Vladimir Vladimirovich Uspenskij

К теореме Балцара-Франека об отображениях экстремально несвязных бикомпактов на канторов дисконтинуум

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 1, 155--165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106213

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

24,1 (1983)

К ТЕОРЕМЕ БАЛЦАРА-ФРАНЕКА ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫХ БИКОМПАКТОВ НА КАНТОРОВ ДИСКОНТИНУУМ

В. В. УСПЕНСКИЙ

Содержание. Балцар и Франек доказали, что любой экстремально несвязный бикомпакт веса m непрерывно отображается на канторов дисконтинуум того же веса. Предлагаемая работа содержит более короткое доказательство этой теоремы, опирающееся на свойство проективности экстремально несвязных бикомпактов.

Ключевые слова: Экстремально несвязный бикомпакт, полная булева алгебра.

Классификация: 54D 30, 54G 05, 06E10

Результатом многолетних усилий различных исследователей [1 - 6], [12] явилась следующая замечательная теорема [7]: любой бесконечный экстремально несвязный бикомпакт (сокращенно э.н.б.) веса m непрерывно отображается на канторов дисконтинуум $\mathfrak{D}^{m}$. Эквивалентная формулировка на языке булевых алгебр такова: бесконечная полная булева алгебра содержит свободную подалгебру той же мощности. Рассуждение в [7] основано на последовательных перестройках независимых подсемейств полных булевых алгебр. Подход, основанный на систематическом использовании свойств э.н.б. и их непрерывных отображений, позволяет упростить детали и, как нам кажется, сделать доказательство более прозрачным. Бесконечный э.н.б. X веса m называется корректным [13], если X непрерывно отображается на

$\mathfrak{D}^{m}$. В настоящей работе теорему Балцара-Франека: всякий бесконечный э.н.б. корректен - мы доказываем, применяя топологические методы. Идеи остаются по существу теми же, что и в [7]; главное новшество заключается в применении утверждения Ф5 (см. ниже), вытекающего из утверждения Ф4 о проективности э.н.в.

План статьи таков. В § 1 собран ряд известных фактов об экстремально несвязных пространствах. В § 2 мы излагаем, следуя [6] и [8], основные результаты из [2]; в частности, производится редукция теоремы к ее частному случаю, когда э.н.б. X является $n - \nabla c$-приведенным (определение дается ниже), и для этого случая теорема доказывается в дополнительном предположении об изолированности кардинала $\nabla c(X)$. Наконец, в § 3 разбирается случай, который до появления работы [7] служил препятствием к окончательному решению вопроса о корректности произвольного э.н.б.: X является $n - \nabla c$-приведенным, и $\nabla c(X)$ - предельный кардинал. Оценить красоту и трудность этого результата помогает работа [5], где одно лишь перечисление дополнительных предположений об э.н.б. X, каждое из которых обеспечивает корректность бикомпакта X, занимает целую страницу.

Буквы α, β обозначают ординалы, k, m, n - бесконечные кардиналы. Полагаем $n^{<k} = \Sigma\{n^{m} : m < k\}$. Через βm обозначаем компактификацию Стоуна-Чеха дискретного пространства мощности m. Любой э.н.б. X представим в виде дизъюнктной суммы $X_1 \oplus X_2$, где X_1 - замыкание множества изолированных точек в X, а X_2 - э.н.б. без изолированных точек. При этом X_1 либо конечен либо имеет вид $X_1 = \beta m$. Поскольку $w(\beta m) = \exp m$, а плотность дисконтинуума $\mathcal{D}^{\exp m}$ равна m, бикомпакт βm корректен. Значит, если X_2 корректен, то и X корректен. Это позволяет предполагать в дальнейшем все э.н.б. бесконечными и без изолированных точек.

