Evgenii Viktorovich Voskresenskii

Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений с линейным автономным первым приближением

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 1, 31--50

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106203`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

24,1 (1983)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНЫМ АВТОНОМНЫМ ПЕРВЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ

Е. В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

Содержание: Доказаны новые теоремы об асимптотической эквивалентности систем дифференциальных уравнений, которые обобщают известные результаты, относящиеся к этому вопросу.

Ключевые слова: Асимптотическая эквивалентность по Левинсону, асимптотическая эквивалентность по Брауеру.

Классификация: 34A10

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F_1(t,x) \tag{1}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = F_2(t,y), \tag{2}$$

где

$\dim x = \dim y = m$, $F_i \in C(\mathcal{D}_i)$, $i = 1, 2$, $\mathcal{D}_1 = \{(t,x): t_0 \le t < +\infty, x \in R^m\}$, $\mathcal{D}_2 = \{(t,y): t_0 \le t < +\infty, y \in R^m\}$. Эти системы называются асимптотически эквивалентными по Левинсону, если между их решениями $x(t)$ и $y(t)$ можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что $\lim_{t\to+\infty}[x(t) - y(t)] = 0$, где $x(t)$ и $y(t)$ - друг другу соответствующие решения.

В работе [1] Левинсоном дается признак асимптотической эквивакентности систем, когда $F_1(t,x) = Ax$, где $A - (m \times m)$ -

постоянная матрица и все решения этой системы ограничены. Система (2) имеет вид

(3) $$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y,$$

где $B(t)$ – $(n \times n)$ – матрица, $B(t) \in C[t_0, +\infty)$ и $\int_{t_0}^{+\infty} \|B(t)\| dt < +\infty$. В этом случае система (2) является линейной и однородной.

В работе [2] Брауером под асимптотической эквивалентностью систем дифференциальных уравнений понимается более широкое определение. По Брауеру системы (1) и (2) называются асимптотически эквивалентными, если между их решениями можно установить соответствие (не обязательно взаимно однозначное) такое, что $\lim\limits_{t \to +\infty} [x(t) - y(t)] = 0$, где $x(t)$ и $y(t)$ – друг другу соответствующие решения.

В работе [2] система (1) такая же, что и у Левинсона, система (2) имеет вид

(4) $$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t, y),$$

где $f \in C(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \{(t, y): t_0 \le t < +\infty, y \in R^n\}$, $\|f(t, y)\| \le \psi(t)\|y\|$, $\psi \in C[t_0, +\infty)$, $\psi(t) \ge 0$, $\int_{t_0}^{+\infty} \psi(t) dt < +\infty$.

В этой статье получены общие признаки асимптотической эквивалентности систем по Левинсону и Брауеру, когда первая система такая же, а вторая система – нелинейная вида

(5) $$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t, y),$$

где

$f \in C(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \{(t, y): t_0 \le t < +\infty, y \in R^n\}$, $\|f(t, y)\| \le \lambda(t, \|y\|)$.

Функция $\lambda(t, \alpha)$ обладает некоторыми естественными свойствами. Из наших теорем вытекают результаты из работ [1], [2],

[5],[7].

1. <u>Равномерная ограниченность решений</u>. Предварительно изучим поведение решений системы (5) при $A=0$,

(6) $$\frac{dy}{dt}=f(t,y).$$

1.1. <u>Теорема</u>. Пусть интеграл

(7) $$\mathcal{J}(\alpha)=\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t,\alpha)\,dt$$

существует при любом $\alpha\in[0,+\infty)$. Тогда любое решение $y(t;\bar{t}_0,y_0)$ ограничено при достаточно большом $\bar{t}_0=\bar{t}_0(y_0)$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим систему

(8) $$\frac{dx}{dt}=f(t,\varphi(\|x\|x)),$$

где

$$\varphi(\|x\|)=\begin{cases}\min\left(1,\frac{T}{\|x\|}\right), & \|x\|\neq 0,\\ 1, & \|x\|=0,\end{cases}$$

T - произвольное фиксированное положительное число. Ясно, что каждое решение системы (8) ограничено. Действительно,

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(t_1,\varphi(\|x(t_1)\|)\,x(t_1))\,dt_1.$$

Отсюда

$$\|x(t)\|\leq\|x(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\|f(t_1,\varphi(\|x(t_1)\|)x(t_1))\|\,dt_1\leq\|x(t_0)\|+$$
$$+\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t_1,T)\,dt_1.$$

Легко заметить, что если решение системы (8) ограничено числом T, то есть $\|x(t)\|\leq T$, $t\geq t_0$, то эта вектор-функция является решением системы (6). Так как при достаточно большом $\bar{t}_0\geq t_0$ $\|x(\bar{t}_0)\|<T$, то

$$\|x(t;\bar{t}_0,x(\bar{t}_0))\|\leq\|x(\bar{t}_0)\|+\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t_1,T)\,dt_1<T$$

и

$$x(t;\bar{t}_0,x(\bar{t}_0))\equiv y(t;\bar{t}_0,y(\bar{t}_0)),$$

где $y(t;\bar{t}_0, y(\bar{t}_0))$ – решение системы (6), $y(t_0)=x(t_0)$.

