Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О исевдодиференцируемости конструктивных функций на конструктивных действительных числах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 3, 489--505

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106015`

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

21,3 (1980)

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНСТРУКТИВНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: В заметке показано, что для любого объекта Θ типа $\mathcal{F}$, обладающего свойством $\mathcal{E}$,(в частности, для любой [0]-конструктивной функции действительной переменной, определенной на сегменте $0 \vartriangle 1$) внутренняя мера множества всех [0]-конструктивных действительных чисел из $0 \triangledown 1$, в которых односторонние верхние и нижние псевдопроизводные объекта Θ не выполняют известную альтернативу Данжуа, равна нулю.

Ключевые слова: [0]-конструктивная функция, псевдодифференцируемость, первый класс Бэра.

Classification: Primary 03F65, 26A24
Secondary 26A21

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [2],[7] и [8], в частности, переменными перечисленными в [8]. Согласно [2] $[n]$-КДЧ, $[m]$-ПЧ, $[m]$-сегменты и $[m]$-интервалы и т.д. являются словами в алфавите Ξ.
Буква S служит переменной для слов в Ξ.

Мы напомним, что 1) согласно [2]

а) [0]-последовательность неперекрывающихся [0]-сегментов $\{H_n\}_m^{[0]}$ называется $S_\sigma^{[0]}$-множеством и [0]-КДЧ x мерой этого $S_\sigma^{[0]}$-множества, если [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{\sum_{n=0}^{m} |H_n|\}_m^{[0]}$ [0]-сходится к x;

б) если $\mathcal{G}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество и P АДЧ, то $P \in \mathcal{G}$ значит: не может не существовать член [0]-последовательности

$\mathcal{G}$, содержащий P;

в) для любого $S_6^{[0]}$-множества $\mathcal{G}$ существует неубывающая [0]-функция $\nu_1\langle\mathcal{G}\rangle$ такая, что для всякого [0]-КДЧ v, $0 < v \le 1$, $\nu_1\langle\mathcal{G}\rangle(v)$ - мера $\mathcal{G} \cap 0 \triangle v$; выполнено $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&\, x^{[0]} \in \mathcal{G} \supset \overline{D}[\nu_1\langle\mathcal{G}\rangle](x^{[0]}) = 1)$;

г) мы говорим, что свойство $\mathcal{C}$ выполнено для почти всех [0]-КДЧ из $0 \triangle 1$, если для всякого НЧ k существует $S_6^{[0]}$-множество $\mathcal{G}^k$ меры меньшей чем 2^{-k} и такое, что $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(x^{[0]} \in \mathcal{G}^k) \supset \mathcal{C}(x^{[0]}))$;

2) согласно [7] для любых [0]-последовательности ступенчатых остовов $\{F_n\}_n^{[0]}$ и [0]-КДЧ v и w, $0 < v < 1$, $P(w, \{F_n\}_n^{[0]}, v)$ значит: существует [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{w_k\}_k^{[0]}$, которая [0]-сходится к w и для всякого НЧ k w_k является "значением" F_k в точке v;

3) согласно [7] объектами типа $\mathcal{f}$ мы называем а) [0]-функции и б) выражения типа $[\{F_n\}_n^{[0]}, y_0, y_1]$, где y_0 и y_1 [0]-КДЧ и $\{F_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность ступенчатых остовов такая, что для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ верно

$$\exists y^{[0]} P(y^{[0]}, \{F_n\}_m^{[0]}, x^{[0]});$$

4) понятия монотонности, псевдонепрерывности и ограниченности вариации объектов типа $\mathcal{f}$ определены в [7].

