Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Thomas Jerofsky

Das Eigenwerttheorem von Krasnoselski für k-kondensierende Abbildungen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 2, 413--427

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106086

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

22,2 (1981)

DAS EIGENWERTTHEOREM VON KRASNOSELSKI FÜR k-KONDENSIERENDE ABBILDUNGEN

T. JEROFSKY

Abstract: We give an affirmative answer to an open question in the theory of k-set contractions by showing that Krasnoselski's wellknown eigenvalue theorem for positive compact mappings admits a natural generalization for k-set contractions without any additional assumptions on the underlying cone.

Key words: k-set contraction, cone, eigenvalue.

Classification: 47H10

Einleitung. Folgender Eigenwertsatz für kompakte Abbildungen hat sich in der nichtlinearen Analysis als sehr nützlich erwiesen.

Satz von Krasnoselski [8]. Seien E ein Banachraum, $G \subset E$ ein abgeschlossener Kegel, $V \subset E$ eine beschränkte Nullumgebung und $F: G \cap \partial V \longrightarrow F$ eine kompakte Abbildung mit

(H_0) es gibt ein $a > o$, so dass $\|Fx\| > a (x \in G \cap \partial V)$.

Dann hat F einen Eigenwert.

Dieser Satz erweitert für positive Abbildungen den Gültigkeitsbereich des klassischen Birkhoff-Kellogg-Theorems [1], da E insbesondere auch endlichdimensional sein darf. Er ist für kompakte Abbildungen in verschiedenen Richtungen verallgemeinert worden (vgl. [10],[5]). Im Gegensatz zu vielen Fixpunktaussagen behält der Satz von Krasnoselski bekanntlich seine Gültigkeit nicht, wenn statt der Kompaktheit von F nur gefordert wird, dass F für ein $k \in (0,1)$ k-kondensierend ist. Ein diesbezügliches Gegenbeispiel von Martelli [11] (vgr. Bemerkung 3) führt auf folgendes

<u>Problem</u>. Seien E ein Banachraum, $G \subset E$ ner Kegel, $V \subset E$ die Einheitskugel und $G: F \cap \partial V \to G$ eine k-kondensierende Abbildung mit

(H_k) es gibt ein $a > k$, so dass $\|Fx\| \geqq a (x \in G \cap \partial V)$.

Hat dann F einen Eigenwert?

Teillösungen dieses Problems wurden in [14],[4],[5],[12], [6] angegeben.

In dieser Note lösen wir das Problem endgültig. Wir zeigen (Theorem A), dass Bedingung (H_k) sogar unter bedeutend schwächeren Voraussetzungen über G und B einen Eigenwert für F garantiert. Damit wird eine Vermutung von S. Hahn [5] bestätigt.

Der Verfasser möchte Herrn Doz. Dr. S. Hahn (Dresden) danken für die Anregung zu dieser Arbeit und die Unterstützung bei ihrer Anfertigung.

1. <u>Begriffe und Bezeichnungen</u>. Mit E bezeichnen wir im folgenden stets einen reellen Banachraum. Für $M \subset E$ bedeuten int M, $\overline{M}$, ∂M und co$M$ das Innere, die Abschliessung, den Rand bzw. die konvexe Hülle von M. Ist M beschränkt, so ist ihr <u>Kuratowskisches Nichtkompaktheitsmass</u> $\chi(M)$ definiert als das Infimum aller $\varepsilon > 0$, für die M eine endliche Überdeckung durch Mengen vom Durchmesser $\leqq \varepsilon$ besitzt. χ hat u.a. folgende Eigenschaften (vgl.[3]). Für beliebige beschränkte Mengen M, N, $P \subset E$ und beliebiges $y \in E$ gelten mit $M \subset N$ die Relationen

$\chi(\mathrm{co}M) = \chi(M \cup \{y\}) = \chi(M) \leq \chi(N)$ und $\chi(M \cup P) = \max\{\chi(M), \chi(P)\}$. Ferner ist $\chi(tM) = t\chi(M)$ für $t \geqq 0$.

