Konstantin Igorevich Beidar
Идемпотенты в кольцах с полиномиальным тождеством

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 4, 755--759

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106117

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

22,4 (1981)

ИДЕМПОТЕНТЫ В КОЛЬЦАХ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ТОЖДЕСТВОМ

К.И. ВЕЙДАР

Abstract: In this note we constructed an example of a ring with polynomial identity without nonzero idempotents the ring of 2×2-matrices over which has an infinite family of nonzero pair-wise orthogonal idempotents. This example gives a negative answer on one question of L. Small.

Key words: Polynomial identity, idempotent.

Classification: 16A38, 16A42.

Хорошо известно, что если кольцо $M_n(R)$ – $n\times n$-матриц над коммутативным кольцом R содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов, то кольцо R тоже содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов. В связи с этим Смолл поставил вопрос: если R – кольцо с полиномиальным тождеством и кольцо $M_n(R)$ содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов, то будет ли кольцо R содержать бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов? [3 , стр. 381, пункт 30].

В данной работе строится пример PI-коьца не содержащего ненулевых идемпотентов такого, что кольцо 2×2-матриц над ним содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов. Тем самым дается отрицательный ответ на этот вопрос Смолла.

Отметим, что аналогичный пример получен также А.З. Ананьиным (устное сообщение).

Пусть Z - кольцо целых чисел, $A = Z[x_1, x_2, x_3, x_4]$ - кольцо многочленов над Z, $y = x_2 + x_3$, $B = A_y$ - локализация кольца A по мультипликативно замкнутому подмножеству $\{1, y, y^2, \dots, y^m, \dots\}$. Положим

$$z_1 = \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} x_3, x_4 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix}, \quad z_4 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ x_3, x_4 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть $\mathfrak{D} = M_2(B)$ - кольцо 2×2 -матриц над кольцом B, $E = \sum_{i=1}^{4} z_i B \subseteq \mathfrak{D}$. Ясно, что $z_i z_j = x_{k(i,j)} z_{t(i,j)}$ для всех $i, j = 1, 2, 3, 4$. Следовательно E - подкольцо кольца $\mathfrak{D}$. Очевидно, что кольцо E удовлетворяет всем тождествам кольца $M_2(B)$.

Лемма 1. Пусть e_{ij} - матрица размера 2×2 у которой на (i, j) -месте стоит 1, а на остальных местах стоят нули. Тогда: 1. Элемент $u = e_{11} z_3 y^{-1} + e_{12} z_4 y^{-1} + e_{21} x_1 y^{-1} + e_{22} z_2 y^{-1}$ является идемпотентом кольца $M_2(E)$. 2. Кольцо E не содержит ненулевых идемпотентов.

Доказательство. 1. Ясно, что кольцо $M_2(E)$ является подкольцом кольца $M_4(B)$. Первое утверждение теперь проверяется с помощью правила перемножения матриц в кольце $M_4(B)$.

2. Предположим противное. Пусть $e = \sum_{i=1}^{4} z_i p_i$ (где $p_i \in B$, $1 \le i \le 4$ - ненулевой идемпотент кольца E. Положим

$$z = \begin{pmatrix} x_3, x_4 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_2, p_1 \\ p_4, p_3 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $z, p \in \mathfrak{D}$ и $e = pz$. Значит, $\mathfrak{D}z \ni e$. Так как элемент $\det z = x_2 x_3 - x_1 x_4$ не является обратимым в кольце B , то матрица x не является обратимой в кольце $M_2(B) = \mathfrak{D}$. Поэтому $\mathfrak{D}x \neq 1$ и $e \neq 1$. Далее, пусть $F = B \oplus B$ - свободный B-модуль ранга 2. Отождествим кольца $\mathfrak{D} = M_2(B)$ и $End_B F$. Имеем: $F = Fe \oplus F(1-e)$. Так как F - свободный модуль ранга 2 над областью целостности B и $Fe \neq 0 \neq F(1-e)$, то Fe и $F(1-e)$ - проективные модули ранга 1 [1, стр. 114, Теорема 7.1]. Очевидно, что $B = Z[x_1, x_2, x_3, x_4]_y$ - кольцо с однозначным разложением на простые множители. Пусть S - множество ненулевых элементов кольца B и $S^{-1}B$ - локализация кольца B относительно мультипликативно замкнутой системы S. Ясно, что система S порождается простыми элементами, каждый из которых порождает в кольце B простой идеал. Далее, очевидно, что $S^{-1}B$ - поле частных кольца B. Поэтому проективные $S^{-1}B$-модули ранга 1 являются свободными модулями. Из [1, стр. 125, Предложение 7.15] теперь следует, что проективные B-модули ранга 1 являются свободными модулями. Следовательно существует обратимая матрица $w \in M_2(B)$ такая, что