Так как T – произвольное фиксированное положительное число, то решения $y(t;\bar{t}_0, y_0)$ при достаточно большом $\bar{t}_0 \ge t_0$ ограничены. Заметим, что из условий теоремы вытекает существование решений $y(t;\bar{t}_0, y_0)$ при всех $t \ge \bar{t}_0$.

1.2. <u>Теорема</u>. Если при условиях теоремы 1.1

а) $\int_0^{+\infty} \frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)} = +\infty$, $\lambda(t,\mu_1) \le \lambda(t,\mu_2)$, $\mu_1 \le \mu_2$, $\mathcal{J} \in C[0,+\infty)$;

в) функция $q(t,\alpha) = \int_{t_0}^{t} \frac{\lambda(t_1,\alpha)}{\mathcal{J}(\alpha)}\, dt_1$ имеет непрерывную частную производную $q'_\alpha(t,\alpha) \ge 0$, то решения системы (6) равномерно ограничены на множестве $S = \{y : \|y\| \le \varkappa\}$, то есть

$$\|y(t;\bar{t}_0, y_0)\| \le c(\varkappa) < +\infty,\ y_0 \in S,\ \bar{t}_0 \ge t_0,\ t \ge t_0 .$$

<u>Доказательство</u>. Предварительно рассмотрим вспомогательное скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t,x),\quad x \ge 0,\quad t \ge t_0 . \tag{9}$$

Покажем, что решения уравнения (9) равномерно ограничены на множестве $S_1 = \{x : 0 \le x \le \varkappa\}$ при $t \ge \bar{t}_0 \ge t_0$, то есть $x(t;\bar{t}_0, x_0) \le c(\varkappa)$, $x_0 \in S_1$.

Рассмотрим функцию

$$V(t,x) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda(t_1,x)}{\mathcal{J}(x)}\, dt_1\right) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)} . \tag{10}$$

На множестве $\Omega_h = \{(t,x) : x_0 < h \le x,\ t \ge t_0\}$ функция (10) удовлетворяет локальному условию Липшица относительно (t,x) и при достаточно большом h обладает свойствами:

а) $V(t,x) \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$ равномерно относительно $t \ge t_0$;

в) $V(t,x) \le V_1(r)$ при $x \le r$, $V_1(r) > 0$;

с) $\overline{V'(t,x)} \le 0$, где $\overline{V'(t,x)}$ - правая верхняя производная Дини функции $V(t,x)$ в силу уравнения (9).

Свойства а) и в) очевидны. Покажем, что имеет место свойство с). Действительно,

$$\overline{V'(t,x)} = \lambda \exp(-q(t,x)) \cdot \left[\left(1 - \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{J(\alpha)}\right) \cdot \frac{1}{J(x)} - q'_x(t,x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{J(\alpha)}\right] \le 0,$$

так как можно считать, что $\int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} \ge 1$. Тогда на основании критерия Мизохаты-Ямагути [3] решения уравнения (9) равномерно ограничены на S_1, то есть $x(t;\bar{t}_0, x_0) \le c(r)$, $x_0 \le r$, $t \ge \bar{t}_0$.

Рассмотрим решения системы (6). Так как

$$\|y\| \le \|y_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(t_1, y)\| dt_1 \le \|y_0\| + \int_{t_0}^{t} \lambda(t_1, \|y\|)\, dt_1,$$

то

$$\|y(t)\| \le x(t), \|y_0\| \le x(\bar{t}_0), \quad \frac{dx(t)}{dt} = \lambda(t, x(t)), \ \bar{t}_0 \le t < +\infty .$$

Следовательно, решения системы (6) равномерно ограничены на S [4]. Теорема доказана.

1.1. <u>Следствие</u>. Так как решение уравнения (9) $x(t;t_0,x_0) \le$ $\le c(r)$ при $t \ge t_0$, то решения системы (6) определены на множестве $[t_0, +\infty)$ [4].

1.1. <u>Замечание</u>. Условие в) можно заменить менее стеснительным ограничением

в$_1$) $q(t,\alpha_1) \le q(t,\alpha_2)$ при любом $t \ge t_0$ и $\alpha_1 \le \alpha_2$.