<u>Замечание 1</u>. Пусть Θ, $\Theta \rightleftharpoons [\{F_n\}_m^{[0]}, y_0, y_1]$, объект типа $\mathcal{f}$, $\mathcal{F}$ [0]-функция и φ [0]-оператор типа $(D^{[0]} \to \Pi^{[0]})$. Тогда ввиду теоремы 5.2 и лемм 5.5 и 5.8 из [2] и леммы 1.1 из [3]

1) существуют [2]-оператор типа $(D^{[0]} \xrightarrow[\nu]{} D^{[0]})$ $\widehat{\Theta}$ и [2]-последовательность [0]-КДЧ $\{v_k\}_k^{[2]}$ такие, что

$\forall x^{[0]} y^{[0]} ((\hat{\Theta}(x^{[0]}) \simeq y^{[0]} \equiv \neg\neg(x^{[0]} = 0 \,\&\, y^{[0]} = y_0 \vee 0 < x^{[0]} < 1 \,\&$
$\& P(y^{[0]}, \{F_n\}_m^{[0]}, x^{[0]}) \vee x^{[0]} = 1 \,\&\, y^{[0]} = y_1)) \,\&$
$\& (!\hat{\Theta}(x^{[0]}) \equiv \neg\neg \exists k (x^{[0]} = v_k)))$;

2) мы обозначим $\hat{\mathcal{F}} \rightleftharpoons \mathcal{F}$;

3) существуют [5]-операторы типа $(D^{[0]} \longrightarrow^{*} D^{[4]})$

(1) $\underline{D}[\varphi], \bar{D}[\varphi], \underline{D}^{-}[\varphi], \bar{D}^{-}[\varphi], \underline{D}^{+}[\varphi], \bar{D}^{+}[\varphi]$ и

(2) $\underline{D}[\Theta], \underline{D}^{-}[\Theta], \bar{D}[\Theta], \bar{D}^{-}[\Theta], \underline{D}^{+}[\Theta], \bar{D}^{+}[\Theta]$

такие, что для любых [0]-КДЧ $x^{[0]}$ и $y^{[0]}$, $0 < y^{[0]} < 1 \,\&\, !\hat{\Theta}(y^{[0]})$, значения (1) в $x^{[0]}$ и значения (2) в $y^{[0]}$ являются соответственно значениями нижних, верхних, левых нижних или верхних и правых нижних или верхних псевдопроизводных φ в точке $x^{[0]}$ и Θ в точке $y^{[0]}$ (при вычислении псевдопроизводных объекта Θ учитываются только точки из области определения $\hat{\Theta}$).

Пример 1. Существуют объект типа $\mathcal{F}$ Θ , [0]-оператор типа $(D^{[0]} \longrightarrow \Pi^{[0]})$ φ, [0]-КДЧ v и [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{w_k\}_k^{[0]}$ такие, что $\neg\exists x^{[3]} (\underline{D}^{+}[\Theta](v) =$
$= x^{[3]} \vee \underline{D}^{+}[\varphi](v) = x^{[3]}) \,\&\, \forall k\, (k \in \setminus \varnothing^{(5)} \equiv \underline{D}^{+}[\Theta](w_k) =$
$= +\infty \equiv \underline{D}^{+}[\varphi](w_k) = +\infty)$ $-\infty < \underline{D}^{+}[\Theta](v) = \underline{D}^{+}[\varphi](v) < +\infty$.

Определения. Пусть Θ объект типа $\mathcal{F}$, P АДЧ и v [0]-КДЧ, $0 < v < 1$.

1) Мы скажем, что Θ выполняет альтернативу Данжуа в точке v , если верно
$!\hat{\Theta}(v) \,\&\, (-\infty < \underline{D}^{-}[\Theta](v) = \bar{D}^{-}[\Theta](v) = \underline{D}^{+}[\Theta](v) = \bar{D}^{+}[\Theta](v) < +\infty \vee$
$\underline{D}^{-}[\Theta](v) = -\infty \,\&\, \bar{D}^{+}[\Theta](v) = +\infty \,\&\, -\infty < \bar{D}^{-}[\Theta](v) = \underline{D}^{+}[\Theta](v) < +\infty \vee$
$\underline{D}^{+}[\Theta](v) = -\infty \,\&\, \bar{D}^{-}[\Theta](v) = +\infty \,\&\, -\infty < \underline{D}^{-}[\Theta](v) = \bar{D}^{+}[\Theta](v) < +\infty \vee$
$\underline{D}^{-}[\Theta](v) = \underline{D}^{+}[\Theta](v) = -\infty \,\&\, \bar{D}^{-}[\Theta](v) = \bar{D}^{+}[\Theta](v) = +\infty)$. (Ср.[8].)

