Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О псевдодифферецируйемости псевдоравномерно непрерывных конструктивных функций по функциям того же типа

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 3, 391--406

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106239

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
24,3 (1983)

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПСЕВДОРАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ФУНКЦИЯМ ТОГО ЖЕ ТИПА

О. ДЕМУТ (O.DEMUTH)

Содержание: В статье исследуются свойства верхних и нижних псевдопроизводных (т.е. производных в классическом смысле) псевдоравномерно непрерывных всюду определенных [0]-конструктивных функций действительной переменной ([0]-КФДП) по функциям того же типа в точках отвечающих арифметическим действительным числам (АДЧ).

Ключевые слова: Конструктивные функции действительной переменной, верхние и нижние псевдопроизводные функций по функциям, арифметические действительные числа.

Классификация: 03F65, 26A24

В настоящей статье доказаны для верхних и нижних псевдопроизводных псевдоравномерно непрерывных (т.е. равномерно непрерывных в классическом смысле) всюду определенных [0]-КФДП по функциям того же типа аналоги теорем А. Данжуа и К.М. Гарга о производных числах (ср. [1] и [2]). Результаты являются обобщением утверждений, которые были доказаны в [8] и [9] для [0]-равномерно непрерывных ([0]-РН) [0]-КФДП.

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок определениями и обозначениями из [10] - в частности - перечисленными там переменными, классами АДЧ $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{A}_\beta$ и классами [0]-псевдочисел $\Pi_1^{[0]}$ и $\Pi_2^{[0]}$. Определения основных понятий конструктивного математического анализа содержатся, например, в [3].

Для всякого натурального числа (НЧ) m мы посредством

${}^*\mathcal{D}^{[m]}$ обозначим $\mathcal{D}^{[m]}$, т.е. множество всех $[m]$-конструктивных действительных чисел ($[m]$-КДЧ), расширенное на $-\infty$ и $+\infty$.

Мы напомним, что $[m]$-псевдочисла ($[m]$-ПЧ) - это коды псевдофундаментальных $[m]$-последовательностей рациональных чисел (РЧ) - см. [3]. Соответствие между $[m]$-ПЧ и $[m+1]$-КДЧ напоминается в [10]. Для любых [0]-ПРЧ ξ и АДЧ X верно

$$\xi = X \supset (\xi \in \Pi_1^{[0]} \equiv X \in \mathcal{A}_1) \,\&\, (\xi \in \Pi_2^{[0]} \equiv X \in \mathcal{A}_2)$$

(см. [10], стр. 457).

Если ξ $[m]$-ПЧ, то мы посредством $\underset{\smile}{\xi}$ обозначаем соответствующую $[m]$-последовательность РЧ. Мы скажем, что [0]-ПЧ ξ является монотонным (соотв. строго монотонным), если [0]-последовательность $\underset{\smile}{\xi}$ является монотонной (соотв. строго монотонной).

Для любого АДЧ P мы посредством h_P обозначим [0]-отображение (см. [3]) такое, что для всякого АДЧ X выполнено

$$h_P(X) \simeq P \cdot max(0, min(X, 1)) \cdot$$

[0]-отображения, являющиеся для всякого НЧ m операторами типа $(\mathcal{D}^{[m]} \to \mathcal{D}^{[m]})$, мы называем [0]-КФДП типа В. Согласно замечанию 5.4 из [3] для любой всюду определенной псевдоравномерно непрерывной (ПРН) [0]-КФДП $\mathcal{F}$ существует [0]-КФДП типа В $\mathcal{G}$ такая, что $\forall x^{[0]}(\mathcal{G}(x^{[0]}) = \mathcal{F}(x^{[0]}))$.

Всюду определенную [0]-КФДП $\mathcal{F}$ мы назовем [0]-функцией, если выполнено

$$\forall x^{[0]}((x^{[0]} \leq 0 \supset \mathcal{F}(x^{[0]}) = \mathcal{F}(0)) \,\&\, (1 \leq x^{[0]} \supset \mathcal{F}(x^{[0]}) = \mathcal{F}(1))).$$

Если $\mathcal{F}$ ПРН [0]-функция, то мы посредством $Op[\mathcal{F}]$ обозначим определенную [0]-функцию типа В такую, что

$\forall x^{[0]}(Op[\mathcal{F}](x^{[0]}) = \mathcal{F}(x^{[0]}))$ (см. [3], стр. 47).

<u>Замечание 1</u>. 1) Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция, m и t НЧ, L

[0]-сегмент и P слово, являющееся или $[m]$-КДЧ или $[m]$-ПЧ.

а) Если верно $\mathcal{H}(W_t)$ (см. [12]), то мы посредством $[\mathcal{F}, W_t]$ обозначим [0]-функцию, которая линейна на всяком сегменте $\mathcal{L}(\ell)$, где $\ell \in W_t$, и удовлетворяет условию

$$\forall x^{[0]}(\neg(x^{[0]} \in [W_t]) \supset [\mathcal{F}, W_t](x^{[0]}) = \mathcal{F}(x^{[0]})).$$

б) Мы посредством $\mathit{Sup}(P, \mathcal{F}, L)$ (соотв. $\mathit{Inf}(P, \mathcal{F}, L)$) обозначим: P является супремумом (соотв. инфимумом) значений, которые $\mathcal{F}$ принимает на [0]-КДЧ из L.

Если $\mathcal{F}$ ПРН, то существуют строго монотонные [0]-ПЧ ξ_0 и ξ_1 такие, что $\mathit{Sup}(\xi_0, \mathcal{F}, L) \& \mathit{Inf}(\xi_1, \mathcal{F}, L)$.