Покажем, что при условии в$_1$) справедливо неравенство

$$V'(t,x) = \overline{\lim_{\sigma \to +0}} \frac{1}{\sigma} \left[V(t+\sigma, x+\sigma\lambda(t,x)) - V(t,x)\right] \le 0 .$$

Действительно,

$\overline{V'(t,x)} =$

$$=\varlimsup_{\delta\to+0}\left\{\frac{\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t+\delta}\frac{\lambda(t_1,x+\delta\lambda(t,x))}{J(x+\delta\lambda(t,x))}dt_1\right)-\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)\right]}{\delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t+\delta}\frac{\lambda(t_1,x+\delta\lambda(t,x))}{J(x+\delta\lambda(t,x))}dt_1\right)\cdot\int_{x}^{x+\delta\lambda(t,x)}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}}{\delta}\right\}.$$

Тогда

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t+\delta}\frac{\lambda(t_1,x+\delta\lambda(t,x))}{J(x+\delta\lambda(t,x))}dt_1\right)\le\exp\left(-\int_{t_0}^{t+\delta}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)$$

и по теореме о среднем

$$\int_{x}^{x+\delta\lambda(t,x)}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}=\delta\lambda(t,x)\cdot\frac{1}{J(x+\theta\delta\lambda(t,x))},\quad 0<\theta<1.$$

Следовательно,

$$\overline{V'(t,x)}\le$$

$$\le\varlimsup_{\delta\to+0}\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}\cdot\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t+\delta}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)-\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)}{\delta}$$

$$+\varlimsup_{\delta\to+0}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t+\delta}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)\cdot\delta\lambda(t,x)[J(x+\delta\theta\lambda(t,x))]^{-1}}{\delta}$$

и

$$\overline{V'(t,x)}\le$$

$$\le-\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)\cdot\frac{\lambda(t,x)}{J(x)}+\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)\cdot\frac{\lambda(t,x)}{J(x)}=$$

$$=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,x)}{J(x)}dt_1\right)\cdot\frac{\lambda(t,x)}{J(x)}\cdot\left(1-\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}\right).$$

Подобрав h таким образом, что $x\ge h>x_0$ и $\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}>1$, мы будем иметь $\overline{V'(t,x)}\le 0$. Итак, условие в) можно заменить условием в$_1$). Заметим, что при выполнении условия в$_1$ $\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,\alpha)}{J(\alpha)}dt_1\longrightarrow 1$ при $t\longrightarrow+\infty$ равномерно относительно α.

Без условия в) не вытекает ограниченность всех решений системы (6). Действительно, для уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\tag{11}$$

где

$$f(t,x)=\begin{cases} 2ete^{-\frac{t^2}{2}} & \text{при } t_0 \le t < +\infty,\ x \neq 0, \\ 0 & \text{при } t_0 \le t < +\infty,\ x = 0 \end{cases}$$

на множестве $\mathcal{D} = [t_0, +\infty) \times R_1$ выполняются все условия теоремы 1.2, за исключением условия в), но уравнение (11) имеет неограниченное решение $x = t^2$.

1.2. Замечание. Если $\lambda(t,\alpha) = \psi(t)\cdot\varphi(\alpha)$, то из теоремы 1.2 вытекает известный результат Винтнера [5]. Заметим, что условие в) для этого частного случая всегда выполняется.

1.3. Теорема. Если $f(t,0) \equiv 0$, в области $\mathcal{D}$ решения однозначно определяются начальными данными и непрерывно зависят от них, то в условиях теоремы 1.1 состояние равновесия устойчиво.

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 1.1 и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

2. Существование пределов решений. Следующие две теоремы сформулируем в предположении, что выполняются условия теоремы 1.2. В этом случае все решения системы существуют при $t \ge t_0$ и равномерно ограничены на S.

2.1. Теорема. Каждое решение системы (6) $y(t;t_0,y_0)$ имеет конечный предел при $t \longrightarrow +\infty$.

Доказательство. Так как справедливы неравенства

$$\left\| \int_t^{+\infty} y'(t_1;t_0,y_0)\,dt_1 \right\| \le \int_t^{+\infty} \|y'(t_1;t_0,y_0)\|\,dt_1 \le$$
$$\le \int_t^{+\infty} \|f(t_1, y(t_1;t_0,y_0))\|\,dt_1 \le \int_t^{+\infty} \lambda(t_1,T)\,dt_1,$$

то интеграл

$$\int_t^{+\infty} y'(t_1;t_0,y_0)\,dt_1$$

абсолютно сходится. Следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t;t_0,y_0)=q$ и

$$\|y(t;t_0,y_0)-q\|\le\int_t^{+\infty}\lambda(t_1,T)dt_1 .$$

2.2. <u>Теорема</u>. Пусть $y_0\in R^n$. Тогда существует решение системы (6), стремящееся к y_0 при $t\to+\infty$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим семейство решений $\{y(t;t_0,y_0)\}$, где y_0 –фиксированный вектор. Покажем, что это семейство равномерно ограничено и равностепенно непрерывно при $\|y_0\|\le\kappa$.

Первое вытекает из неравенства $\|y(t;t_0,y_0)\|\le\|y_0\|+$ $+\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t_1,T)dt_1\le T$ и из теоремы 1.2.

