I. E. Egorov

О глобальном решении для нелинейного гиперболо-параболичесного уравнения

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 24 (1983), No. 1, 93--99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106207`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

24,1 (1983)

# О ГЛОБАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. Е. ЕГОРОВ

Abstract: Let $\Omega$ be a bounded domain in $R^n$ with a sufficiently smooth boundary. In the domain $Q_T = \Omega \times (0,T)$ we consider the first boundary value problem for partial differential equation

$$K(x,t)u_{tt} + \alpha(x,t)u_t - \Delta u + u^2 = 0,$$

where $k(x,t) \geq 0$. Sufficient conditions are given under which the problem in question has a unique weak global solution.

Key words: Equation of mixed type, boundary value problem, Galerkin approximations.

Classification: 35J40

---

Пусть $\Omega$ - ограниченная область в $R^m$ с достаточно гладкой границей $S$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, где $T$ - конечное положительное число.

В области $Q_T$ рассмотрим уравнение вида:

$$(1)\quad K(x,t)u_{tt} + \alpha(x,t)u_t - \Delta u + u^2 = 0, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i}.$$

Предположим, что для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия

$$K \in C^2(\overline{Q}_T);\ \alpha \in C^1(\overline{Q}_T);\ K(x,t) \geq 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

Нелинейное уравнение (1) относится классу гиперболо-параболических уравнений [1-3]. В работе [4-6] рассматривалась разрешимость в целом первой смешанной задачи при $K(x,t) \equiv 1$ и $\alpha(x,t) \equiv 0$, $m \leq 6$.

В данной заметке получено глобальное решение видоизмененной смешанной задачи для уравнения (1) для частных начальных значений. Положим

$$\Gamma_+ = \{(x,0):\ K(x,0) > 0,\ x \in \Omega\}.$$

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$(2)\qquad u\big|_{t=0} = u_0(x),\quad u_t\big|_{\Gamma_+} = 0,\quad u\big|_{S_T} = 0.$$

Пусть $W^1_{2,0}(Q_T)$ – замыкание в норме $W^1_2(Q_T)$ множества всех гладких в $\bar{Q}_T$ функций, равных нулю вблизи $S_T$; а $\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$ состоит из элементов $W^1_{2,0}(Q_T)$, обращающихся в нуль при $t = T$.

<u>Определение</u>. Функция $u(x,t)$ из $W^1_{2,0}(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (1),(2), если:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x),\ u \in L^\infty(0,T;\mathring{W}^1_2(\Omega)),\ \sqrt{K}u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

и выполнено тождество

$$(3)\qquad \int_{Q_T}[-Ku_t\eta_t + \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\eta_{x_i} + (\alpha - K_t)u_t\eta + u^2\eta]\,dx\,dt = 0$$

для любой $\eta(x,t)$ из $\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$.

Как и в статье [4] положим

$$J(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \varphi^2_{x_i}\,dx + \frac{1}{3}\int_\Omega \varphi^3\,dx,\quad \varphi \in \mathring{W}^1_2(\Omega);$$

$$d = \inf_u \{\sup_{\lambda \ge 0} J(\lambda u),\ u \in \mathring{W}^1_2(\Omega),\ u \ne 0\};$$

$$W = \{u:\ u \in \mathring{W}^1_2(\Omega),\ 0 \le J(\lambda u) < d,\ \forall\lambda \in [0,1]\}.$$

Ясно, что в силу теоремы вложения [5] при $m \le 6$ функционал $J(\varphi)$ является непрерывным на $\mathring{W}^1_2(\Omega)$. В [4,6] установлен следующий результат.

<u>Лемма</u>. Если выполнено условие $m \le 6$, то класс $W$

является непустым, звездным относительно нуля, открытым и ограниченным множеством в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

**Теорема 1.** Пусть $n \le 6$, $\alpha - \frac{1}{2}K_t \ge \delta > 0$ и задана функция $u_0(x)$ из $W$. Тогда задача (1),(2) имеет обобщенное решение $u(x,t)$ из $\overline{W}$ для всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом Галеркина. Пусть $K_\varepsilon(x,t) = K(x,t) + \varepsilon$ для $\varepsilon > 0$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальная система в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормированная в $L^2(\Omega)$. Заметим, что существует последовательность функций $u_{0m}(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая условиям:

$$u_{0m} \in W, \quad \| u_{0m} - u_0 \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \qquad \text{при } m \longrightarrow \infty .$$