2) а) [0]-последовательность неперекрывающихся и содержащихся в $0 \triangle 1$ рациональных сегментов Φ мы называем [0]-покрытием, если выполнено

$$Э_л(\Phi_0) = 0 \,\&\, Э_п(\Phi_1) = 1 \,\&\, \forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset$$

$$\supset \exists k \ell (Э_п(\Phi_k) = Э_л(\Phi_\ell) \,\&\, Э_л(\Phi_k) < x^{[0]} < Э_п(\Phi_\ell)))$$

(здесь, как это привычно, вместо $\Phi(p)$ пишется Φ_p).

б) Для любого [0]-покрытия Φ легко построить строго монотонное [0]-ПЧ ξ такое, что $0 < \xi < 1 \,\&\, \neg\exists k(\xi \in \Phi_k)$.

в) Согласно [5] существует последовательность [0]-покрытий $\{\Phi^t\}_t$, для которой выполнено $\forall t p\left(\sum_{k=0}^{p} |\Phi_k^t| < 2^{-t}\right) \&$
$\forall X(X \in 0 \triangle 1 \supset (X \in \mathcal{A}_1 \equiv \forall t \neg\neg\exists k(X \in \Phi_k^t)))$.

Определения, связанные с псевдодифференцируемостью всюду определенных [0]-КФДП, содержатся, например, в [12].

<u>Замечание 2</u>. (Ср. [8] и [9].) Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ПРН [0]-функции и X, Z_0 и Z_1 АДЧ.

1) Мы определим

$$\mathrm{Reg}(\mathcal{G}, X) \rightleftharpoons \neg\exists i m(0 \le i \le 1 \,\&\, \forall Y(0 \le (Y - X)\cdot(-1)^i < 2^{-m} \supset \mathcal{O}p[\mathcal{G}](Y) = \mathcal{O}p[\mathcal{G}](X))),$$

$$\mathrm{Extr}(\mathcal{G}, X) \rightleftharpoons \neg\neg\exists \ell(X \in \mathcal{L}^0(\ell) \,\&\, (\mathit{Sup}(\mathcal{O}p[\mathcal{G}](X), \mathcal{G}, \mathcal{L}(\ell)) \vee \mathit{Inf}(\mathcal{O}p[\mathcal{G}](X), \mathcal{G}, \mathcal{L}(\ell))))$$

и

$Reg_1(\mathcal{G},X) \rightleftharpoons \neg\neg\exists m\, \forall Y(|Y-X| < 2^{-m} \,\&\, Op[\mathcal{G}](Y) = Op[\mathcal{G}](X) \supset$

$\supset \neg\, Extr(\mathcal{G},Y))$.

Следовательно, $(Reg_1(\mathcal{G},X) \vee \neg\exists x^{[0]}(Op[\mathcal{G}](X) = x^{[0]})) \supset Reg(\mathcal{G},X)$ и $Reg(\mathcal{G},X) \supset 0 < X < 1$.

2) Для всякого АДЧ Y мы посредством $\Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y)$ обозначим выражение

$$(1) \qquad \frac{Op[\mathcal{F}](Y) - Op[\mathcal{F}](X)}{Op[\mathcal{G}](Y) - Op[\mathcal{G}](X)},$$

причем а) если знаменатель (1) равен нулю, а числитель положителен (соотв. отрицателен), то мы будем считать, что $\Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y)$ принимает значение $+\infty$ (соотв. $-\infty$);

б) если и числитель и знаменатель (1) равны нулю, то мы будем считать, что выражения $Z_0 \leq \Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y)$, $Z_0 \leq \Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y) \leq Z_1$ и $\Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y) \leq Z_1$ являются верными суждениями.

3) Существуют $\mathcal{G}^{(\omega)}$-отображения $\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ и $\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ являющиеся для любого НЧ m операторами типа $(D^{[m]} \to {}^*D^{[m+2]})$, причем для всякого $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ такого, что $Reg(\mathcal{G},x^{[m]})$, $\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](x^{[m]})$ (соотв. $\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](x^{[m]})$) является значением нижней (соотв. верхней) псевдопроизводной $\mathcal{F}$ по $\mathcal{G}$ в точке $x^{[m]}$ (определения см. в [1], стр. 108).

4) Мы определим

$D_{кл}(\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \rightleftharpoons (Reg(\mathcal{G},X) \,\&\, -\infty < \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) < +\infty)$,

$D_{кл}(Z_0,\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \rightleftharpoons (D_{кл}(\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \,\&\, \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = Z_0)$.

5) Если $0 < X < 1$, то - очевидно - $\underline{D}[\mathcal{F},h_1](X) = \underline{D}[\mathcal{F}](X) \,\&\, \overline{D}[\mathcal{F},h_1](X) = \overline{D}[\mathcal{F}](X)$.

<u>Замечание 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ всюду определенная [0]-КФДП, m и n НЧ, v $[m]$-КДЧ и P слово, являющееся или $[m]$-КДЧ или $[m]$-ПЧ. Тогда согласно [4], стр. 83, $L_{кл}(\mathcal{F},v) \rightleftharpoons$

$\forall p \neg\neg \exists q \forall c d\,(v - 2^{-q} < c < d < v + 2^{-q} \supset |\mathcal{F}(c) - \mathcal{F}(d)| < 2^{-p})$ и

$L_{кл}(P, \mathcal{F}, v) \rightleftharpoons \forall p \neg\neg \exists q \forall c\,(|c - v| < 2^{-q} \supset |\mathcal{F}(c) - P| < 2^{-p})$.

Верно

$L_{кл}(\mathcal{F}, v) \equiv \neg\neg \exists Z\, L_{кл}(Z, \mathcal{F}, v) \equiv \exists y^{[m]} L_{кл}(y^{[m]}, \mathcal{F}, v)$ и

$-\infty < \underline{D}[\mathcal{F}](v) \leq \overline{D}[\mathcal{F}](v) < +\infty \supset L_{кл}(\mathcal{F}, v)$.