При любых $\bar t\ge t_0$, $\bar{\bar t}\ge t_0$ справедливы равенства

$$y(\bar t;t_0,y_0)=y_0+\int_{t_0}^{\bar t}f(t_1,y(t_1;t_0,y_0))dt_1 ,$$

$$y(\bar{\bar t};t_0,y_0)=y_0+\int_{t_0}^{\bar{\bar t}}f(t_1,y(t_1;t_0,y_0))dt_1 .$$

Тогда

$$\|y(\bar t;t_0,y_0)-y(\bar{\bar t};t_0,y_0)\|\le\left|\int_{\bar t}^{\bar{\bar t}}\lambda(t_1,T)dt_1\right| .$$

Отсюда вытекает равностепенная непрерывность. Следовательно, существует последовательность $\{t_0^m\}$, что $y(t;t_0^m,y_0)$ сходится при $t_0^m\to+\infty$ равномерно по t на каждом конечном интервале к некоторой вектор-функции $y(t)$. Известно, что $y(t)$ в этом случае является решением системы (6).

Рассмотрим неравенство

$$\|y(t;t_0^m,y_0)-y_0\|\le\int_t^{t_0^m}\lambda(t_1,T)dt_1 .$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве. Тогда получим

$$\|y(t)-y_0\|\le\int_t^{+\infty}\lambda(t_1,T)dt_1 .$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=y_0$.

2.1. <u>Замечание</u>. Пусть $\lambda(t,\|y\|)=\gamma(t)\|y\|$. В этом случае справедливо неравенство

$$(13)\quad \|y(t_0)\|\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds\right]\le \|y(t)\|\le \|y(t_0)\|\exp\left[\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds\right].$$

Следовательно, если $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t;\, t_0,\, y_0) = y_\infty$, то $y_\infty \neq 0$ при $y(t;\, t_0,\, y_0) \neq 0$. Отсюда вытекает, что система (6) при $\lambda(t, \|y\|) = \psi(t)\,\|y\|$ имеет устойчивое состояние равновесия, которое не может быть асимптотически устойчивым.

3. <u>Теоремы об асимптотичческой эквивалентности систем дифференциальных уравнений</u>. Сейчас мы дадим достаточные условия асимптотической эквивалентности системы (6) и системы

$$(14)\qquad \frac{dy}{dt} = 0\,.$$

3.1. <u>Теорема</u>. Система (14) асимптотически эквивалентна по Левинсону системе (6), если выполняются следующие условия:

1) $f \in C(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = [t_0,+\infty)\times R^m$, $\|f(t,y)\| \le \lambda(t,\|y\|)$, $\lambda \in C(\mathcal{D}_1)$,
$\mathcal{D}_1 = [t_0,+\infty)\times[0,+\infty)$, $\lambda(t,\alpha_1)\le\lambda(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$ и $\forall t \in [t_0,+\infty)$, $\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t,\alpha)dt < +\infty$;

2) $\mathcal{J}(\alpha) = \int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t,\alpha)dt < +\infty$ при $\forall\alpha\in[0,+\infty)$, $\int_0^{\infty}\frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)} = +\infty$;

3) функция $q(t,\alpha) = \int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,\alpha)}{\mathcal{J}(\alpha)}dt_1$ имеет непрерывную и неотрицательную частную производную $q'_\alpha(t,\alpha)$;

4) $\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\| \le \lambda_1(t,\|y_1-y_2\|)\cdot\|y_1-y_2\|$, где
$\lambda_1 \in C(\mathcal{D}_1)$, $\lambda_1(t,\alpha_1)\le\lambda_1(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1\le\alpha_2$ и
$\forall t\in[t_0,+\infty)$, $\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1(t,\alpha)dt < +\infty$ $\forall\alpha\in[0,+\infty)$.

<u>Доказательство</u>. Покажем, что для любого вектора $y_\infty \in R^m$ существует единственное решение системы (6), стремящееся к y_∞ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим множество Ω всех ограниченных на $[t_0, +\infty)$ и непрерывных вектор-функций $y(t)$. Тогда оператор

(15) $Ly(t) = y_\infty - \int_t^{+\infty} f(t_1, y(t_1))dt_1, \quad \|y_\infty\| < \frac{T}{2} \quad (T > 0)$