Seien nun $D \subset E$, $F: D \to E$ eine stetige Abbildung und $k \geqq 0$. F heisst <u>k-kondensierend</u>, wenn für jede beschränkte Menge $M \subset D$ auch $F(M)$ beschränkt ist und die Ungleichung $\chi(F(M)) \leq k\chi(M)$ gilt. k-kondensierend sind z.B. alle Abbildungen der Form $F = L + G$, L lipschitzstetig mit Konstante k und C kompakt. Näheres über Nichtkompaktheitsmasse und kondensierende Abbildungen findet man z.B. in [3].

Eine Nullumgebung (abgekürzt: NU) $V \subset E$ nennen wir <u>einfachberandet</u>, wenn gilt $[0,1)\bar{V} \subset \mathrm{int}\, V$. Klee beweist in [7], dass das Minkowskifunktional $p(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda V\}$ einer einfachberandeten NU $V \subset E$ auf dem ganzen Raum stetig ist.
Jede konvexe NU ist einfachberandet.

Eine konvexe Menge $G \subset E$ mit $[0,\infty)\, G \subset G$ heisse ein <u>Keil</u>. Alle Halbräume $H \subset E$ mit $0 \in \partial H$, alle Teilräume von E und E selbst sind demnach Keile. Ein <u>Kegel</u> ist ein Keil, der keine Gerade enthält.

2. <u>Ergebnisse</u>. In diesem Abschnitt diskutieren wir unser Hauptergebnis. Den Beweis geben wir in Abschnitt 3.

A. <u>Theorem</u>. Seien G E ein abgeschlosseneer Keil, der nicht mit einem endlichdimensionalen Teilraum zusammenfällt, $V \subset E$ eine einfachberandete beschränkte NU und $k \geqq 0$. Seit $T: G \cap \partial V \to G$ eine k-kondensierende Abbildung mit

(A1) es gibt ein $a > k$, so dass $Tx \notin aV$ $(x \in F \cap \partial V)$.

Dann existieren ein $\lambda_0 > a$ und ein $x_0 \in G \cap \partial V$ mit $Tx_0 = \lambda_0 x_0$.

B. <u>Folgerung</u>. Seien G und V wie in Theorem A. Dann hat jede k-kondensierende Selbstabbildung von $G \cap \partial V$ einen Fixpunkt.

Beweis. T genügt mit beliebigem $a \in (k,1)$ den Voraussetzungen von Theorem A. Aus $\lambda_0 x_0 = Tx_0$ folgt $\lambda_0 = 1$, da V einfachberander ist. Q.e.d.

Insbesondere hat also jede k-kondensierence Abbildung $F: \partial V \to \partial V$ mit $k < 1$ eine Fixpunkt, wenn V eine einfachberandete beschränkte NU eines unendlichdimensionalen Banachraumes ist.

Bemerkungen. 1. Im kompakten Fall ($k = 0$) ist Bedingung (A1) äquivalent zu (H_0) und Theorem A geht über in die bekannten Sätze von Birkhoff-Kellogg und Krasnoselski.

2. Theorem A verschärft (für punktwertige Abbildungen) Aussagen aus Arbeiten folgender Autoren, die alle (bis auf [12]) den Fall $V = B(0,r)$ behandeln. Bei Fitzpatrick und Petryshyn [4, Theorem 2] und Hahn [5, Folgerungen 5 und 6, Satz 5] muss T jeweils auf ganz $G \cap \overline{V}$ Bedingungen erfüllen, die für $x \in G \cap \partial V$ mindestens so viel fordern wie (A1). Massabo und Stuart [12, Theorem 1] und Jerofsky [6, Folgerung 12] setzen voraus, dass G ein normaler Kegel ist mit $\|x + y\| \geq \beta \max\{\|x\|, \|y\|\}$ $(x,y \in G)$ und dass T folgender Bedingung genügt:

(A2) es gibt ain $a > \frac{k}{\beta}$, so dass $Tx \notin aV$ $(x \in G \cap \partial V)$

(in [12] darf V eine beliebige beschränkte NU sein; in diesem allgemeinen Fall ist jedoch die Forderung an T schärfer als (A2)). Offenbar ist (A2) nur für $\beta = 1$ zur sonst schwächeren Bedingung (A1) äquivalent. Mit der gleichen Normalitätsforderung an G arbeiten auch weitere Sätze aus [14], [4] und [5], wobei hier die Voraussetzungen über T noch einschränkender sind als (A2).