Приближенное решение $u_{\varepsilon m}$ будем искать в виде

$$u_{\varepsilon m}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} C_{\varepsilon m}^{k}(t)\varphi_k(x)$$

из соотношений

$$(4)\ \int_\Omega [K_\varepsilon u''_{\varepsilon m}\varphi_\ell + \alpha u'_{\varepsilon m}\varphi_\ell + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i} + u^2_{\varepsilon m}\varphi_\ell]\,dx = 0 ,$$

$$(5)\ u_{\varepsilon m}(x,0) = u_{0m}(x),\ u'_{\varepsilon m}(x,0) = 0,\ \ell = \overline{1,m}.$$

Задача Коши (4),(5) для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеет решение $u_{\varepsilon m}(t)$ на интервале $[0; t_{\varepsilon m}]$, где $t_{\varepsilon m} > 0$. Умножая (4) на свое $\frac{d}{dt}C_{\varepsilon m}^{\ell}$ и суммируя по $\ell$ от 1 до $m$, затем проинтегрировав полученное соотношение по $t$, придем к равенству

$$(6)\ \frac{1}{2}\int_\Omega K_\varepsilon (u'_{\varepsilon m})^2 dx \Big|^{t=t} + \int_0^t\int_\Omega (\alpha - \frac{1}{2}K_t)(u'_{\varepsilon m})^2 dx\,dt + \mathcal{J}(u_{\varepsilon m}(t)) = \mathcal{J}(u_{0m}).$$

В силу леммы из равенства (6) нетрудно получить, что

$$(7)\qquad u_{\varepsilon m}(t) \in W \quad \text{для } \forall t.$$

Тем самым показано, что $t_{\varepsilon m} = T$. С другой стороны множество $W$ ограничено в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и потому из (7) вытекает, что последовательность $\{u_{\varepsilon m}\}$ ограничена в $L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$. Поскольку функционал $\mathcal{J}(u)$ ограничен по абсолютной величине, из (6) следует, что $u'_{\varepsilon m}$ $(\sqrt{K}u'_{\varepsilon m})$ принадлежит ограниченному множеству в $L^2(Q_T)$ $(L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))$.

В силу компактности вложения $W_2^1(Q_T)$ в $L^2(Q_T)$ можем считать, что подпоследовательность $u_{\mu N}$ выбранная из последовательности $\{u_{\varepsilon m}\}$, удовлетворяет условиям

$$
\begin{aligned}
&u_{\mu N} \longrightarrow u \quad &&*\text{-слабо в } L^\infty(0,T\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),\\
&u'_{\mu N} \longrightarrow u' &&\text{слабо в } L^2(Q_T),\\
&u_{\mu N} \longrightarrow u &&\text{сильно в } L^2(Q_T) \quad \text{и почти всюду},\\
&u^2_{\mu N} \longrightarrow u^2 &&\text{слабо в } L^{3/2}(Q_T),\\
&u_{\mu N}(0) \longrightarrow u(0) &&\text{слабо в } L^2(\Omega).
\end{aligned}
$$

В частности, отсюда следует $u(0) = u_0$. Заметим, что приближенные решения $u_{\varepsilon m}$ удовлетворяют тождеству

$$\int_{Q_T} [-K_\varepsilon u'_{\varepsilon m}\Phi' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + (\alpha - K_t)u'_{\varepsilon m}\Phi + u^2_{\varepsilon m}\Phi]\,dx\,dt = 0,$$

для любой $\Phi = \sum_{\ell=1}^{p} \beta_\ell(t)\varphi_\ell(x)$, $\varphi_\ell \in C^1[0,T]$, $\beta_\ell(T) = 0$, $p < m$.

Таким образом, устремляя $\mu$ к нулю, при $N \to \infty$ в последнем тождестве получаем при фиксированной функции $\Phi(x,t)$ тождество (3), что и доказывает теорему 1.

Теперь установим один частный результат о единственности обобщенного решения.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $n \le 4$ и $\alpha - \frac{3}{2}K_t \ge \delta > 0$. Тогда задача (1),(2) может иметь не более одного обобщенного решения из пространства $W_2^1(Q_T)$.