отображает при достаточно большом t_0 шар $S = \{y(t) : \|y(t)\| < T\}$ в этот же шар: $L : S \longrightarrow S$, $S \subset \Omega$. Действительно,

$$\|Ly(t)\| \leq \|y_\infty\| + \int_t^{+\infty} \lambda(t_1, T)dt_1 .$$

Так как при достаточно большом t_0 $\int_t^{+\infty} \lambda(t_1, T)\, dt_1 < \frac{T}{2}$, то $\|Ly(t)\| \leq T$. Следовательно, $y(t) \in S$. Введем в Ω метрику $\rho(x, y)$ по правилу:

$$\rho(x, y) = \sup_t \|x(t) - y(t)\| .$$

Полнота полученного метрического пространства легко проверяется. Тогда оператор L в S является оператором сжатия, так как

$$\rho(Lx, Ly) \leq \int_t^{+\infty} \lambda_1(t_1, 2T)dt_1 \cdot \rho(x, y),$$

а $\int_t^{+\infty} \lambda_1(t_1, 2T)dt_1 < 1$ при достаточно большом t_0. Следовательно, L в S имеет единственную неподвижную точку. Пусть $Lz = z$. Тогда

$$z(t) = y_\infty - \int_t^{+\infty} f(t_1, z(t_1))dt_1 .$$

Так как $z(t)$ - единственное решение системы (6), которое при $t \longrightarrow +\infty$ стремится к y_∞, то между R^m и множеством всех решений этой системы можно установить взаимно однозначное соответствие

$$y_\infty \longleftrightarrow z(t),$$

причем $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = y_\infty$. Это означает, что системы

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

и

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

асимптотически эквивалентны по Левинсону. Теорема доказана.

Системы (14) и (6), очевидно, асимптотически эквивалентны по Брауеру, если выполняются следующие условия:

1) $f \in C(\mathfrak{D})$, $\|f(t,y)\| \le \lambda(t,\|y\|)$, $\lambda \in C(\mathfrak{D}_1)$,
$\mathfrak{D}_1 = [t_0,+\infty)\times[0,+\infty)$, $\lambda(t,\alpha_1) \le \lambda(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$ и $\forall t \in [t_0,+\infty)$;

2) $\mathcal{J}(\alpha) = \int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t,\alpha)\,dt < +\infty$ при $\forall\alpha \in [0,+\infty)$,
$\int_{\alpha_0}^{+\infty}\frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)} = +\infty$;

3) функция $q(t,\alpha) = \int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,\alpha)}{\mathcal{J}(\alpha)}\,dt_1$ имеет непрерывную и неотрицательную частную производную $q'_\alpha(t,\alpha)$.

В общем случае справедлива следующая теорема.

3.2. <u>Теорема</u>. Системы

(17) $$\frac{dx}{dt} = Ax$$

и

(18) $$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t,y),$$

где

1) $\dim x = \dim y = n$, $A - (n\times n)$ - матрица, $f \in C(\mathfrak{D})$,
$\mathfrak{D} = \{(t,y): t_0 \le t \le t < +\infty,\ y \in R^n\}$;

2) все решения системы (17) ограничены;

3) $\|f(t,y)\| \le \lambda(t,\|y\|)$, $\lambda \in C(\mathfrak{D}_1)$, $\mathfrak{D}_1 = [t_0,+\infty)\times[0,+\infty)$,
$\|y\| = const$, $\lambda(t,\alpha_1) \le \lambda(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$ и
$\forall t \in [t_0,+\infty)$;

4) $\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t,\alpha)\,dt < +\infty$ $\forall\alpha \in [0,+\infty)$, $\int_0^{+\infty}\frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)} = +\infty$;

5) функция $q(t,\alpha)=\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,\alpha)}{\mathcal{J}(\alpha)}\,dt_1$ имеет непрерывную и неотрицательную частную производную $q'_\alpha(t,\alpha)$, асимптотически эквивалентны по Брауеру.

Доказательство. Можно считать, что

(19) $A = diag\,(B, 0)$,

где B и 0 соответственно $(p\times p)$ и $(q\times q)$ -матрицы, $p+q=n$, действительные части собственных значений матрицы B - отрицательны. Действительно, в случае надобности этого можно добиться с помощью ляпуновских преобразований

$$\xi = L(t)x,\quad \eta = L(t)y,$$

где $L(t)$ - матрица Ляпунова, причем взаимно однозначное соответствие между новыми интегральными кривыми $\xi(t)$ и $\eta(t)$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между старыми интегральными кривыми $x(t)=L^{-1}(t)\,\xi(t)$ и $y(t)=L^{-1}(t)\eta(t)$. Кроме того, из предельного соотношения $\|\xi(t)-\eta(t)\|\to 0$ при $t\to+\infty$ вытекает предельное соотношение $\|x(t)-y(t)\|\to 0$ при $t\to+\infty$. Существование такого ляпуновского преобразования доказано Н.П. Еругиным в [6].

Покажем, что решения системы (18) равномерно ограничены на $S=\{y:\|y\|\le r\}$. Действительно, так как

$$y(t) = X(t)\,y(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t-t_1)\,f(t_1, y(t_1))\,dt_1,$$

то

$$\|y(t)\| \le c\,\|y(t_0)\| + c\int_{t_0}^{t}\lambda(t_1, \|y(t_1)\|)\,dt_1 .$$

Здесь $X(t)$ - фундаментальная матрица системы (17) $(X(t_0)=E)$, $\|X(t)\|\le c$. Тогда $\|y(t)\|\le x(t)$, $t_0\le t<+\infty$, где $c\|y(t_0)\|\le x_0$, $\frac{dx(t)}{dt}=c\lambda(t,x(t))$, $x(t_0)=x_0$. Следовательно, решения системы (19) равномерно ограничены на S [4].