2) Пусть $!\hat{\Theta}(v)$, Мы определим

$D_{кл}(P,\Theta,v) \rightleftharpoons (\underline{D}[\Theta](v)=\overline{D}[\Theta](v)=P)$ и
$D_{кл}(\Theta,v) \rightleftharpoons (-\infty<\underline{D}[\Theta](v)=\overline{D}[\Theta](v)<+\infty)$.

Мы заметим, что для любых объекта типа φ Θ и [0]-КДЧ v, $v\in 0\triangledown 1\,\&\,!\hat{\Theta}(v)$, верно $D_{кл}(\Theta,v)\supset\exists\eta^{[0]}D_{кл}(\eta^{[0]},\Theta,v)$.

Обозначение. Пусть $\{H_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов. Тогда $\mathscr{C}_0(\{H_n\}_n^{[0]})$ значит: $\{H_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность дизъюнктных [0]-сегментов, содержащихся в $0\triangle 1$, $\partial_л(H_0)=0\,\&\,\partial_п(H_1)=1\,\&\,\forall a\,(0<a<1\supset\exists n\,(a\in(H_n)^0))$.
(Из $\mathscr{C}_0(\{H_n\}_n^{[0]})$ следует $|H_n|\xrightarrow[n\to\infty]{[0]}0$.)

Можно доказать следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $\{L_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов и x [0]-КДЧ такие, что $x<1$ и [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{\sum_{k=0}^{m}|L_k|\}_m^{[0]}$ [0]-сходится к [0]-КДЧ меньшему чем x. Тогда существует $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}^{[0]}$-множество $\{H_m\}_m^{[0]}$ меры меньшей чем x такое, что $\mathscr{C}_0(\{H_n\}_n^{[0]})\,\&$
$\&\,\forall x^{[0]}(x^{[0]}\in 0\triangledown 1\,\&\,\exists k(x^{[0]}\in L_k)\supset\exists n(x^{[0]}\in(H_n)^0))\,\&$
$\&\,\forall k\ell\,(\partial_п(H_k)<\partial_л(H_\ell)\supset 0\leq\nu_1\langle\{H_n\}_n^{[0]}\rangle(\partial_л(H_\ell))-$
$-\nu_1\langle\{H_m\}_n^{[0]}\rangle(\partial_п(H_k))<\partial_л(H_\ell)-\partial_п(H_k))$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F}$ возрастающая на $0\triangle 1$ [0]-функция и v [0]-КДЧ такие, что $\Delta(\mathcal{F},0\triangle 1)<v<1$. Тогда существует [0]-последовательность [0]-сегментов $\{P_n\}_n^{[0]}$, для которой верно

а) $\mathscr{C}_0(\{P_n\}_n^{[0]})\,\&\,\forall x^{[0]}(x^{[0]}\in 0\triangledown 1\,\&\,v\leq\overline{D}[\mathcal{F}](x^{[0]})\supset$
$\exists n\,(x^{[0]}\in(P_n)^0))\,\&\,\forall x^{[0]}y^{[0]}(x^{[0]}<y^{[0]}\supset\Delta([\mathcal{F},\{P_n\}_n^{[0]}],$
$x^{[0]}\triangle y^{[0]})<v\cdot|x^{[0]}\triangle y^{[0]}|)$ (определение $[\mathcal{F},\{P_n\}_n^{[0]}]$ см. в [8]),

б) для любых НЧ m_1 и m_2, $\partial_п(P_{m_1})<\partial_л(P_{m_2})$, суще-

ствует возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция $\bar{\mathcal{F}}$ такая, что
$\Delta(\bar{\mathcal{F}}, 0 \Delta 1) < 1 \,\&\, \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&\, (x^{[0]} \leq \ni_n (P_{m_1}) \vee$
$\vee \exists n (x^{[0]} \in P_n) \vee \ni_\ell (P_{m_2}) \leq x^{[0]}) \supset 1 < \underline{D}[\bar{\mathcal{F}}](x^{[0]}))$.