На основании леммы 4 из [6] легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция, X АДЧ и d РЧ, для которых выполнено $d < \underline{D}[\mathcal{F}](X)$ (соотв. $\overline{D}[\mathcal{F}](X) < d$) и $0 < X < 1$. Тогда не могут существовать НЧ t и p и [0]-РН [0]-функция g такие, что $\mathcal{H}(W_t) \,\&\, \neg(X \in [W_t]_c) \,\&\, \underline{D}[\mathcal{F}](X) \leq \underline{D}[[\mathcal{F}, W_t]](X) \leq \overline{D}[[\mathcal{F}, W_t]](X) \leq \overline{D}[\mathcal{F}](X)$, $|d| < p$, $[\mathcal{F}, W_t]$ [0]-РН, $\neg\neg\exists \ell\,(X \in \mathcal{L}^0(\ell) \,\&\, \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathcal{L}(\ell) \supset g(x^{[0]}) = [\mathcal{F}, W_t](x^{[0]})))$, [0]-функции $[\mathcal{F}, W_t] + h_p$ и $g - h_d$ (соотв. $h_p - [\mathcal{F}, W_t]$ и $h_d - g$) возрастают на $0 \vartriangle 1$ и, следовательно, $\mathcal{O}p[[\mathcal{F}, W_t]](X) = \mathcal{O}p[g](X)$, $\forall m \neg\neg \exists c\,(|c - X| < 2^{-m} \,\&\, [\mathcal{F}, W_t](c) = \mathcal{F}(c))$ и $L_{кл}(\mathcal{F}, X) \supset L_{кл}(\mathcal{O}p[[\mathcal{F}, W_t]](X), \mathcal{F}, X)$.

С помощью результатов из [5] можно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 1</u>. Пусть для любого НЧ i, $0 \leq i \leq 1$, η_i [0]-ПЧ, ξ_i строго монотонное [0]-ПЧ из $\Pi_2^{[0]}$ и Z_i АДЧ.

1) Пусть i НЧ, $0 \leq i \leq 1$.

а) Если или η_i монотонное [0]-ПЧ или [0]-последовательность

$$(2) \qquad \left\{ \frac{\eta_i(k) - \eta_i}{\xi_i(k) - \xi_i} \right\}_k^{[0]}$$

не может не быть ограниченной, то (2) псевдосходится (и, следовательно, [2]-сходится к некоторому [2]-КДЧ) и η_i не может не быть равным разности двух монотонных [0]-ПЧ.

б) Если (2) псевдосходится, то она псевдосходится к нулю в том и только том случае, если $\eta_i \in \Pi_1^{[0]}$.

2) Если $\xi_0 = \xi_1 \,\&\, \eta_0 = \eta_1$ и для любого НЧ i, $0 \le i \le 1$, (2) псевдосходится к АДЧ Z_i, то $Z_0 = Z_1$.

На основании этой теоремы и замечания 1 мы получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть η_0 и η_1 монотонные [0]-ПЧ. Тогда не может не быть верным одно из следующих двух суждений:

а) $(\eta_0 - \eta_1) \in \Pi_1^{[0]}$;

б) существует строго монотонное [0]-ПЧ ξ на $\Pi_2^{[0]}$ такое, что $\xi = \eta_0 - \eta_1$.

<u>Замечание 4</u>. Пусть Φ [0]-покрытие, η_0 [0]-ПЧ, ξ_0 строго монотонное [0]-ПЧ и пусть [0]-последовательность (2), где $i = 0$, псевдосходится к АДЧ Z_0. Мы построим ПРН [0]-функции типа В $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, которые линейны на любом сегменте Φ_k, где $0 \le k$, и выполняют $\forall k (\mathcal{G}(\text{Э}_л(\Phi_k)) = \xi_0(k) \,\&$ $\& \,\mathcal{F}(\text{Э}_л(\Phi_k)) = \eta_0(k))$. Тогда для всякого АДЧ X такого, что $X \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg \exists k (X \in \Phi_k)$, верно $\mathcal{G}(X) = \xi_0 \,\&\, \mathcal{F}(X) = \eta_0 \,\&$ $\& \,\mathrm{D}_{кл}(Z_0, \mathcal{F}|\mathcal{G}, X)$.

<u>Замечание 5</u>. Согласно теореме 6 из [11] $\mathcal{V}_{\psi}$ множество АДЧ типа $G_\sigma^{[1]}$ [1]-меры нуль, $\mathrm{D}^{[0]} \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{V}_{\psi} \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ и для любых АДЧ X и монотонного [0]-ПЧ ξ верно $X = \xi \supset X \in \mathcal{V}_{\psi}$. Таким образом, ввиду следствия теоремы 1 любое АДЧ, которое не может не быть равным сумме конечного числа монотонных [0]-ПЧ, принадлежит множеству $\mathcal{V}_{\psi}$.

<u>Замечание 6</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ПРН [0]-функции типа В и X_0 АДЧ такие, что $\mathrm{Reg}(\mathcal{G}, X_0) \,\&\, -\infty < \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X_0) \le \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X_0) < +\infty$.

Тогда $0 < X_0 < 1$ и не могут не существовать НЧ m и рациональный сегмент L , для которых верно

(3) $X_0 \in L^0 \mathbin{\&} 0 < m \mathbin{\&} \forall c\,(c \in L \supset |\Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X_0, c)| \leq m)$.

Пусть m и L объекты, обладающие описанными свойствами.

1) Верно

(4) $\forall c\,(c \in L \supset |\mathcal{F}(c) - \mathcal{F}(X_0)| \leq m \cdot |\mathcal{G}(c) - \mathcal{G}(X_0)|)$

и следовательно, $\forall m\,(\neg\neg\exists x^{[m]}(\mathcal{G}(X_0) = x^{[m]}) \supset \neg\neg\exists y^{[m]}(\mathcal{F}(X_0) = y^{[m]}))$.