3. Ist V die Einheitskugel von E, so ist (A1) offenbar äquivalent zur Bedingung (H_k) aus der Einleitung. Folgende Modifikation eines Beispiels von Martelli [11] zeigt, dass Theorem A seine Gültigkeit verliert, wenn diese Bedingung ersetzt wird durch die schwächere Forderung

(H_k') $\|Tx\| > k \quad (x \in G \cap \partial V)$.

Seien ℓ^1 der Banachraum aller reellen Folgen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit der Norm $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, $V := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ und sei G der abgeschlossene Kegel $G := \{x \in \ell^1 \mid x_n \geq 0 \ (\geq 1)\}$. Die Abbildung $L: G \cap \partial V \to G$, $(x_1, x_2, \ldots) \to k(0, x_1, x_2, \ldots)$ hat offenbar für kein $k > 0$ einen Eigenwert. Folglich ist die Funktion $x \mapsto d(x) :=$ $:= \frac{1}{2} \operatorname{dist}(Lx, [0, \infty)x)$ für alle $x \in G \cap \partial V$ positiv. Man überprüft leicht, dass diese Funktion auch stetig ist. Wir fixieren nun beliebiges $g \in G \cap \partial V$, setzen $Cx := d(x)g$ $(x \in G \cap \partial V)$ und betrachten die Abbildung $T := L + C$ von $G \cap \partial V$ in G. T ist k-kondensierend, denn L ist lipschitzstetig mit Konstante k und C ist kompakt. Wegen $\|Tx\| = \|Lx\| + \|Cx\| = k + d(x) > k$ (die Norm ist additiv auf G!) genügt T der Bedingung (H_k'), hat aber nach Konstruktion keinen Eigenwert.

4. Folgerung B enthält einen Fixpunktsatz von Nussbaum [13] (G = E, V die Einheitskugel), aus dem Hahn [5] mit einfachen Überlegungen den entsprechenden Spezialfall von Theorem A ableitet. Mit den gleichen Überlegungen kann man Theorem A aus Folgerung B ableiten.

5. Die von Reinermann [15] (für den Fall G = E, V = = B(0,1)) gestellte Frage, ob Folgerung B gültig bleibt, wenn

T lediglich kondensierend (vgl. [3]) ist, bleibt offen.

6. Mittels Lemma 5 der Arbeit [2] von Daher wäre ein einfacher Beweis von Theorem A möglich. Die Gültigkeit dieses Lemmas muss jedoch in Frage gestellt werden, da der Beweis unseres Erachtens inkorrekt ist.

3. Beweis von Theorem A. Grundlage unseres Beweises ist folgender asymptotischer Fixpunktsatz, der von Nussbaum (in etwas allgemeiner Formulierung) in [13] angegeben wird.

C. Anmerkung. Seien $G \subset E$ abgeschlossen und konvex, $W \subset G$ eine (in G) offene Teilmenge und $F: W \to W$ eine stetige Abbildung. Sie M W ein Attraktor für kompakte Mengen unter F und sei V eine offene Umgebung von M in G so dass die Restriktion $F|V$ q-kondensierend ist mit $q < 1$. Schliesslich existiere eine kompakte zusammenziehbare Menge $K \in \mathcal{F}_0$ mit $M \subset K \subset W$. Dann hat F einen Fixpunkt.

Dabei heisst M Attraktor für kompakte Mengen unter F, wenn M nichtleer und kompakt ist und folgender Bedingung genügt: Zu jedem Kompaktum $K \subset W$ und jeder Umgebung U von M existiert ein Index $n = n(K,U)$, so dass für alle $m \geq n$ gilt $F^m(K) \subset U$. Das Symbol $\mathcal{F}_0$ bezeichnet das System aller Teilmengen von E, die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener konvexer Mengen sind. Die Menge $K \subset E$ heisst zusammenziehbar, wenn ein stetige Abbildung $h: k \times [0,1] \to K$ und ein Punkt $v \in K$ existieren, so dass für alle $x \in K$ gilt $h(x,0) = x$, $h(x,1) = v$.

Wir benötigen folgenden übersichtlicheren Spezialfall von Anmerkung C.