§ 1. Для э.н.б. X пусть $T_0(X)$ - совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств в X, $T(X) = T_0(X) \setminus \{\emptyset\}$. Имеем $w(X) = |T_0(X)|$. Если $\gamma \subseteq T_0(X)$, то $\alpha(\gamma)$ - наименьшее подмножество в $T_0(X)$ такое, что: (1) $\gamma \subseteq \alpha(\gamma)$, (2) если $U \in \alpha(\gamma)$, то $X \setminus U \in \alpha(\gamma)$ и (3) если $\lambda \subseteq \alpha(\gamma)$, то $[\cup\lambda] \in \alpha(\gamma)$. Кардинал $m(X) = \min\{|\gamma| : \gamma \subseteq T_0(X)$ и $\alpha(\gamma) = T_0(X)\}$ называется алгебраическим весом э.н.б. X. Для любого топологического пространства X положим $\nabla c(X) = \min\{k :$ если γ - дизъюнктная система открытых в X множеств, то $|\gamma| < k\}$. Кардинал $\nabla c(X)$ регулярен для любого X [9]. Э.н.б. X назовем m-приведенным (соотв. ∇c-приведенным), если $m(U) = m(X)$ (соотв. $\nabla c(U) = \nabla c(X)$) для любого $U \in T(X)$.

Ф1. Пусть X - э.н.б. и $\gamma \subseteq T_0(X)$. Тогда $|\alpha(\gamma)| \leq |\gamma|^{<\nabla c(X)}$. В частности, $w(X) = |T_0(X)| \leq m(X)^{<\nabla c(X)}$.

Ф2. Пусть $f : X \to Y$ замкнуто, неприводимо и $f(X) = Y$. Если X хаусдорфово, а Y экстремально несвязно, то f - гомеоморфизм.

Ф3. Пусть X - э.н.б. и $Y \subseteq X$ всюду плотно в X. Тогда $X = \beta Y$.

Действительно, естественное отображение $\beta Y \to X$ неприводимо и потому, в силу Ф2, является гомеоморфизмом.

Ф4. Пусть X - э.н.б., Y и Z - бикомпакты, $f : X \to Y$

и $g: Z \longrightarrow Y$ непрерывны, $g(Z) = Y$. Тогда существует такое непрерывное ото ражение $h: X \longrightarrow Z$, что $f = g \circ h$.

Доказательство. В произведении $X \times Z$ рассмотрим подпространство $P = \{(x,z) \in X \times Z : f(x) = g(z)\}$. Проекция $pr_1 : (x,z) \mapsto x$ отображает P на X. Выберем в P минимальное замкнутое подпространство P_0, для которого $pr_1(P_0) = X$. В силу Ф2 замкнутое неприводимое отображение $pr_1 : P_0 \longrightarrow X$ - гомеоморфизм. Примем за h композицию обратного гомеоморфизма $X \longrightarrow P_0$ и проекции $pr_2 : P_0 \longrightarrow Z$.

Нам понадобится такое следствие утверждения Ф4:

Ф5. Пусть X - э.н.б., $\{Y_a : a \in A\}$ и $\{Z_a : a \in A\}$ - два семейства бикомпактов. Предположим, что при каждом $a \in A$ в Y_a существует всюду плотное подпространство Y'_a, допускающее непрерывное отображение на некоторое всюду плотное подпространство в Z_a. Если X отображается на $\Pi\{Y_a : a \in A\}$, то X отображается также на $\Pi\{Z_a : a \in A\}$.

Достаточно установить, что X отображается на $\Pi\{\beta Y'_a : a \in A\}$, а это вытекает из Ф4.

§ 2. Содержание этого параграфа в основном заимствовано из [6] и [8, гл. 3, § 3, стр. 70]. Пусть для каждого $a \in A$ задано отображение $f_a : X \longrightarrow X_a$. Скажем, что семейство $\{f_a : a \in A\}$ конечно-разделяющее, если для любого конечного подмножества $K \subseteq X$ найдется такое $a \in A$, что сужение f_a на K взаимно-однозначно.

Лемма 1. ([7, лемма 4]). Пусть $\{X_a : a \in A\}$ - непустое семейство бесконечных множеств и $X = \Pi\{X_a : a \in A\}$. Тогда существует конечно-разделяющее семейство отображений $\{f_a : a \in A\}$, где $f_a : X \longrightarrow X_a$.