2) Если выполнено $\mathrm{Extr}\,(\mathcal{G}, X_0)$, то ввиду (3) верно $\mathrm{Extr}\,(\mathcal{F} + (m+1) \cdot \mathcal{G}, X_0)$ и, таким образом, согласно части 1б) замечания 1 и замечанию 5 имеет место $\mathcal{F}(X_0) \in \mathcal{C}_y$.

3) Исходя от (4), легко доказать

$(\mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{F}(X_0) \in \mathcal{A}_1) \mathbin{\&} (\mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{F}(X_0) \in \mathcal{A}_\alpha) \mathbin{\&}$

$(\mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{A}^*_\alpha \supset \mathcal{F}(X_0) \in \mathcal{A}^*_\alpha)$.

Пользуясь определениями и простыми геометрическими рассуждениями, можно доказать следующие утверждения.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_1$ ПРН [0]-функции типа В и X_0 и X_1 АДЧ такие, что $\mathcal{F}_0(X_0) = \mathcal{F}_1(X_1) \mathbin{\&} \mathcal{G}_0(X_0) = \mathcal{G}_1(X_1) \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} \mathrm{Reg}(\mathcal{G}_0, X_0) \mathbin{\&} \mathrm{Reg}(\mathcal{G}_1, X_1) \mathbin{\&} \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0](X_0) < \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1](X_1)$.

Тогда

1) не могут не существовать [0]-КДЧ $x^{[0]}$ и монотонное [0]-ПЧ η, для которых верно $\mathcal{G}_0(X_0) = x^{[0]} \mathbin{\&} \mathcal{F}_0(X_0) = \eta$;

2) если выполнено $\neg\exists \ell_0 \ell_1 i\,(0 \leq i \leq 1 \mathbin{\&} X_0 \in \mathcal{L}^0(\ell_0) \mathbin{\&} X_1 \in \mathcal{L}^0(\ell_1) \mathbin{\&}$ $\mathrm{Sup}(\mathcal{G}_0(X_0), \mathcal{G}_i, \mathcal{L}(\ell_i)) \mathbin{\&} \mathrm{Inf}\,(\mathcal{G}_0(X_0), \mathcal{G}_{1-i}, \mathcal{L}(\ell_{1-i})))$, то имеет место $\neg\neg\exists y^{[0]}(\mathcal{F}_0(X_0) = y^{[0]})$.

<u>Лемма 3</u> (ср. [12]). Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ПРН [0]-функции типа В, m, n и p НЧ, v $[m]$-КДЧ и x и y $[n]$-КДЧ такие, что $(n = 0 \supset p = \max(1, m)) \mathbin{\&} (n > 0 \supset p = n + 1 \mathbin{\&} \neg\exists z^{[n-1]}(z^{[n-1]} = x)) \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} \mathcal{G}(v) = x \mathbin{\&} \mathcal{F}(v) = y \mathbin{\&} \mathrm{D}_{\text{кл}}(\mathcal{F}|\mathcal{G}, v)$. Тогда $n \leq m \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} \exists z^{[p]} \mathrm{D}_{\text{кл}}(z^{[p]}, \mathcal{F}|\mathcal{G}, v)$.

Пример 1. Для любого строго монотонного [0]-ПЧ η из

$\Pi_2^{[0]}$ можно ввиду теоремы 1 и замечания 4 построить ПРН [0]-функции типа В $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_1$ и [1]-КДЧ v такие, что

$$\mathcal{F}_0(v) = \mathcal{F}_1(v) = \eta \;\&\; \mathcal{G}_0(v) = \mathcal{G}_1(v) = 0 \;\&\; \mathrm{Reg}(\mathcal{G}_0, v) \;\&$$

$$\&\; \mathrm{Reg}(\mathcal{G}_1, v) \;\&\; \overline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0](v) = -\infty \;\&\; \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1](v) = +\infty \;\&$$

$$\&\; \mathcal{D}_{\kappa\lambda}(0, \mathcal{G}_0 \mid \mathcal{F}_0, v) \;\&\; \mathcal{D}_{\kappa\lambda}(0, \mathcal{G}_1 \mid \mathcal{F}_1, v).$$

Пример 2. Существуют [0]-РН [0]-функции типа В $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, обладающие следующими свойствами: для любых НЧ m и $z \in {}^*\mathcal{D}^{[m]}$ существует $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ из $0 \triangledown 1$ такое, что $\mathcal{F}(x^{[m]}) = \mathcal{G}(x^{[m]}) = 0 \;\&\; \mathrm{Reg}(\mathcal{G}, x^{[m]}) \;\&\; \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](x^{[m]}) = \overline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](x^{[m]}) = z$.

Ввиду части 5 замечания 2 непосредственным следствием лемм 1 и 2 является лемма 4.

<u>**Лемма 4.**</u> Пусть $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ [0]-функции и X и Y АДЧ такие, что $L_{\kappa\lambda}(Y, \mathcal{F}_0, X) \;\&\; L_{\kappa\lambda}(Y, \mathcal{F}_1, X) \;\&\; \overline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}_0](X) < \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}_1](X)$.
Тогда $\neg\neg \exists x^{[0]} (X = x^{[0]} \;\&\; Y = \mathcal{F}_0(x^{[0]}) = \mathcal{F}_1(x^{[0]}))$.

<u>**Замечание 7.**</u> Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция, X АДЧ и d РЧ такие, что $0 < X < 1 \;\&\; d < \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}](X)$.

Мы используем лемму 1. Пусть p и t НЧ, обладающие свойствами перечисленными в утверждении названной леммы, и пусть φ [0]-РН [0]-функция типа В такая, что $\forall x^{[0]} (\varphi(x^{[0]}) = [\mathcal{F}, W_t](x^{[0]}))$.