D. Folgerung. Seien $G \subset E$ abgeschlossen und konvex, $W \subset G$

offen in ω und $F: W \longrightarrow W$ eine q-kondensierende Abbildung mit $q < 1$ und mit $\overline{F(W)} \subset W$.
Ferner sei $F(W)$ beschränkt und gelte

(D1) es existiert kompaktes zusammenziehbares $K \in \mathcal{F}_0$ mit $M \subset K \subset W$, wobei $M := \bigcap_{n \geq 1} \overline{F^n(W)}$.

Dann hat F einen Fixpunkt.

Beweis. Um Anmerkung C anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass M Attraktor für kompakte Mengen unter F ist (offenbar ist $W \equiv V$ eine Umgebung von M). Kuratowski [9] beweist folgendes

Lemma. Ist $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ eine Folge abgeschlossener nichtleerer Teilmengen von E mit $\chi(X_n) \longrightarrow 0$, so gilt
a) $X_\infty := \bigcap_{n \geq 1} X_n \neq \emptyset$, kompakt
b) Zu jeder Umgebung U von X_∞ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für $m \geq n$ gilt $X_m \subset U$.
Wir setzen $X_n := \overline{F^n(W)}$. Dann gilt $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ und $\chi(X_n) \leq \leq q^{n-1} \cdot \chi(\overline{F(W)}) \longrightarrow 0$ (beachte Beschränktheit von F(W)). Aus a) folgt $M = X_\infty \neq \emptyset$, kompakt. b) impliziert, dass M sogar ein Attraktor für beliebige Teilmengen von W unter F ist. Q.e.d.

Beim Beweis von Theorem A werden wir nun folgendermassen vorgehen. Wir werden zunächst das Eigenwertproblem in ein äquivalentes Fixpunktproblem überführen. Auf das letztere werden wir Folgerung D anwenden. Dabei wird die einzige Schwierigkeit darin bestehen, eine Menge K zu konstruieren, die (D1) genügt. Obwohl unsere Konstruktion von K nur elementare geometrische und topologische Sachverhalte ausnutzt, ist sie in der Beschreibung recht aufwendig. Die Eigenschaften gewisser Hilfsabbildungen, von denen wir wiederholt Gebrauch machen werden, fassen wir in einem Lemma zusammen. Da diese Aussagen direkt aus den Eigenschaften des Minkowskifunktionale folgen, lassen wir den Beweis weg.

E. Lemma. Seien $u \in E$, $U \subset E$ eine abgeschlossene konvexe Umgebung von u und p das Minkowskifunktional der NU $U - u$. Sei $R := \{x \in E \mid p(x - u) \neq 0\} \cap U$. Dann hat die Abbildung $g : R \times [0,1] \rightarrow E$, definiert durch

$$g(x,t) := u + \left(1 - t + \frac{t}{p(x - u)}\right)(x - u)$$

folgende Eigenschaften.

(E1) g ist stetig.

(E2) Für $x \in R$ gilt $g(x,0) = x$, $g(x,1) \in \partial U$

(E3) $$g(\{x\} \times [0,1]) = u + \left[1, \frac{1}{p(x - u)}\right](x - u) = (u + [1,\infty)(x - u)) \cap U \quad (x \in R)$$

(E4) Für konvexes $C \subset R$ ist $\hat{C} := g(C \times [0,1])$ eine konvexe Menge mit $C \subset \hat{C} = (u + [1,\infty)(C - u)) \cap U$, $\hat{C} \subset R$ und $g(\hat{C} \times [0,1]) = \hat{C}$. Mit C ist auch $\hat{C}$ kompakt.

Beweis von Theorem A. Schritt 1: Zurückführung des Eigenwertproblems auf ein äquivalentes Fixpunktproblem. Sei m das Minkowskifunktional von V. Wähle $b \in (\frac{k}{a}, 1)$ und setze $W := G \setminus bV$, $q := \frac{k}{ab}$. Dann ist $q < 1$, $G \cap \partial V \subset [1,\infty) W \subset W$ (beachte $[0,1)\overline{V} \subset \operatorname{int} V$) und die Abbildung $F : W \rightarrow G \cap \partial V$, definiert durch

$$Fx := \left[m\left(T\left(\frac{x}{m(x)}\right)\right)\right]^{-1} T\left(\frac{x}{m(x)}\right) \qquad (x \in W)$$