Доказательство. Предполагая существование двух обобщенных решений $u_1$, $u_2$ относительно разности $v = u_1 - u_2$ получим тождество

$$(8)\ \int_{Q_T} [-K v_t \eta_t + \sum_{i=1}^{m} v_{x_i}\eta_{x_i} + (\alpha - K_t) v_t \eta] dx dt = \int_{Q_T} (u_2^2 - u_1^2)\eta\, dx dt$$

для любой функции $\eta(x,t)$ из $\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$. Возьмем в качестве пробной функции

$$\eta(x,t) = \begin{cases} 0, & s \le t \le T, \\ \int_s^t v(x,\tau) d\tau, & 0 \le t \le s. \end{cases}$$

Что дает после изменения знака в (8)

$$(9)\ \int_0^s \int_\Omega [K \eta_{tt}\eta_t - \sum_{i=1}^{m} \eta_{tx_i}\eta_{x_i} - (\alpha - K_t)\eta_{tt}\eta] dx dt = \int_0^s \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)\eta\, dx dt .$$

С учетом свойств функции $\eta$ и $v(0) = 0$ из (9) получим соотношение

$$\int_\Omega [K\eta_t^2 \Big|^{t=s} + \sum_{i=1}^{m} \eta_{x_i}^2 \Big|^{t=0}] dx + 2\int_0^s \int_\Omega (\alpha - \tfrac{3}{2} K_t)\eta_t^2\, dx dt =$$

$$= 2\int_0^s \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)\eta\, dx dt + 2\int_0^s \int_\Omega (K_{tt} - \alpha_t)\eta_t \eta\, dx dt .$$

Из которого в силу неравенства Коши с $\varepsilon = \delta$ и Гельдера при $\frac{1}{m} + \frac{1}{2} + \frac{1}{q} = 1$ следует

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \eta_{x_i}^2 dx \Big|^{t=0} + \delta \int_0^s \int_\Omega \eta_t^2\, dx dt \le$$

$$\le C_1 \int_0^s [(\|u_1\|_{L^m(\Omega)} + \|u_2\|_{L^m(\Omega)})\|v\|_{L^2(\Omega)} \|\eta\|_{L^q(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}] dt .$$

Поскольку имеет место вложение

$$\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega)$$

и функции $u_i \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, из последнего неравенства выводим оценку

$$(10)\ \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \eta_{x_i}^2 dx \Big|^{t=0} + \frac{\delta}{2}\int_0^s \int_\Omega v^2 dx dt \le C \int_0^s \|\eta\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} dt .$$

Введем функцию $w(x,t)=\int_0^t v(x,\tau)\,d\tau$, тогда имеем $\eta(x,t)=w(x,t)-w(x,s)$. Ввиду этого из оценки (10) следует

$$(11)\quad (1-2cs)\|w(x,s)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}+\frac{\delta}{2}\int_0^s\int_\Omega v^2dx\,dt\le 2c\int_0^s\|w(x,t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\,dt.$$

Воспользуемся теперь произволом в выборе $s$. С помощью леммы Гронуолла из неравенства (11) получаем, что $w(x,t)=0$ при $t\in[0,S_0]$, где $S_0=(4c)^{-1}$. Тогда из (11) следует $v(x,t)=0$ при $t\in[0,S_0]$. Далее, в конечное число шагов аналогичным образом докажем обращение в нуль функции $v(x,t)$ на всем промежутке $[0,T]$. Теорема доказана.

Замечание. Уравнение (1) не имеет глобальных априорных оценок, поскольку функционал $\mathcal{J}(u)$ не обязательно положительный.

## Литература


[1] ВРАГОВ В.Н.: Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка, Дифф. уравнения 12(1976), 24-31.

[2] ЕГОРОВ И.Е.: О смешанной задаче для одного гиперболо-параболического уравнения, Матем. заметки 23(1978), 389-400.

[3] ДАРЬКИН Н.А.: О разрешимости в целом краевых задач для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений, Сибирский мат. журнал 22(1981), 111-119.

[4] SATHINGER D.H.: On global solution of non linear hyperbolic equations, Archiv Rat. Mech. Anal. 30(1968), 148-172.

[5] СОБОЛЕВ С.Л.: Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.

[6] ЛИОНС Ж.-Л.: Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., Мир, 1972.

Кафедра вычислительной математики, Якутский государственный университет, 677007, Якутск, СССР

(Oblatum 28.12. 1982)