Доказательство. Вполне упорядочим множество A так, чтобы при $a, b \in A$ и $a \leq b$ выполнялось $|X_a| \leq |X_b|$, и докажем наше утверждение индукцией по порядковому типу $ord\, A$ множества A. Случай конечного A очевиден. Пусть теперь A бесконечно и $[A]^{<\omega}$ - множество конечных подмножеств в A. Предположим сначала, что существует взаимно-однозначное отображение $\varphi : [A]^{<\omega} \longrightarrow A$, для которого $B \leq \varphi(B)$ при любом $B \in [A]^{<\omega}$; последнее неравенство означает, что $b \leq \varphi(B)$ при любом $b \in B$. Фиксируем вложение i_B множества $X_B = \Pi\{X_a : a \in B\}$ в $X_{\varphi(B)}$. Если $a \in A$ имеет вид $a = \varphi(B)$, полагаем $f_a = i_B \circ \pi_B$, где $\pi_B : X \longrightarrow X_B$ - проекция. Для прочих a отображения $f_a : X \longrightarrow X_a$ выбираем произвольно. Поскольку семейство проекций $\{\pi_B : B \in [A]^{<\omega}\}$ конечно-разделяющее, семейство $\{f_a : a \in A\}$ также конечно-разделяющее. Если же отображение $\varphi : [A]^{<\omega} \longrightarrow A$ с указанными выше свойствами не существует, то в A есть конфинальное подмножество Γ мощности $< |A|$: иначе отображение φ можно было бы построить по трансфинитной рекурсии. Существует такое разбиение $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ множества A, что $ord\, A_\gamma < ord\, A$ при всех $\gamma \in \Gamma$. По предположению индукции, существует конечно-разделяющее семейство отображений $\{g_\gamma : X \longrightarrow X_{A_\gamma}\}$ и, при каждом $\gamma \in \Gamma$, конечно-разделяющее семейство $\{h_{\gamma_a} : a \in A_\gamma\}$ отображений $h_{\gamma_a} : X_{A_\gamma} \longrightarrow X_a$. При $a \in A_\gamma$ полагаем $f_a = h_{\gamma_a} \circ g_\gamma : X \longrightarrow X_a$. Тогда семейство $\{f_a : a \in A\}$ - конечно-разделяющее.

Лемма 2. Пусть $\{m_a : a \in A\}$ - непустое семейство бесконечных кардиналов, $m = \Pi\{m_a : a \in A\}$ и X - топологическое пространство. Тогда свободная сумма $\oplus\{X^{m_a} : a \in A\}$ непрерывно отображается на некоторое плотное подпространство в X^m.

Доказательство. Если $\{f_a : m \to m_a\}$ - конечно-разделяющее семейство (лемма 1), то семейство двойственных отображений $f^*_a : X^{m_a} \to X^{m}$ определяет непрерывное отображение $f^*: \oplus X^{m_a} \to X^{m}$ образ которого плотен в X^{m}.

Лемма 3. Если в э.н.б. X есть π-база из корректных открыто-замкнутых подмножеств, то X корректен.

Доказательство. Пусть $\{U_a : a \in A\}$ - дизъюнктное семейство корректных открыто-замкнутых множеств и $[\cup\{U_a : a \in A\}] = X$. Положим $m_a = w(U_a)$. Тогда $m = \prod\{m_a : a \in A\} = w(X)$. По предположению, каждое U_a непрерывно отображается на $\mathcal{D}^{m_a}$. Из леммы 2 и Ф3 вытекает, что X отображается на $\mathcal{D}^{m}$.

В любом э.н.б. $m - \nabla c$ -приведенные (т.е. одновременно m-приведенные и ∇c -приведенные) открыто-замкнутые подмножества образуют π-базу. Согласно лемме 3, для доказательства теоремы достаточно установить, что все $m - \nabla c$ -приведенные э.н.б. корректны.

Лемма 4. Пусть X - m-приведенный э.н.б., $\gamma \subseteq T(X)$ и $|\gamma| < m(X)$. Тогда найдется $W \in T(X)$ такое, что $W \cap V \neq \emptyset$ и $(X \setminus W) \cap V \neq \emptyset$ для всех $V \in \gamma$.

Это доказано, например, в [6, лемма 5], [8, 3.3.8], [4, лемма 1].

Из леммы 4 вытекает, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $m(X) \leq \pi\chi(x, X)$. Поэтому из теоремы Шапировского об отображениях на тихоновские кубы [13] следует, что m-приведенный эн.б. X отображается на $\mathcal{D}^{m(X)}$. Нам понадобится более точная формулировка этого результата. Два отображения $f: X \to Y$ и $g: X \to Z$ называются ортогональными, если их диагональное произведение $f \Delta g: X \to Y \times Z$ сюръективно.

Лемма 5. Пусть X - m-приведенный э.н.б., Y - бикомпакт π-веса $< m(X)$, $f: X \to Y$ - непрерывная сюръекция. Тогда существует непрерывное отображение $g: X \to \mathcal{D}^{m(X)}$, ортогональное к f.