ist stetig (wegen Beschränktheit von V gilt $m(y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0$). F ist sogar q-kondensierend. Ist nämlich $A \subset W$ beschränkt, so ist $m(x) \geqq b$ $(x \in A)$, d.h. $\frac{1}{m(x)} \in (0, \frac{1}{b}]$ $(x \in A)$. Wegen (A1) ist $m(T(\frac{x}{m(x)})) \geqq a$, also $[m(T(\frac{x}{m(x)}))]^{-1} \in (0, \frac{1}{a}]$. Somit gilt

$$F(A) \subset (0,\tfrac{1}{a}]T((0,\tfrac{1}{b}]A) \subset \mathrm{co}(\{0\} \cup \tfrac{1}{a}\, T(\mathrm{co}(\{0\} \cup \tfrac{1}{b}\, A))).$$

Da T k-kondensierend ist, folgt unter Ausnutzung der Eigenschaften von χ $\chi(F(A)) \leq \frac{1}{a}\, k\, \frac{1}{b}\, \chi(A) = q\,\chi(A)$.

Offenbar ist jeder Fixpunkt von F ein Eigenvektor für T zu einem Eigenwert $\lambda > a$. Wir sind also fertig, wenn wir zeigen, dass F einen Fixpunkt hat. Dazu dient uns Folgerung D. Offenbar genügen G, W und F en Voraussetzungen von Folgerung D, nur die Gültigkeit von (D1) muss noch gezeigt werden. Dazu müssen wir kompaktes zusammenziehbares $K \in \mathcal{F}_0$ konstruieren mit $M := \bigcap_{n \geq 1} \overline{F^n(W)} \subset K \subset W$.

<u>Schritt 2:</u> Konstruktion von K. Da M eine kompakte (vgl. Beweis von Folgerung D) Teilmenge von $G \cap \partial V \subset E \setminus b\overline{V}$ ist, existieren endlich viele abgeschlossene Kugeln $U_1 \ldots U_m \subset E \setminus b\overline{V}$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Für $C_i := \overline{\mathrm{co}}(U_i \cap M) \subset U_i \cap G \subset W$ $(i = 1 \ldots m)$ gilt folglich $M \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i \subset W$. Wähle $r > 0$ so, dass $V \subset B_r := \{x \in E \mid \|x\| \leq r\}$ gilt. Setze $B := 2B_r$ und $R_1 := B \setminus \{0\}$. Definiere die Abbildung $g_1 : R_1 \times [0,1] \to E$ durch

$$g_1(x,t) := \left(1 - t + \frac{t}{p_1(x)}\right)x,$$

wobei p_1 das Minkowskifunktional von B ist. Nach Lemma E ($u := 0$, $U := B$, $p := p_1$, $R := R_1$) ist g_1 stetig und sind die Mengen $\hat{C}_i := g_1(C_i \times [0,1])$ kompakte konvexe Teilmengen von B mit

$$(1) \qquad C_i \subset \hat{C}_i = g_1(\hat{C}_i \times [0,1]) = [1,\infty)C_i \cap B \subset W$$

Die letzte Inklusion folgt aus $C_i \subset W$ und $[1,\infty)W \subset W$. Die Menge $N := \bigcup_{i=1}^{m} \hat{C}_i$ wird Bestandteil der zu konstruierenden Menge K sein.

Die Menge $P := [\partial B \cap (-G)] \setminus \overline{\mathrm{co}} N$ ist nicht leer. Das folgt aus der Kompaktheit von $\overline{co}N$, falls G ein (unendlichdimensionaler!) Teilraum von $\mathbb{E}$ ist. Ist G kein Teilraum, so gilt sogar $Q := [\partial B \cap (-G)] \setminus G \neq \emptyset$, wie man unter Ausnutzung der Tatsache, dass G ein Keil ist, leicht zeigt. Wegen $\overline{co}N \subset G$ folgt dann $Q \subset P \neq \emptyset$. Wir fixieren nun beliebiges $u \in P$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein abgeschlossener Halbraum $H_0 \subset \mathbb{E}$ derart, dass $u \in \text{int } H_0$ und $H_0 \cap \overline{co}N = \emptyset$. $H_0 - u$ ist eine NU, deshalb existiert $\mu > 0$ derart, dass die beschränkte Menge $B - u$ in μ int $(H_0 - u)$ enthalten ist. Für den Halbraum $H := (1 - \mu)u + \mu H_0$ gilt dann $u \in B \subset \text{int } H$. Seien p_2 das Minkowskifunktional der NU $H - u$, $R_2 := \{x \in \mathbb{E} | p_2(x - u) \neq 0\} \cap H$ und $g_2 : R_2 \times [0,1] \to \mathbb{E}$ die Abbildung