$$(*) \quad w^{-1} e w = e_{11} .$$

Пусть G - дедекиндово кольцо с нетривиальной группой классов идеалов. Тогда кольцо G содержит некоторый идеал L не являющийся главным идеалом. Из [2, стр. 22, Лемма 1.7] следует, что G-модуль $L \oplus L^{-1}$ изоморфен модулю $G \oplus G$. Отождествим модули $G \oplus G$ и $L \oplus L^{-1}$. Ясно, что $End_G(G \oplus G) = M_2(G)$. Пусть

$$v = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in G , \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

эндоморфизм G-модуля $G \oplus G$, соответствующий канонической проекции на прямое слагаемое L. Ясно, что v - идемпотентная матрица ранга 1. Значит, $tr\, v = a_{11} + a_{22} = 1$. Определим гомоморфизм колец $f: A \longrightarrow G$, полагая $f(x_1) = a_{21}$, $f(x_2) = a_{22}$, $f(x_3) = a_{11}$, $f(x_4) = a_{12}$. Тогда $f(y) = a_{11} + a_{22} = 1$. Следовательно гомоморфизм f продолжается до гомоморфизма колец $f: A_y \longrightarrow G$. Ясно, что гомоморфизм f определяет гомоморфизм колец $g = M_2(f): M_2(B) \longrightarrow M_2(G)$. Отметим, что $g(x) = v$, $g(e_{11}) = e_{11}$, $g(px) = g(p)g(x) = g(p)v$. Положим $b = g(px)$, $d = g(w)$. Из равенства $(*)$ и доказанного выше теперь следует, что $d^{-1}bd = e_{11}$, $bv = b$, $b^2 = b$. Следовательно G-модуль $(G \oplus G)b$ изоморфен G-модулю G. Очевидно, что выполняются следующие соотношения: $G \oplus G = (G \oplus G)b \oplus (G \oplus G)(1-b)$, $(G \oplus G)b \subseteq (G \oplus G)v = L$.

Так как G-модуль $(G \oplus G)b$ выделяется прямым слагаемым в G-модуле $G \oplus G$, то он выделяется прямым слагаемым в любом подмодуле модуля $G \oplus G$ его содержащем. Значит, $(G \oplus G)b$ - прямое слагаемое G-модуля L. Но L - идеал области целостности. Следовательно он не разложим в прямую сумму ненулевых G-модулей. Поэтому $(G \oplus G)b = L$ и L - главный идеал кольца G. Получили противоречие с выбором идеала L. Поэтому кольцо E не содержит ненулевых идемпотентов.

__Теорема 1__. Пусть $R = \prod_{i=1}^{\infty} R_i$ - прямое произведение колец R_i, $i = 1, 2, \ldots$, каждое из которых равно кольцу E. Тогда: 1. Кольцо R удовлетворяет всем тождествам кольца 2×2-матриц над полем рациональных чисел. 2. Кольцо R не содержит ненулевых идемпотентов. 3. Кольцо 2×2-матриц над кольцом R содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов.

Доказательство. Первые два утверждения теоремы непосредственно вытекают из доказанного в лемме 1 и из построения кольца E. Докажем третье утверждение. Пусть $a_{i11}, a_{i12}, a_{i21}, a_{i22}$ - элементы кольца R, i-ая координата которых равна $x_3 y^{-1}$, $x_4 y^{-1}$, $x_1 y^{-1}$, $x_2 y^{-1}$ соответственно, а все остальные координаты равны нулю. Далее, пусть

$$u_i = e_{11} a_{i11} + e_{21} a_{i21} + e_{12} a_{i12} + e_{22} a_{i22} \in M_2(R) .$$

Тогда из леммы 1 следует, что $\{u_1, u_2, \dots, u_m, \dots\}$ - бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов. Итак, теорема доказана.

Литература

[1] БАСС Х.: Алгебраическая К-теория, Москва, Мир, 1973.

[2] МИЛНОР Дж.: Введение в алгебраическую К-теорию, Москва, Мир, 1974.

[3] - Rings Theory, Proc. Conf. Park City, Utah, 1971, New York, Acad. Press, 1972, XI, 381 pp., Publisher's Weekly, 1972, 202, N 3, 129.

Мех.-мат. факультет, кафедра высшей алгебры, Московский Государственный Университет, Москва В-234, С С С Р

(Oblatum 8.6. 1981)