Доказательство. Используя лемму 4, по трансфинитной рекурсии строим отображения $g_\alpha: X \to \mathcal{D}$ $(\alpha < m(X))$ так, чтобы g_α было ортогонально диагональному произведению $f \Delta (\Delta \{ g_\beta : \beta < \alpha \})$. Тогда $g = \Delta \{ g_\alpha : \alpha < m(X) \}$ - искомое.

Лемма 6. Пусть X - m-приведенный э.н.б. Если $\nabla c(X)$ - изолированный кардинал (иными словами, число Суслина $c(X)$ достигается), то X корректен.

Доказательство. Пусть система $\gamma \subseteq T(X)$ дизъюнктна и $|\gamma| = c(X)$. По лемме 4, каждый бикомпакт $W \in \gamma$ отображается на $\mathcal{D}^{m(W)} = \mathcal{D}^{m(X)}$. Из леммы 2 и Ф3 вытекает, что бикомпакт $[\cup \gamma]$ отображается на $\mathcal{D}^{m}$ при $m = m(X)^{|\gamma|}$. Поскольку множество $[\cup\gamma]$ открыто-замкнуто в X, а $w(X) \leq m$ в силу Ф1, бикомпакт X отображается на $\mathcal{D}^{w(X)}$.

§ 3. Согласно лемме 6 и замечанию после леммы 3, остается доказать лишь следующий частный случай теоремы: всякий $m - \nabla c$ -приведенный э.н.б. X, для которого кардинал $\nabla c(X)$ неизолирован, корректен. Решающую роль играет

Лемма 7. ([10],[7],[11]). Пусть X - топологическое пространство, $\{ U_\alpha : \alpha < m \}$ - семейство открытых в X множеств. Предположим, что $c(U_\alpha) > m$ при всех $\alpha < m$. Тогда существует такое дизъюнктное семейство $\{ V_\alpha : \alpha < m \}$ непустых открытых в X множеств, что $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ при $\alpha < m$.

Напомним доказательство (подробнее см. [11, теорема

1.5]). Назовем дизъюнктную систему P открытых множеств правильной, если при любом $\alpha < m$ множество $\{V \in P : U_\alpha \cap V \neq \emptyset\}$ либо пусто, либо имеет мощность $\geq m$. Для максимальной правильной системы P_0 всегда реализуется вторая альтернатива, что позволяет построить по трансфинитной рекурсии такое семейство $\{V'_\alpha : \alpha < m\}$ попарно различных элементов из P_0, что $V_\alpha = V'_\alpha \cap U_\alpha$ непусто при всех $\alpha < m$. Семейство $\{V_\alpha : \alpha < m\}$ - искомое.

<u>Лемма 8</u>. Пусть X - топологическое пространство. Предположим, что кардинал $k = \nabla c(X)$ неизолирован и $\nabla c(U) = k$ для любого непустого открытого подмножества $U \subseteq X$. Если $\{U_a : a \in A\}$ - семейство непустых открытых множеств в X и $|A| < k$, то для любого кардинала $m < k$ существует такое дизъюнктное семейство $\{V_\beta : \beta < m\}$ открытых в X множеств, что $U_a \cap V_\beta \neq \emptyset$ при любых $a \in A$ и $\beta < m$.

<u>Доказательство</u>. Лемма 7 позволяет ограничиться случаем дизъюнктного семейства $\{U_a\}$. Для каждого $a \in A$ выберем дизъюнктное семейство $\{W_{a\beta} : \beta < m\}$ непустых открытых подмножеств в U_a. При $\beta < m$ полагаем $V_\beta = \cup\{W_{a\beta} : a \in A\}$. Тогда $\{V_\beta : \beta < m\}$ - искомое.

<u>Лемма 9</u>. Пусть X - ∇c-приведенный э.н.б., кардинал $k = \nabla c(X)$ неизолирован, Y - бикомпакт π-веса $< k$, $f : X \to Y$ - непрерывная сюръекция. Если $m < k$, то существует непрерывное отображение $g : X \to \beta m$, ортогональное к f.

В силу 00, это утверждение следует из леммы 8, примененной к семейству $\{f^{-1}(V) : V \in A\}$, где A - некоторая π-база в Y мощности $< k$.