$$g_2(x,t) := u + (1 + t - \frac{t}{p_2(x - u)})(x - u).$$

Mit $U := H$, $R := R_2$ und $p := p_2$ liegt wieder die Situation von Lemma E vor. Wir zeigen $N \subset R_2$. Sei dazu $x \in N \subset B$. Wir müssen zeigen, dass $x \in H$ und dass $p_2(x - u) > 0$. Die Halbräume H und H_0 waren so gewählt, dass $B \subset H$ und $N \cap H_0 = \emptyset$. Folglich gilt $x \in H$ und $x \notin H_0$. Letzteres ergibt $x - u \notin H_0 - u = \frac{1}{\mu}(H - u)$ und somit $p_2(x - u) \geq \frac{1}{\mu} > 0$. Wir zeigen nun: zu jedem $x \in \partial B \setminus \{u\}$ existiert eine abgeschlossene konvexe Umgebung $L_x \subset \mathbb{E}$, so dass

(2) $$(u + [1,\infty)) (L_x - u) \cap B_r = \emptyset$$

Dazu sei $A := \{x \in \mathbb{E} | x = (1 - t)u + ty, \ t \in [0,1], \ y \in B_r\}$.
A ist offenbar konvex. Aus der Beschränktheit von B_r folgt mit einem Standardargument, dass A auch abgeschlossen ist. Da für $t \in [0,1]$ und $y \in \text{int } B$ stets $(1 - t)u + ty \in \text{int } B$ gilt, haben wir $A \cap \partial B = \{u\}$. Folglich gibt es nach dem Hahn-Banach-Theorem zu jedem $x \in \partial P \setminus \{u\}$ einen abgeschlossenen Halbraum $L_x \subset \mathbb{E}$

mit $x \in \operatorname{int} L_x$ und $L_x \cap A = \emptyset$. Insbesondere gilt $u \notin L_x$, also $0 \notin L_x - u$ und folglich $[1,\infty)(L_x - u) = L_x - u$. Daraus folgt die Gültigkeit der Relationen $u + [1,\infty)(L_x - u) = L_x$, $(u + [1,\infty)(L_x - u)) \cap A = \emptyset$ und erst recht die Gültigkeit von (2).

Die kompakte Menge $N \cap \partial B$ wird von endlich vielen solcher Mengen $L_{x_1} \dots L_{x_r}$ überdeckt. Wir bilden die Durchschnitte $\hat{C}_i \cap L_{x_k}$ für alle i, k und erhalten so endlich viele kompakte konvexe Mengen. Diese bezeichnen wir mit $D_1 \dots D_n$. Wegen $N \cap \partial B \subset (\bigcup_{i=1}^{m} \hat{C}_i) \cap (\bigcup_{k=1}^{r} L_{x_k})$ gilt

$$(3) \qquad (N \cap \partial B) \subset \bigcup_{j=1}^{n} D_j$$

Ferner genügen alle D_j den Relationen

$$(4) \qquad (u + [1,\infty)(D_j - u)) \cap B_r = \emptyset$$

$$(5) \qquad [1,\infty)D_j \cap B = D_j$$

In der Tat, (4) folgt direkt aus (2). In (5) gilt wegen $D_j \subset B$ zunächst die Inklusion $\supset$. Ist andererseits $y \in [1,\infty)D_j \cap B$, d.h. $y = \alpha x$ mit $\alpha \geqq 1$ und $x \in D_j = C_i \cap L_{x_k}$, so ist wegen (1) und $\alpha x \in B$ auch $\alpha x \in C_i$. Da mit x auch αx in L_{x_k} liegt (L_{x_k} ist ein Halbraum mit $0 \notin L_{x_k}$), folgt $y \in D_j$. Wegen $D_j \subset N \subset R_2$ sind die Mengen $\hat{D}_j := g_2(D_j \times [0,1])$ wohldefiniert. Nach (E4) ist jedes $\hat{D}_j$ eine kompakte konvexe Menge mit

$$(6) \qquad D_j \subset \hat{D}_j = g_2(\hat{D}_j \times [0,1]) = (u + [1,\infty)(D_j - u)) \cap H \subset W$$

Die letzte Inklusion folgt aus $G \setminus W \subset B_r$ und (4) und der Gültigkeit von $u + t(x - u) = (t - 1)(-u) + tx \in [0,\infty)\operatorname{co}G \subset G$ ($t \geqq 1$, $x \in D_j$) (beachte $-u \in G$ und $D_j \subset G$).