__Лемма 3.__ Пусть $\{P_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов, $\{\mathfrak{M}_m\}_m$ последовательность рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств рациональных интервалов и $\mathfrak{P}$ множество [0]-КДЧ такие, что
$\mathcal{C}_0(\{P_n\}_n^{[0]}), \mathfrak{P} \rightleftharpoons \wedge x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg \exists n (x^{[0]} \in (P_n)^0))$ и
$\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathfrak{P} \supset \neg \forall m \exists S (S \in \mathfrak{M}_m \,\&\, x^{[0]} \in S))$.

Тогда [1]-существуют (и, следовательно, не могут не существовать) НЧ m_0, n_1 и n_2 такие, что $\ni_n (P_{n_1}) < \ni_\ell (P_{n_2}) \,\&$
$\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathfrak{P} \,\&\, x^{[0]} \in \ni_n (P_{n_1}) \Delta \ni_\ell (P_{n_2}) \supset \neg \exists S (S \in \mathfrak{M}_{m_0} \,\&$
$x^{[0]} \in S))$.

__Замечание 2.__ Пусть Θ, $\Theta \rightleftharpoons [\{F_n\}_n^{[0]}, y_0, y_1]$, объект типа $\mathcal{Y}$ и $\{Q_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов такая, что $\mathcal{C}_0(\{Q_m\}_m^{[0]}) \,\&\, \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&$
$\& \neg \exists m (x^{[0]} \in (Q_m)^0) \supset \exists y^{[0]} P(y^{[0]}, \{F_n\}_n^{[0]}, x^{[0]}))$.

Тогда на основании теоремы Г.С. Цейтина [1] легко построить [0]-функцию $[\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}]$ такую, что $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \Delta 1 \supset$
$(\neg \exists p (x^{[0]} \in (Q_p)^0) \supset [\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}](x^{[0]}) = \hat{\Theta}(x^{[0]})) \,\&$
$\forall p (x^{[0]} \in (Q_p)^0 \supset [\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}](x^{[0]}) = \hat{\Theta}(\ni_\ell (Q_p)) +$
$\frac{1}{|Q_p|} \cdot (\hat{\Theta}(\ni_n (Q_p)) - \hat{\Theta}(\ni_\ell (Q_p))) \cdot (x^{[0]} - \ni_\ell (Q_p))))$.

__Определение.__ Пусть $\mathfrak{M}$ правильное множество [0]-КДЧ, т.е. $\forall x^{[0]} y^{[0]}(x^{[0]} \in \mathfrak{M} \,\&\, y^{[0]} = x^{[0]} \supset y^{[0]} \in \mathfrak{M} \,\&\, y^{[0]} \in 0 \Delta 1)$.
Мы скажем, что внутренняя мера $\mathfrak{M}$ равна (соотв. не равна) нулю, если не существует (соотв. не может не существовать) [0]-измеримое по Лебегу множество [0]-КДЧ (см. [4]) $\mathfrak{N}$ положительной меры такое, что $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{M}$.

Замечание 3. Если $\mathfrak{M}$ правильное множество [0]-КДЧ и внутренняя мера $\mathfrak{M}$ не равна нулю, то согласно лемме 1 и теореме 5 из [4] и лемме 1 не может не существовать $S_{6}^{[0]}$-множество $\{H_n\}_n^{[0]}$ меры меньшей чем 1 такое, что
$\mathcal{C}_0(\{H_n\}_n^{[0]}) \& \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists n (x^{[0]} \in (H_n)^0) \supset x^{[0]} \in \mathfrak{M})$ и, следовательно, $\Delta(\nu_1 \langle \{H_n\}_n^{[0]} \rangle, 0 \vartriangle 1) < 1 \& \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in$ $\in 0 \triangledown 1 \& \underline{D}[\nu_1 \langle \{H_n\}_n^{[0]} \rangle](x^{[0]}) < 1 \supset x^{[0]} \in \mathfrak{M})$.