Так как
$$X(t) = diag(e^{(t-t_0)B}, E_q)$$
является фундаментальной матрицей решений системы (17), то
$$X_1(t) = X(t)\mathcal{J}_1 = diag(e^{(t-t_0)B}, 0),$$
$$X_2(t) = X(t)\mathcal{J}_2 = diag(0, E_q),$$
где
$$\mathcal{J}_1 = diag(E_p, 0), \quad \mathcal{J}_2 = diag(0, E_q).$$
Тогда матрица Коши представляется в виде
$$K(t,\tau) = X_1(t-\tau) + diag(0, E_q).$$
Известно, что
$$\| X_1(t)\| \leq a e^{-a(t-t_0)}, \quad a > 0, \quad t_0 \leq t < +\infty.$$
Запишем систему (18) в интегральной форме
$$y(t) = X(t-t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_1(t-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 +$$
$$+\int_{t_0}^{t} X_2(t-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1,$$
где $t_0 \in [0, +\infty)$ - произвольно. Ясно, что несобственный интеграл $\int_{t_0}^{+\infty} X_2(t-t_1)\lambda(t_1, y(t_1))dt_1$ является сходящимся. Отсюда, учитывая что
$$X_2(t-t_1) = X(t-t_0)X_2(t_0-t_1),$$
наше интегральное уравнение можно представить в виде
$$y(t) = X(t-t_0)\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} X_2(t_0-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1\right] +$$
$$+\int_{t_0}^{t} X_1(t-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 - \int_{t}^{+\infty} X_2(t-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1.$$
Решению $y(t)$ системы (18) с начальными условиями $y(t_0) = y_0$ сопоставим решение $x(t)$ системы (17) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$,

(20) $\quad x(t_0) = y(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} X_2(t_0-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1.$

Покажем, что соотношение (20) устанавливает соответствие между решениями такое, что системы (17) и (18) будут асимптотически эквивалентными по Брауеру.

Рассмотрим множество Ω всех ограниченных и непрерывных на $[t_0, +\infty)$ вектор-функций $y(t)$, $\lim y(t) = m$. Здесь ограниченность является равномерной на каждом шаре $S = \{y : \|y\| \le r\}$, то есть

$$\|y(t)\| \le c_1(r), \quad \|y(t_0)\| \le$$

Рассмотрим оператор

$$L y(t) = X(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_1(t-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 - \tag{21}$$
$$- \int_{t}^{+\infty} X_2(t-t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 ,$$

где $\|x(t_0)\| \le \frac{c_1}{c}$, $\|X(t-t_0)\| \le c$.

Тогда при достаточно большом t_0 справедливо неравенство

$$\|L y(t)\| < c_1 + c\int_{t_0}^{t} \lambda(t_1, c_1)dt_1 + c\int_{t}^{+\infty} \lambda(t_1, c_1)dt_1$$

и

$$\|L y(t)\| \le c_1 .$$

Следовательно, $L : Q \longrightarrow Q$, где $Q = \{y(t) : \|y(t)\| \le c_1(r)\}$.

Покажем, что оператор L в Q непрерывен. Пусть $y_l \in Q$ и при $l \longrightarrow +\infty$ $y_l(t) \longrightarrow y(t)$ равномерно на каждом конечном сегменте на $[t_0, +\infty)$. Рассмотрим сегмент $[t_0, T]$. При заданном $\varepsilon > 0$ τ подберем так, чтобы

$$c\int_{\tau}^{+\infty} \lambda(t_1, c_1)dt_1 < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{22}$$

Пусть l_0 - настолько большое число, что при $l \ge l_0$

$$c\|f(t_1, y_l(t_1)) - f(t_1, y(t_1))\| < \frac{\varepsilon}{3(\tau - t_0)} , \tag{23}$$

$t_1 \in [t_0, \tau]$. Тогда для $t \in [t_0, T]$ имеем

$$\|(L y_l)(t) - (L y)(t)\| \le c\int_{t_0}^{t} \|f(t_1, y_l(t_1)) -$$

$$- f(t_1, y(t_1))dt_1 + c\int_t^{\tau} \| f(t_1, y_\ell(t_1)) - f(t_1, y(t_1))dt_1 +$$
$$+ c\int_{\tau}^{+\infty} \| f(t_1, y_\ell(t_1)) - f(t_1, y(t_1)) \| dt_1$$

и на основании неравенств (22) и (23) получим

$$\| (L y_\ell)(t) - (L y)(t) \| < \varepsilon$$

для $t \in [t_0, T]$. Следовательно, $L y_\ell(t) \to L y(t)$ и оператор L непрерывен на Q.