Nach (E2) gilt $g_2(D_j \times \{1\}) \subset \partial H$. Folglich ist die Menge $K_0 := \overline{\mathrm{co}}\,\bigcup_{j=1}^{m} (\hat{D}_j \cap \partial H) \subset G \cap \partial H$ nicht leer. Wegen $G \setminus W \subset B \subset \operatorname{int} H$ gilt $G \cap \partial H \subset W$ und folglich $K_0 \subset W$. Sei nun $K := (\bigcup_{i=1}^{m} \hat{C}_i) \cup \cup (\bigcup_{j=1}^{m} \hat{D}_j) \cup K_0$. Dann ist K kompakt, $K \in \bar{\mathcal{F}}_0$ und $M \subset K \subset W$.

Schritt 3: Nachweis der Zusammenziehbarkeit von K. Wir definieren zunächst die stetige Abbildung $\tilde{g}_1 : K \times [0,1] \to E$,

$$\tilde{g}_1(x,t) := \begin{cases} g_1(x,t) & \text{für } (x,t) \in B \times [0,1] \\ x & \text{für } (x,t) \in (K \setminus B) \times [0,1] \end{cases}$$

(beachte $g_1(x,t) = x$ für $x \in \partial B$, $t \in [0,1]$) und beweisen, dass

(7) $$\tilde{g}_1(x,t) \in K \quad (x \in K,\ t \in [0,1])$$

Für $x \in K \setminus B$ ist das klar, ebenso für $x \in \hat{C}_i$ (beachte (1)). Wegen $K_0 \subset K \setminus B$ bleibt nur der Fall $x \in \hat{D}_j \cap B$ zu untersuchen. In diesem Fall ist wegen (6) $x = u + \alpha(y - u)$ mit $y \in D_j$ und $\alpha \geqq 1$. Aus (1) folgt $g_1(x,t) = \beta x$ mit $\beta \geqq 1$. Es gelten also die Ungleichungen $\gamma := 1 + \beta(\alpha - 1) \geqq 1$ und $\frac{\alpha\beta}{\gamma} \geqq 1$. Für $z := \frac{\alpha\beta}{\gamma} y$ gilt $u + \gamma(z - u) = u + \alpha\beta y - \gamma u = \beta(u + \alpha(y - u)) = \beta x$ und somit

(8) $$g_1(x,t) = u + \gamma(z - u)$$

Daraus folgt $z = \frac{1}{\gamma} g_1(x,t) + (1 - \frac{1}{\gamma})u \in B$ wegen $g_1(x,t)$, $u \in B$ und $\gamma \geqq 1$. Folglich ist $z \in [1,\infty)y \cap B \subset [1,\infty)D_j \cap B = D_j$ (vgl. (5)). Aus $z \in D_j$ und (8) folgt $g_1(x,t) \in u + [1,\infty)(D_j - u)$. Das ergibt $g_1(x,t) \in \hat{D}_j$ wegen $g_1(x,t) \in B$. Relation (7) ist bewiesen.

Weiterhin setzen wir $K_1 := (\bigcup_{j=1}^{m} \hat{D}_j) \cup K_0$ und zeigen

(9) $$\tilde{g}_1(x,1) \in K_1 \quad (x \in K)$$

Für $x \in K \setminus B$ ist das wieder klar wegen $K \setminus B \subset K_1$. Für $x \in \hat{C}_i$ ergeben (E2) und (1) $\tilde{g}_1(x,1) \in \hat{C}_i \cap \partial B \subset N \cap \partial B$, folglich ist (beachte (3)) $g_1(x,1) \in D_j \subset \hat{D}_j$ für ein j. Für $x \in \hat{D}_j \cap B$ schliesslich ist $\tilde{g}_1(x,t) = g_1(x,t) \in \hat{D}_j$, wie wir beim Beweis von (7) gezeigt haben.

