквивалентная норма, в которой $q(E^*) \geq 2$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\{x_i, x_i^*\}_{i \in I}$ - фундаментальная биортогональная система в ℓ_∞ и пусть все функции x_i неотрицательны. Тогда $p(\{x_i\}) \geq 2$.

<u>Доказательство</u>. Каждый элемент пространства $X = \ell_\infty$ будем записывать в виде $x = (x^k)$, так что $\|x\| = \sup\limits_k |x^k|$. Пусть e - элемент пространства ℓ_∞ , все компоненты которого равны единице, и c_0 - подпространство ℓ_∞ , составленное из сходящихся к нулю последовательностей. Ясно, что пространство $c = sp\{e\} \oplus c_0$ состоит из сходящихся последовательностей. Тогда, рассуждая как в доказательстве теоремы 1, получим, что существует счетное подмножество $J \subset I$ такое, что

(4) $$c \subseteq \overline{sp}\{x_j\}_{j \in J} .$$

Зафиксируем индекс $i \in I \setminus J$ и обозначим $d = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}}\, x_i^k$. Пусть вещественное число a таково, что

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{k > m} |x_i^k - d/2| = |a - d/2| .$$

Поскольку функция x_i неотрицательна, то $0 \leq a \leq d$ и, значит, $|a - d/2| \leq d/2$. Рассмотрим последовательность элементов

$y_m \in \ell_\infty$, определенных правилом:

$$y_m^k = \begin{cases} x_i^k, & \text{если } k \le m \\ d/2, & \text{если } k > m \end{cases}$$

Ясно, что $y_m \in c$ для всех $m = 1, 2, \dots$ и, значит, из биортогональности системы $\{x_i, x_i^*\}_{i \in I}$ и (4)

$$x_i^*(y_m) = 0 \quad \text{для всех } m = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\|P_i\| \ge \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\|P_i(x_i)\|}{\|x_i - y_m\|} = \|x_i\| / \varliminf_{m\to\infty} \|x_i - y_m\| =$$

$$= \|x_i\| / \lim_{m\to\infty} \sup_{k>m} |x_i^k - d/2| =$$

$$= \|x_i\| / |a - d/2| \ge 2\|x_i\|/d \ge 2 .$$

<u>Замечание 3</u>. Заключение теоремы 2 выполняется не только для фундаментальных в ℓ_∞ положительных биортогональных систем, но и таких положительных несчетных биортогональных систем $\{x_i, x_i^*\}_{i \in I}$ в ℓ_∞ , что $c \subset \overline{sp}\,\{x_i\}_{i \in I}$.

Литература

[1] A. PELCZYNSKI: All separable Banach spaces admit for any $\varepsilon > 0$ fundamental total and bounded by $1+\varepsilon$ biorthogonal seсences, Studia Math. 55(1977), 295-304.

[2] И.К. ДАУГАВЕТ: Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C, Успехи мат. наук 18 (1963), 157-158.

[3] В.Ф. ВАВЕНКО, С.А. ПИЧУГОВ: Об одном свойстве компактных операторов в пространстве суммируемых функций, Укр. мат. журн. 33(1981), 491-492.

[4] I. SINGER: Bases in Banach spaces I, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[5] R. HAYDON: On Banach spaces with containing $\ell_1(\tau)$ and types of measures of compact spaces, Israel J. Math. 28(1978), 313-324.

[6] В.В. ГОДУН: О полных биортогональных системах в пространстве Банаха, Функц. анал. и его прил. 17(1983), 1-7.

СССР, г. Харьков, ул. Революции, 12, ХИИКС

Matematicko-fyzikální fakulta, Karlova univerzita, Sokolovská 83, 18600, Praha 8, Czechoslovakia

(Oblatum 22.4. 1983)