1) Пусть выполнено $\neg L_{\kappa\lambda}(\varphi(X), \mathcal{F}, X)$. Тогда, как можно показать, не может не существовать монотонное [0]-ПЧ ξ такое, что $X = \xi$. Но тогда не могут не существовать монотонные [0]-ПЧ η_0 и η_1, для которых выполнено $(\varphi(X) + h_p(X)) = \eta_0 \;\&\; h_p(X) = \eta_1$. Итак, согласно замечанию 5 верно $\varphi(X) \in \mathcal{K}_{\psi}$.

2) Пусть выполнено

(5) $$\neg(\varphi(X) \in \mathcal{K}_{\psi}).$$

Тогда ввиду 1) и замечания 5 имеет место $L_{\kappa\lambda}(\varphi(X), \mathcal{F}, X) \;\&\; \varphi(X) \in \mathcal{A}_2$ и, следовательно, мы на основании леммы 1 из

[10] и теоремы 3 из [7] получаем

(6) $\quad -\infty < \underline{D}[\varphi](X) = \overline{D}[\varphi](X) \mathbin{\&} \neg(\underline{D}[\varphi](X) = 0)$.

Пусть, например, имеет место $0 < \underline{D}[\varphi](X)$. Согласно лемме 1 не может не существовать возрастающая [0]-РН [0]-КФДП типа В ψ отображающая интервал $-\infty \triangledown +\infty$ на $-\infty \triangledown +\infty$ и такая, что

(7) $\quad \psi(X) = \varphi(X) \mathbin{\&} \underline{D}[\psi](X) = \overline{D}[\psi](X) = \underline{D}[\varphi](X)$.

Пусть ψ [0]-КФДП, обладающая этими свойствами. Мы обозначим посредством ψ^{-1} [0]-КФДП обратную к ψ, а посредством $\mathcal{F} * \psi^{-1}$ суперпозицию $\mathcal{F}$ и ψ^{-1}. Тогда $\mathcal{F} * \psi^{-1}$ всюду определенная [0]-КФДП, верно $L_{\text{кл}}(\varphi(X), \mathcal{F} * \psi^{-1}, \varphi(X))$, $-\infty < \underline{D}[\mathcal{F} * \psi^{-1}](\varphi(X))$ и (5) и мы на основании теоремы 4 из [12] и леммы 4 получаем $\underline{D}[\mathcal{F} * \psi^{-1}](\varphi(X)) =$
$= \overline{D}[\mathcal{F} * \psi^{-1}](\varphi(X)) = 1$.

Таким образом, ввиду (6) и (7) выполнено

$$-\infty < \underline{D}[\mathcal{F}](X) \quad \overline{D}[\mathcal{F}](X) = \underline{D}[\varphi](X) \mathbin{\&} \neg(\underline{D}[\mathcal{F}](X) = 0).$$

В замечании 7 доказано следующее утверждение.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция и X АДЧ. Тогда выполнено

$$\begin{aligned}
&\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F}](X) = -\infty \mathbin{\&} \overline{D}[\mathcal{F}](X) = +\infty \vee \\
&\quad \exists t\, Y(\mathcal{H}(W_t) \mathbin{\&} \neg(X \in [W_t]_c) \mathbin{\&} L_{\text{кл}}(Y, [\mathcal{F}, W_t], X) \mathbin{\&} \\
&\quad (L_{\text{кл}}(\mathcal{F}, X) \supset L_{\text{кл}}(Y, \mathcal{F}, X)) \mathbin{\&} Y \in \mathcal{T}_{\psi}) \vee \\
&\quad \exists Y(L_{\text{кл}}(Y, \mathcal{F}, X) \mathbin{\&} \neg(Y \in \mathcal{T}_{\psi})) \mathbin{\&} \\
&\quad \underline{D}[\mathcal{F}](X) = \overline{D}[\mathcal{F}](X) \mathbin{\&} \neg(\underline{D}[\mathcal{F}](X) = 0)).
\end{aligned}$$

<u>Замечание 8</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ПРН [0]-функции типа В и X_0 АДЧ, $0 < \mathcal{G}(X_0) < 1$.

1) Пусть L рациональный сегмент, T_0 и T_1 слова из $\mathcal{A} \cup \{-\infty, +\infty\}$, Φ [0]-покрытие и d_0 и d_1 РЧ такие, что

$$\begin{aligned}
(8) \quad & X_0 \in L^0 \mathbin{\&} L \subseteq 0 \vartriangle 1 \mathbin{\&} \forall Y(Y \in L \supset 0 < \mathcal{G}(Y) < 1 \mathbin{\&} (\mathcal{G}(Y) = \mathcal{G}(X_0) \supset \\
& \mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(X_0))) \mathbin{\&} \forall c(c \in L \supset T_0 \leq \Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X_0, c) \leq T_1)
\end{aligned}$$

и

(9) $$\neg\exists k(\mathcal{G}(X_0)\in\Phi_k)\ \&\ d_0\in L\ \&\ d_1\in L\ \&\ \mathcal{G}(d_0)<\partial_m(\Phi_0)\ \&\ \partial_\lambda(\Phi_1)<\mathcal{G}(d_1).$$

На основании (8) и леммы 5.9 из [3] легко доказать

(10) $$\forall p\,\neg\neg\exists q\,\forall c(c\in L\ \&\ |\mathcal{G}(c)-\mathcal{G}(X_0)|<2^{-q}\supset|\mathcal{F}(c)-\mathcal{F}(X_0)|<2^{-p}).$$

Из (9) следует $\neg\exists x^{[0]}(\mathcal{G}(X_0)=x^{[0]})$ и мы получаем $\forall Y(\mathcal{G}(Y)=\mathcal{G}(X_0)\supset Reg(\mathcal{G},Y))$.