Aus $\hat{D}_j \subset R_2$ (vgl. (E4)) und $K_0 \subset \partial H \subset R_2$ folgt $K_1 \subset R_2$. Relation (9) zeigt somit, dass für beliebige $x \in K$ und $t \in [0,1]$ der Punkt $(\tilde{g}_1(x,1),t)$ im Definitionsbereich von g_2 liegt. Wegen $g_2(\hat{D}_j \times [0,1]) = \hat{D}_j$ (vgl. (6)) und $g_2(y,t) = y$ ($y \in K_0 \subset \partial H$, $t \in [0,1]$) impliziert (9) ferner

(10) $\quad g_2(\tilde{g}_1(x,1),t) \in K \quad (x \in K,\ t \in [0,1])$

Wir fixieren nun beliebiges $v \in K_0$ und definieren eine Abbildung $h: K \times [0,1] \to E$ durch

$$h(x,t) := \begin{cases} \tilde{g}_1(x,3t) & \text{für } x \in K,\ t \in [0,\frac{1}{3}) \\ g_2(g_1(x,1),\ 3t-1) & \text{für } x \in K,\ t \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \\ (3-3t)g_2(\tilde{g}_1(x,1),1) + (3t-2)v & \text{für } x \in K,\ t \in [\frac{2}{3},1]. \end{cases}$$

Wegen (7),(10) und $g_2(y,1) \in K_0 = \mathrm{co}K_0$ ist $h(K \times [0,1]) \subset K$. Ferner gilt $h(x,0) = x$, $h(x,1) = v$ $(x \in K)$. Schliesslich ist h stetig, denn $\tilde{g}_1(x,1) = g_2(\tilde{g}_1(x,1),0)$ $(x \in K)$ (vgl. (E2)). Somit wird K mittels h auf v zusammengezogen. Q.e.d.

Literatur

[1] G.D. BIRKHOFF, O.D. KELLOGG: Invariant points in function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 23(1922),95-115.

[2] S.J. DAHER: Fixed point theorems for nonlinear operators with a sequential condition, Nonlin. Analysis, Theory Methods and Appl. 3(1979),No 1, 59-63.

[3] J. DANEŠ: On densifying and related mappings and their applications in nonlinear functional analysis, Proc. of a Summer school 1972 Neuendorf, GDR, Berlin 1974.

[4] P.M. FITZPATRICK, W.V. PETRYSHY: Positive eigenvalues for nonlinear multivalued noncompact operators with applications to differential operators, Journ. Diff. Equ., New York-London 22(1976), 428-441.

[5] S. HAHN: Eigenwertaussagen für kompakte und kondensierende mengenwertige Abbildungen in topologischen Vektorräumen, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979).

[6] T. JEROFSKY: Über Existenzaussagen für kondensierende Abbildungen, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 28(1979) H 5, 1183-1187.

[7] V. KLEE: Schrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces, Math. Ann. 141(1960), 281-285.

[8] M.A. KRASNOSELSKI: Polozitelnye resenia operatornych uravnenii, Moskau, Fizmatgiz 1962.

[9] K. KURATOWSKI: Sur les espaces complets, Fund. Math. 15 (1930), 301-309.

[10] M. LANDSBERG, T. RIEDRICH: Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen, Math. Ann. 163(1966), 50-61.

[11] M. MARTELLI: A Rothe's type theorem for noncompact acyclic-valued maps, Proc. of the conference on problems in nonlin. funct. anal. Universität Bonn, July 22 - 26, 1975. Ber. Ges. f. Math. u. Datenverarb. Bonn No 103(1975).

[12] I. MASSABO, C.A. STUART: Positive eigenvectors of k-set contractions, Nonlin. Analysis, Theory, Methods and Appl. 3(1979), No 1, 35-44.

[13] R.D. NUSSBAUM: Asymptotic fixed point theorems for local condensing maps, Math. Ann. 191(1971), 181-195.

[14] S. REICH: Characteristic vectors of nonlinear operators, Rend. Accad. Naz. Lincei 50(1971), 682-685.

[15] J. REINERMANN: Problems, Mathematica Balcanica 4. 96 (1974), 516.

Technische Universität Dresden

Sektion Mathematik

8027 Dresden

D D R

(Oblatum 7.1. 1981)