Лемма 10. Всякий $n-\nabla c$-приведенный э.н.б. X, для которого кардинал $k=\nabla c(X)$ неизолирован, непрерывно отображается на произведение $\mathfrak{D}^{k\cdot n(X)}\times\prod\{\beta|\alpha|:\alpha<k\}$.

Доказательство. Используя лемму 9, по трансфинитной рекурсии строим отображения $f_\alpha: X\to\beta|\alpha|$ $(\alpha<k)$ так, чтобы f_α было ортогонально диагональному произведению $\Delta\{f_\beta:\beta<\alpha\}$. Тогда $f=\Delta\{f_\alpha:\alpha<k\}$ отображает X на $Y=\prod\{\beta|\alpha|:\alpha<k\}$. Поскольку $\beta|\alpha|$ гомеоморфно $\mathfrak{D}\times\beta|\alpha|$, бикомпакт Y гомеоморфен произведению $\mathfrak{D}^{k}\times Y$. Это доказывает лемму в случае $k\geq n(X)$. Если же $k=\pi w(Y)<n(X)$, то применима лемма 5: X отображается на $\mathfrak{D}^{n(X)}\times Y=\mathfrak{D}^{k\cdot n(X)}\times Y$.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Пусть э.н.б X такой же, как в формулировке леммы 10. Докажем, что X корректен. По лемме 10, X отображается на

$\mathfrak{D}^{k\cdot n(X)}\times\prod\{\beta|\alpha|:\alpha<k\}=\prod\{\mathfrak{D}^{n(X)}\times\beta|\alpha|:\alpha<k\}$.

По лемме 2, для любых бесконечных кардиналов n и m пространство $\mathfrak{D}^{n}\times m$, всюду плотное в $\mathfrak{D}^{n}\times\beta m$, непрерывно отображается на некоторое всюду плотное подпространство в $\mathfrak{D}^{n^{m}}$. Поэтому применимо Ф5: X отображается на

$\prod\{\mathfrak{D}^{n(X)^{m}}:m<k\}=\mathfrak{D}^{w}$, где $w=\Sigma\{n(X)^{m}:m<k\}$.

Остается заметить, что, согласно Ф1, вес X не превосходит w.

Автор благодарен профессору А.В. Архангельскому за поддержку и внимание, а также Л.Б. Шапиро и Б.Э. Шапировскому за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

[1] Б.А. ЕФИМОВ: Экстремально-несвязные бикомпакты и абсолюты, Труды Московского матем. общества 23(1970),

235-276.

[2] С.В. КИСЛЯКОВ: Свободные подалгебры полных булевых алгебр и пространства непрерывных функций, Сибирский матем. ж. 14(1973), 569-581.

[3] S. KOPPELBERG: Free subalgebras of complete Boolean algebras, Notices Amer. Math. Soc. 20(1973), A-418.

[4] J.D. MONK: On free subalgebras of complete Boolean algebras, Arch. der Math. 29(1977), 113-115.

[5] A. BLASZCZYK: On mappings of extremally disconnected compact spaces onto Cantor cubes, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 23, Topology, Budapest (Hungary, 1978), 143-153.

[6] И. ВАНДЛОВ: Непрерывные отображения экстремально-несвязных бикомпактов на канторов дисконтинуум, Вестник Московского университета, Серия 1, 1979,№ 5, с. 56-59.

[7] B. BALCAR, F. FRANĚK: Independent families in complete Boolean algebras (to appear in Trans. Amer. Math. Soc.).

[8] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты, Успехи математических наук 33(1978), 29-84.

[9] I. JUHÁSZ: Cardinal functions in topology, Math. Centre Tracts 34, Amsterdam, 1971.

[10] B. BALCAR, P. VOJTÁŠ: Refining systems on Boolean algebras, Lecture Notes in Math. 619 (Springer-Verlag, Berlin, 1977), 45-58.

[11] B. BALCAR, P. SIMON, P. VOJTÁŠ: Refinement properties and extensions of filters in Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 267(1981), 265-283.

[12] В.И. ПОНОМАРЕВ, Л.Б. ШАПИРО: Абсолюты топологических пространств и их непрерывных отображений, Успехи матем. наук 31(1976), 121-136.

[13] В.Э. ШАПИРОВСКИЙ: Об отображениях на тихоновские кубы,
Успехи матем. наук 35(1980), 122-130.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, С С С Р

(Oblatum 22.11. 1982)