Мы построим [0]-функцию φ, для которой выполнено $L_{\text{кл}}(\mathcal{F}(X_0),\varphi,\mathcal{G}(X_0))\ \&\ \forall Y(Y\in L^0\ \&\ \mathcal{G}(Y)=\mathcal{G}(X_0)\supset T_0\leq$ $\leq\underline{D}[\varphi](\mathcal{G}(X_0))\leq\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](Y)\leq\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](Y)\leq\overline{D}[\varphi](\mathcal{G}(X_0))\leq T_1)$.

Пусть k НЧ, $1<k$. Существуют НЧ ℓ_k, p_k и m_k такие, что $\partial_m(\Phi_{\ell_k})=\partial_\lambda(\Phi_k)<\partial_m(\Phi_k)=\partial_\lambda(\Phi_{p_k})\ \&$ $|\Phi_k|\cdot 2^{-m_k}<min(|\Phi_{\ell_k}|,|\Phi_{p_k}|)\cdot 2^{-k-2}$.
Для всяких НЧ j и t, $1\leq j\leq 2^{m_k}$, мы определим

$$Q_{k,j,t}\rightleftharpoons(\partial_\lambda(\Phi_k)+(j-1+\partial_\lambda(\Phi_t))\cdot|\Phi_k|\cdot 2^{-m_k})\ \Delta\ (\partial_\lambda(\Phi_k)+(j-1+\partial_m(\Phi_t))\cdot|\Phi_k|\cdot 2^{-m_k})$$

и построим [0]-последовательность РЧ $\{d_h^{k,j}\}_h^{[0]}$, являющуюся пересчетом всех РЧ d из L, для которых выполнено

$$\partial_\lambda(\Phi_k)+(j-\tfrac{3}{2})\cdot|\Phi_k|\cdot 2^{-m_k}<\mathcal{G}(d)<\partial_\lambda(\Phi_k)+(j+\tfrac{1}{2})\cdot|\Phi_k|\cdot 2^{-m_k}.$$

Пусть φ [0]-функция, которая линейна на сегментах Φ_0, Φ_1 и $Q_{k,j,t}$, где

(11) $$1<k\ \&\ 1\leq j\leq 2^{m_k}\ \&\ 0\leq t,$$

и выполняет $\varphi(\partial_\lambda(\Phi_0))=\mathcal{F}(d_0)$, $\varphi(\partial_\lambda(\Phi_1))=\varphi(\partial_m(\Phi_1))=\mathcal{F}(d_1)$ и для любых НЧ k, j и t, где (11), $\varphi(\partial_\lambda(Q_{k,j,t}))=\mathcal{F}(d_t^{k,j})$.

Ввиду (8) - (10) легко доказать, что φ обладает требуемыми свойствами.

2) а) Если выполнено

(12) $$Reg(\mathcal{G},X_0)\ \&-\infty<\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X_0)\leq\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X_0)<+\infty,$$

то не могут не существовать НЧ m и рациональный сегмент L такие, что (8), где $T_0 \equiv -m$ и $T_1 \equiv m$.

б) Если выполнено

(13) $\quad Reg_1(\mathcal{G}, X_0) \,\&\, -\infty < \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X_0)$,

то $\neg\, Extr(\mathcal{G}, X_0)$ и не могут не существовать НЧ m и рациональный сегмент L, для которых верно (8), где $T_0 \equiv -m$ и $T_1 \equiv +\infty$.

в) Если $\neg(\mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{V}_{\psi})$, то согласно замечаниям 1 и 5 имеет место $Reg_1(\mathcal{G}, X_0) \,\&\, \mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{A}_2$.

3) Пусть верно $\mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{A}_2 \,\&\, \neg\, Extr(\mathcal{G}, X_0)$ и или (12) или (13). Тогда ввиду 1), 2), замечания 1 и леммы 1 не могут не существовать [0]-функция φ и [0]-РН [0]-функция ψ такие,что

$$L_{K\mathcal{A}}(\mathcal{F}(X_0), \varphi, \mathcal{G}(X_0)) \,\&\, -\infty < \underline{\mathcal{D}}[\varphi](\mathcal{G}(X_0)) \leq \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X_0) \leq$$
$$\leq \overline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X_0) \leq \overline{\mathcal{D}}[\varphi](\mathcal{G}(X_0)) \text{ и } Op[\psi](\mathcal{G}(X_0)) = \mathcal{F}(X_0) \,\&$$
$$\&\, \underline{\mathcal{D}}[\varphi](\mathcal{G}(X_0)) \leq \underline{\mathcal{D}}[\psi](\mathcal{G}(X_0)) \leq \overline{\mathcal{D}}[\psi](\mathcal{G}(X_0)) \leq \overline{\mathcal{D}}[\varphi](\mathcal{G}(X_0)).$$

Пусть φ и ψ [0]-функции, обладающие описанными свойствами. Мы на основании теоремы 1 из [7], леммы 1 из [10] и теоремы 4 из [12] получаем $D_{K\mathcal{A}}(\psi, \mathcal{G}(X_0))$ и

$$\neg(\mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{V}_{\psi}) \supset \exists Z(D_{K\mathcal{A}}(Z, \varphi, \mathcal{G}(X_0)) \,\&\, D_{K\mathcal{A}}(Z, \mathcal{F} | \mathcal{G}, X_0)).$$

Если выполнено $D_{K\mathcal{A}}(\mathcal{F} | \mathcal{G}, X_0)$, то согласно леммам 2 и 3 и части 5 замечания 2 имеет место $\exists Z(D_{K\mathcal{A}}(Z, \psi, \mathcal{G}(X_0)) \,\&$ $D_{K\mathcal{A}}(Z, \mathcal{F} | \mathcal{G}, X_0))$.