Покажем, что $L(Q)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в каждой точке $t \in [t_0, +\infty)$.

Равномерная ограниченность очевидна. Покажем равностепенную непрерывность в каждой точке $t \in [t_0, +\infty)$. Продифференцируем (21). Тогда получим, что $\{(L y(t))'_t$ равномерно ограничено при всех $t \in [t_0, +\infty]$. Следовательно, $L(Q)$ - равностепенно непрерывно в каждой точке $t \in [t_0, +\infty)$. Из полученных результатов вытекает, что для оператора (21) выполняются все условия теоремы Шаудера-Тихонова. Следовательно, он имеет неподвижную точку в Q, то есть, существует $y(t) \in Q$ и

$$y(t) = X(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_1(t - t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 -$$
$$- \int_t^{+\infty} X_2(t - t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 .$$

Ясно, что вектор функция $y(t)$ - решение системы (18) и равенство (20) устанавливает соответствие между решениями си ч (17) и (18). Покажем, что это соответствие устанавливает асимптотическую эквивалентность этих систем по Брауеру. Для этого достаточно показать, что

(24) $\| y(t; t_0, y_0) - X(t - t_0)x(t_0) \| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Оценим норму их разности. Так как

$$y(t; t_0, y_0) - x(t) = \int_{t_0}^{t} X_1(t - t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 -$$
$$- \int_t^{+\infty} X_2(t - t_1) f(t_1, y(t_1))dt_1 ,$$

где $x(t)=X(t-t_0)x(t_0)$, $y(t)=y(t;t_0,y_0)$,

$x(t_0)=y(t_0)+\int_{t_0}^{+\infty}X_2(t_0-t_1)f(t_1,y(t_1))dt_1$,

то учитывая, что $\|y(t)\|\le c_1$, получим

$$\|y(t)-x(t)\|\le\int_{t_0}^{t}\|X_1(t-t_1)\|\lambda(t_1,c_1)dt_1+$$
$$+\int_{t}^{+\infty}\|X_2(t-t_1)\|\lambda(t_1,c_1)dt_1\le a\int_{t_0}^{t}e^{-a(t-t_1)}\lambda(t_1,c_1)dt_1+$$
$$+\int_{t}^{+\infty}\|X_2(t-t_1)\|\lambda(t_1,c_1)dt_1 .$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\|y(t)-x(t)\|=0 .$$

Теорема доказана.

Легко заметить, что теорема 3.1 вытекает из теоремы 3.2. Однако доказательства этих теорем существенно отличаются. Более того, доказательство теоремы 3.1 выявляет особые свойства решений системы (6). По этой причине случай (6) мы рассмотрели отдельно.

Системы (17) и (18) будут асимптотически эквивалентными по Левинсону, если выполняются условия теоремы 3.2 и некоторые дополнительные условия, характеризующие единственность неподвижной точки для оператора L .

Справедлива следующая теорема.

3.3. Теорема. Системы (17) и (18) асимптотически эквиваленты по Левинсону, если:

1) $f\in C(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D}=\{(t,y): t_0\le t<+\infty,\ y\in R^m\}$;

2) все решения системы (17) ограничены

3) $\|f(t,y)\|\le\lambda(t,\|y\|)$, $\lambda\in C(\mathfrak{D}_1)$,

$\mathfrak{D}_1=[t_0,+\infty)\times[0,+\infty)$, $\lambda(t,\alpha_1)\le\lambda(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1\le\alpha_2$,

$\mathcal{J}(\alpha)=\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(t,\alpha)dt<+\infty$, $\int_0^{+\infty}\frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)}=+\infty$ $\forall\alpha\in[0,+\infty)$, $\alpha_0\ge 0$;

4) функция $q(t,\alpha)=\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(t_1,\alpha)}{\mathcal{J}(\alpha)}dt_1$ имеет непрерывную и неотрицательную частную производную $q'_{\alpha}(t,\alpha)$;

5) $\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\le\lambda_1(t,\|y_1-y_2\|)\|y_1-y_2\|$, где $\lambda_1\in C(\mathcal{D}_1)$, $\mathcal{D}_1=[t_0,+\infty)\times[0,+\infty)$, $\lambda_1(t,\alpha_1)\le\lambda_1(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1\le\alpha_2$ и $\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1(t,\alpha)dt<+\infty$ $\forall\alpha\in[0,+\infty)$.