Определение. Мы скажем, что объект типа $\mathcal{Y}$ Θ обладает свойством $\mathcal{E}$, если для всякого НЧ ℓ существуют $S_{6}^{[0]}$-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $2^{-\ell}$ и система последовательностей р.п. множеств рациональных интервалов $\{\{\mathfrak{M}_k^{i,j}\}_k\}_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 1}}$ такие, что для любого [0]-КДЧ $x^{[0]}$, $x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \& \neg (x^{[0]} \in \mathcal{G})$, выполнено $E(\Theta, \{\{\mathfrak{M}_k^{i,j}\}_k\}_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 1}}, x^{[0]})$,

т.е.

$$!\hat{\Theta}(x^{[0]}) \& \forall i j (0 \leq i \leq 1 \& 0 \leq j \leq 1 \supset$$
$$\supset \forall k (\neg\neg \exists y^{[0]}(0 < (-1)^i \cdot (y^{[0]} - x^{[0]}) < 2^{-k} \& ! \hat{\Theta}(y^{[0]}) \&$$
$$2^k < (-1)^j \cdot \frac{\hat{\Theta}(y^{[0]}) - \hat{\Theta}(x^{[0]})}{y^{[0]} - x^{[0]}}) \supset \exists S(S \in \mathfrak{M}_k^{i,j} \& x^{[0]} \in S)) \&$$
$$(\forall k \exists S(S \in \mathfrak{M}_k^{i,j} \& x^{[0]} \in S) \supset (i = 0 \& j = 0 \supset \overline{D}^+[\Theta](x^{[0]}) = +\infty) \&$$
$$(i = 0 \& j = 1 \supset \underline{D}^+[\Theta](x^{[0]}) = -\infty) \& (i = 1 \& j = 0 \supset$$
$$\supset \overline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) = +\infty) \& (i = 1 \& j = 1 \supset \underline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) = -\infty)))\,.$$

Лемма 4. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция, а i, j и k НЧ, $0 \leq i \leq 1 \& 0 \leq j \leq 1$. Тогда существует рекурсивно перечислимое множество рациональных интервалов $\mathfrak{N}_k^{i,j}$ такое, что

$$\forall x^{[0]}(\neg\neg\exists y^{[0]}(0<(-1)^{i}\cdot(y^{[0]}-x^{[0]})<2^{-k}\ \&\ 2^{k}<(-1)^{j}\cdot$$
$$\cdot\frac{\mathcal{F}(y^{[0]})-\mathcal{F}(x^{[0]})}{y^{[0]}-x^{[0]}})\equiv\exists S(S\in\mathcal{H}_k^{i,j}\ \&\ x^{[0]}\in S))\,.$$

Доказательство. Пусть, например, $i=j=0$. Мы построим [0]-конструктивную функцию двух действительных переменных $\mathcal{G}$, определенную на двухмерном интервале $-1\triangledown 2\ \square\ 0\triangledown 2^{-k}$, и согласно теореме Г.С. Цейтина [1] [0]-последовательности [0]-последовательностей двухмерных рациональных интервалов $\{\{\mathcal{I}_{p,q}\ \square\ \mathcal{J}_{p,q}\}_q^{[0]}\}_p^{[0]}$ и пар РЧ $\{\{a_{p,q}\ \square\ b_{p,q}\}_q^{[0]}\}_p^{[0]}$ такие, что $\forall x^{[0]}z^{[0]}(x^{[0]}\in -1\triangledown 2\ \&$
$\&\ z^{[0]}\in 0\triangledown 2^{-k}\supset \mathcal{G}(x^{[0]}\ \square\ z^{[0]})\simeq\frac{1}{z^{[0]}}\cdot(\mathcal{F}(x^{[0]}+z^{[0]})-$
$-\mathcal{F}(x^{[0]})))\ \&\ \forall p((-1\triangledown 2\ \square\ 0\triangledown 2^{-k}=\bigcup_{q=0}^{\infty}\mathcal{I}_{p,q}\ \square\ \mathcal{J}_{p,q})\ \&$
$\&\ \forall q(a_{p,q}\in\mathcal{I}_{p,q}\ \&\ b_{p,q}\in\mathcal{J}_{p,q}\ \&\ \forall x^{[0]}z^{[0]}(x^{[0]}\in\mathcal{I}_{p,q}\ \&\ z^{[0]}\in$
$\in\mathcal{J}_{p,q}\supset|\mathcal{G}(x^{[0]}\ \square\ z^{[0]})-\mathcal{G}(a_{p,q}\ \square\ b_{p,q})|<2^{-p})))\,.$