4) Пусть верно (12) и $\mathcal{G}(X_0) \in \mathcal{A}_2 \,\&\, Extr(\mathcal{G}, X_0)$. Тогда не могут не существовать НЧ m и рациональный сегмент L такие, что

(14) $$X_0 \in L^0 \,\&\, L \leq 0 \triangle 1 \,\&\, \forall c(c \in L \supset |\Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X_0, c)| \leq m) \,\&$$
$$(Sup(\mathcal{G}(X_0), \mathcal{G}, L) \vee Inf(\mathcal{G}(X_0), \mathcal{G}, L)).$$

Пусть m и L объекты, удовлетворяющие описанным условиям. Тогда можно построить [0]-последовательность РЧ из L

$\{c_k\}_k^{[0]}$ такую, что [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{\mathcal{G}(c_k)\}_k^{[0]}$ является строго монотонной и псевдосходится к $\mathcal{G}(X_0)$. Итак, ввиду (14) $\{\mathcal{F}(c_k)\}_k^{[0]}$ псевдосходится к $\mathcal{F}(X_0)$ и существуют [0]-ПЧ ξ и η, для которых для всякого НЧ k выполнено $0<(\mathcal{G}(c_{k+1})-\underset{\smile}{\xi}(k))\cdot(\underset{\smile}{\xi}(k)-\mathcal{G}(c_k))\;\&\;|\mathcal{F}(c_{k+1})-\underset{\smile}{\eta}(k)|<|\mathcal{G}(c_{k+2})-\mathcal{G}(c_{k+1})|$ и, следовательно, [0]-ПЧ ξ является строго монотонным, верно $\xi=\mathcal{G}(X_0)\,\&\,\eta=\mathcal{F}(X_0)\,\&\,\xi\in\Pi_2^{[0]}$ и все члены [0]-последовательности

$$\left\{\frac{\underset{\smile}{\eta}(k)-\eta}{\underset{\smile}{\xi}(k)-\xi}\right\}_k^{[0]} \tag{15}$$

содержатся в интервале $-(m+1)\,\triangledown\,(m+1)$. Согласно теореме 1 существует [2]-КДЧ v такое, что (15) псевдосходится к v. Если выполнено $D_{K\Lambda}(\mathcal{F}|\mathcal{G},X_0)$, то мы на основании замечания 4 и леммы 2 получаем $D_{K\Lambda}(v,\mathcal{F}|\mathcal{G},X_0)$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ псевдоравномерно непрерывные [0]-функции и X АДЧ. Мы обозначим $Y \rightleftharpoons \mathcal{O}p[\mathcal{G}](X)$.

1) Если $\neg(Y\in\mathcal{T}_\psi)$ и - тем более - если $Y\in\mathcal{A}_\beta$, то $Reg_1(\mathcal{G},X)\,\&\,\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)=-\infty\,\&\,\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)=+\infty\vee D_{K\Lambda}(\mathcal{F}|\mathcal{G},X))$.

2) Пусть $Y\in\mathcal{A}_2$ и пусть Z АДЧ такое, что $D_{K\Lambda}(Z,\mathcal{F}|\mathcal{G},X)$.

а) Если выполнено $\neg\,\mathrm{Extr}\,(\mathcal{G},X)$, то не может не существовать всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП типа В ψ такая, что $\psi(Y)=\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)\,\&\,D_{K\Lambda}(Z,\psi,Y)$.

б) Если имеет место $\mathrm{Extr}\,(\mathcal{G},X)$, то не могут не существовать [0]-ПЧ η и строго монотонное [0]-ПЧ ξ из $\Pi_2^{[0]}$ такие, что $=Y\,\&\,\eta=\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)$ и [0]-последовательность (15) псевдосходится к Z.

3) Пусть верно $D_{K\Lambda}(0,\mathcal{F}|\mathcal{G},X)$. Тогда $\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)\in\mathcal{A}_1$.

Доказательство. Мы можем без ограничения общности предположить, что $0<\mathcal{O}p[\mathcal{G}](X)<1$.

Части 1 и 2 утверждения являются непосредственным следствием замечания 8.

Пусть выполнено $\mathrm{D}_{\text{кл}}(0, \mathcal{F} | \mathcal{G}, X)$. Тогда согласно уже доказанной части 2 утверждения теоремы, лемме 1 из [10], теореме 5 из [7], замечанию 6 и теореме 1 верно $\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) \in \mathcal{A}_1$. (Ср. пример 2 из [9].)

Пример 3. Существуют строго монотонные [0]-ПЧ ξ из $\Pi_2^{[0]}$ и η из $\Pi_1^{[0]}$ и [1]-КДЧ v такие, что $0 < \xi = v < 1$ (и, следовательно, $v \in \mathcal{A}_2$) и ни для какой [0]-функции ψ не имеет место $\mathrm{D}_{\text{кл}}(\psi, v) \,\&\, \mathrm{L}_{\text{кл}}(\eta, \psi, v)$ (см. замечание 3). С другой стороны, согласно теореме 1 и замечанию 4 существуют ПРН [0]-функции типа B $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ и АДЧ X такие, что $\mathcal{G}(X) = \xi \,\&\, \mathcal{F}(X) = \eta \,\&$ $\mathrm{D}_{\text{кл}}(0, \mathcal{F} | \mathcal{G}, X)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ псевдоравномерно непрерывные [0]-функции. Тогда для любого АДЧ X , для которого выполнено

(16) $\mathrm{Reg}(\mathcal{G}, X) \,\&\, \neg\, (\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) \in \mathcal{V}_{\psi})$,

имеет место

(17) $$\neg\neg\,(\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = -\infty \,\&\, \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = +\infty \,\vee\, \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) \,\&\, \neg\, (\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = 0)).$$

Доказательство. Мы можем предположить, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются [0]-функциями типа B. Пусть X АДЧ такое, что (16). Тогда

(18) $0 < X < 1 \,\&\, \mathcal{F}(X) \in \mathcal{A}_2$

(замечание 5). Согласно правилам конструктивной логики мы можем (17) доказать разбором случаев. Ввиду теоремы 3 верно $\mathrm{Reg}_1(\mathcal{F}, X)$ и не может не иметь место или

(19) $-\infty < \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) = \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) < +\infty$

или

(20) $\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) = -\infty \,\&\, \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) = +\infty$.