<u>Доказательство</u>. Вновь рассмотрим оператор (21) на множестве Ω которое является полным метрическим пространством с метрикой

$$\rho(y,x)=\sup_t\|y(t)-x(t)\|;\quad y(t),x(t)\in\Omega. \tag{25}$$

Оператор L в Q является оператором сжатия при достаточно большом t_0. Действительно,

$$\begin{aligned}\rho(Ly,Lx)&\le\rho(y,x)\cdot\left(c\int_{t_0}^{t}\lambda_1(t_1,c_1)dt_1+c\int_{t}^{+\infty}\lambda_1(t_1,c_1)dt_1\right)=\\&=c\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1(t_1,c_1)dt_1\cdot\rho(y,x),\quad c\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1(t_1,c_1)dt_1<1.\end{aligned}\tag{26}$$

Из (26) вытекает, что L в Q имеет единственную неподвижную точку. Так как выполняются все условия теоремы 3.2, то системы (17) и (18) асимптотически эквивалентны по Брауеру. Следовательно, соответствие (20) устанавливаемое между решениями, является взаимно однозначным, то есть, системы (17) и (18) асимптотически эквивалентны по Левинсону.

Приведем пример, когда системы асимптотически эквивалентны по Брауеру, но не асимптотически эквивалентны по Левинсону.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt}=-10e^{-2t}\sin e^{2t}y,\quad t\ge t_0,\quad y\in R^1. \tag{27}$$

Здесь $|f(t,y)| \le 10e^{-2t}$. Отсюда $\lambda(t,\|y\|) = 10e^{-2t}$. Пусть $x = e^{2t}y$. Тогда

$$(28) \qquad \frac{dx}{dt} = -8x + O(x^3).$$

Так как состояние равновесия уравнения (28) асимптотически устойчиво, то состояние равновесия уравнения (27) также асимптотически устойчиво. Следовательно, уравнение (27) асимптотически не эквивалентно по Левинсону уравнению $\frac{dx}{dt} = 0$. Так как здесь выполняются все условия теоремы 3.2, то уравнения (27) и (28) асимптотически эквивалентны по Брауеру.

Лима в работе [7] рассматривал вопрос об асимптотической эквивалентности (17) и (18) для случая, когда $\lambda(t,\|y\|) = \psi(t)\cdot\Phi(\|y\|)$. Он в сущности рассматривал лишь задачу об асимптотической эквивалентности систем по Брауеру, хотя в формулировке основной теоремы речь идет об асимптотической эквивалентности систем по Левинсону.

Такая же неточность допущена в книге [8] (стр. 230, задача 23).

Аналогичные теоремы справедливы для систем

$$(29) \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + f_1(t)$$

и

$$(30) \qquad \frac{dy}{dt} = Ay + f(t,y) + f_1(t),$$

где $f(t,y)$ - вектор-функция, удовлетворяющая условиям теоремы 3.2, $f_1(t)$ - непрерывная вектор-функция на $[t_0, +\infty)$.

Приведем пример, когда асимптотическая эквивалентность по Брауеру следует из теоремы 3.2 и не вытекает из теорем Брауера и Лимы.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$(31) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t^3}, \quad t \ge t_0, \quad y \in R^1 .$$

Здесь $|f(t,y)| \le \frac{t+y}{t^3}$. То есть $\lambda(t, \|y\|) = \frac{t+|y|}{t^3}$.

Легко проверить, что все условия теоремы 3.2 здесь выполняются. Следовательно, уравнение (31) асимптотически эквивалентно уравнению $\frac{dx}{dt} = 0$ по Врауеру. Более того, так как

$$(32) \qquad \left| \frac{t+y_1}{t^3} - \frac{t+y_2}{t^3} \right| \le \frac{1}{t^3} |y_1 - y_2| ,$$

то (31) асимптотически эквивалентно по Левинсону уравнению $\frac{dx}{dt} = 0$. Ясно, что функцию $\lambda(t, \|y\|)$ здесь нельзя представить в виде $\psi(t)\,\Phi(\|y\|)$, где $\psi(t)$ и $\Phi(\|y\|)$ - удовлетворяют условиям теоремы из работы [7].

Литература

[1] LEVINSON N.: The asymptotic behavior of system of linear differential equations, Amer. J. Math. 68(1946), 1-6.

[2] BRAUER F.: Nonlinear Differential equations with forcing terms, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 758-765.

[3] MIZOHATA S. and YAMAGUTI M.: On the existence of periodic solutions of the nonlinear differential equation, Mem. Coll. Sci. Univ., Kyoto, ser. A, Math. 27 (1951), 109-113.

[4] HARTMAN P.: Ordinary differential equations, New York-London-Sydney, John Wiley 1964.

[5] WINTNER A.: An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria, Amer. Journ. Math. 68(1946), 451-454.

[6] ЕРУГИН Н.П.: Приводимые системы, Труды матем. ин-та АНСССР XIII (1946), 736-839.

[7] LIMA A.C.: A note on the asymptotic equivalence of two systems of differential equations, Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comen. 33(1977)(1978), 35-49.

[8] ДЕМИДОВИЧ Б.П.: Лекции по математической теории устойчивости, Москва, "Наука", 1967, 472 с.

Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева,
Саранск 430000, СССР

(Oblatum 23.7. 1982)