1) Пусть верно (19). Тогда мы на основании леммы 1 из [8]

получаем (17).

2) Пусть выполнено (20). Мы докажем, что в этом случае верно

(21) $\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = +\infty$.

Мы допустим, что - например - имеет место $-\infty < \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)$. Тогда не могут не существовать НЧ m и рациональный сегмент L, для которых выполнено

(22) $X \in L^0 \,\&\, L \subseteq 0\Delta 1 \,\&\, \forall Y(Y \in L \supset -m \leq \Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y))$.

Пусть m и L объекты, обладающие перечисленными свойствами и пусть $\overline{\mathcal{G}}$ [0]-функция типа В такая, что $\overline{\mathcal{G}} = (m+1)^{-1}\cdot\mathcal{F}+\mathcal{G}$. Тогда ввиду (20) и (22) верно

(23) $\underline{D}[\overline{\mathcal{G}},\mathcal{F}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\overline{\mathcal{G}},\mathcal{F}](X) = +\infty$,

для любого АДЧ Y из L выполнено $(m+1)^{-1} \leq \Theta(\overline{\mathcal{G}},\mathcal{G},X,Y)$ и, следовательно, $0 \leq \Theta(\mathcal{G},\overline{\mathcal{G}},X,Y) \leq m+1$, $\overline{\mathcal{G}}(Y) = \overline{\mathcal{G}}(X) \supset \mathcal{G}(Y) = \mathcal{G}(X) \,\&\, \mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(X)$, $-(m+1)^2 \leq \Theta(\mathcal{F},\overline{\mathcal{G}},X,Y) \leq m+1$.

Итак, мы на основании (16) и (18) и замечаний 5 и 6 получаем $\overline{\mathcal{G}}(X) \in \mathcal{A}_2 \,\&\, \mathrm{Reg}(\overline{\mathcal{G}},X) \,\&\, \neg\,\mathrm{Extr}(\overline{\mathcal{G}},X)$.

Мы можем без ограничения общности предположить, что $\forall Y(Y \in L \supset 0 < \overline{\mathcal{G}}(Y) < 1)$. Мы используем замечание 1 и часть 1 замечания 8. Пусть φ [0]-функция, для которой выполнено

$$(24)\quad \begin{aligned} &L_{\text{кл}}(\mathcal{F}(X),\varphi,\overline{\mathcal{G}}(X)) \,\&\, -(m+1)^2 \leq \underline{D}[\varphi](\overline{\mathcal{G}}(X)) \leq \\ &\underline{D}[\mathcal{F},\overline{\mathcal{G}}](X) \leq \overline{D}[\mathcal{F},\overline{\mathcal{G}}](X) \leq \overline{D}[\varphi](\overline{\mathcal{G}}(X)) \leq m+1 . \end{aligned}$$

Мы на основании (16) и теоремы 2 получаем $\underline{D}[\varphi](\overline{\mathcal{G}}(X)) = \overline{D}[\varphi](\overline{\mathcal{G}}(X)) \neq 0$. Но это ввиду (24) и леммы 1 из [8] противоречит (23).

Итак, выполнено (21), что и требовалось доказать.

<u>Замечание 9</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ПРН [0]-функции типа В и X АДЧ.

1) Если имеет место

$Reg(\mathcal{G}, X) \& (\overline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = -\infty \vee \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = +\infty)$,

то верно $\mathcal{D}_{КЛ}(0, \mathcal{G} | \mathcal{F}, X)$ и, следовательно, согласно теореме 3 выполнено $\mathcal{G}(X) \in \mathcal{A}_1$.

2) Если $\mathcal{G}(X) \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_\alpha \& \mathcal{F}(X) \in \mathcal{A}_\beta$, то согласно 1), теоремам 3 и 4, замечанию 6 и лемме 1 из [8] верно

$Reg(\mathcal{G}, X) \& Reg_1(\mathcal{F}, X) \& \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](X) = -\infty \&$ $\overline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = \overline{\mathcal{D}}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](X) = +\infty$, ибо $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{A}_\beta \supset \neg(\mathcal{F}(X) \in \mathcal{V}_{\psi})$ (замечание 5).

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York, 1937.

[2] BRUCKNER A.M.: Differentiation of Real Functions, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[3] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978),15-60.

[4] ДЕМУТ О.: Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978),61-96.

[5] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[6] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[7] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы К.М. Гарга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 457-472.

[8] ДЕМУТ О.: О псевдодифференцируемости равномерно непрерывных конструктивных функций по функциям того же типа, Comment. Math. Univ. Carolinae 22(1981), 497-512.

[9] ДЕМУТ О.: Об одном обобщении конструктивного аналога тео-

ремы К.М. Гарга, Comment. Math. Univ. Carolinae 22 (1981), 607-620.

[10] ДЕМУТ О.: О некоторых классах арифметических действительных чисел, Comment. Math. Univ. Carolinae 23(1982), 453-465.

[11] ДЕМУТ О.: О борелевых типах некоторых классов арифметических действительных чисел, Comment. Math. Univ. Carolinae 23(1982), 593-606.

[12] ДЕМУТ О.: Об арифметической сложности дифференцирования в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 24(1983), 301-316.

Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Malostranské nám. 25, Praha, Czechoslovakia

(Oblatum 9.4. 1983)