Для завершения доказательства достаточно определить

$$\mathcal{H}_k^{i,j}\rightleftharpoons\wedge S(\exists pq(S\equiv\mathcal{I}_{p,q}\ \&\ 2^{k}+2^{-p}<\mathcal{G}(a_{p,q}\ \square\ b_{p,q})))\,.$$

Следствие. Любая [0]-функция обладает свойством $\mathcal{E}$.

Замечание 4. Пусть Θ, $\Theta\rightleftharpoons[\{F_n\}_n^{[0]},y_0,y_1]$, объект типа φ.

1) Согласно определению и лемме 1 существует [0]-последовательность $S_6^{[0]}$-множеств $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ такая, что для любого НЧ m мера $\{H_n^m\}_n^{[0]}$ меньше чем 2^{-m} и выполнено

$$\mathcal{E}_0(\{H_n^m\}_n^{[0]})\ \&\ \forall k\exists \ell(H_k^{m+1}\subseteq H_\ell^m)\ \&\ \forall x^{[0]}(x^{[0]}\in 0\triangledown 1\ \&$$
$$\neg\exists m(x^{[0]}\in(H_n^m)^0)\supset\exists y^{[0]}P(y^{[0]},\{F_n\}_n^{[0]},x^{[0]}))\,.$$

Пусть i,j,k и ℓ НЧ, $0\leq i\leq 1\ \&\ 0\leq j\leq 1$.

Для всякого НЧ m мы используем лемму 4 и построим, исходя от [0]-функции $[\theta, \{H_n^m\}_n^{[0]}]$ (см. замечание 2), множество $\mathcal{N}_{m,k}^{i,j}$, обладающее описанными там свойствами. Существует р.п. множество $\mathcal{M}_{\ell,k}^{i,j}$ такое, что $\mathcal{M}_{\ell,k}^{i,j} = \bigcup_{m=\ell}^{\infty} \mathcal{N}_{m,k}^{i,j}$.

2) Пусть для всяких [0]-КДЧ $x^{[0]}, x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&\, !\,\hat{\theta}(x^{[0]})$, и НЧ q внутренняя мера множества [0]-КДЧ

$$\wedge y^{[0]}(y^{[0]} \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, |y^{[0]} - x^{[0]}| < 2^{-q} \,\&\, !\,\hat{\theta}(y^{[0]}) \,\&\, |\hat{\theta}(y^{[0]}) - \hat{\theta}(x^{[0]})| < 2^{-q})$$

не равна нулю. Тогда ввиду 1) и замечания 3 для всякого НЧ ℓ выполнено $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg \exists n\, (x^{[0]} \in H_n^{\ell}) \supset$ $\supset E(\theta, \{\{\mathcal{M}_{\ell,k}^{i,j}\}_k\}_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 1}}, x^{[0]}))$ и, следовательно, θ обладает свойством $\mathcal{C}$.

3) Если для любого [0]-КДЧ $x^{[0]}, x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&\, !\,\hat{\theta}(x^{[0]})$, объект θ не может не быть псевдонепрерывным или слева или справа в точке $x^{[0]}$, то согласно 2) θ обладает свойством $\mathcal{C}$.

Теорема 1. Пусть θ монотонный объект типа $\mathcal{G}$. Тогда существует возрастающая на $0 \vartriangle 1$ [0]-функция $\mathcal{G}$ такая, что

$$\mathcal{G}(0) = 0 \,\&\, \mathcal{G}(1) = 1 \,\&\, \forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, \neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{G}, x^{[0]}) \supset$$
$$!\,\hat{\theta}(x^{[0]}) \,\&\, \exists \eta^{[0]} D_{\text{кл}}(\eta^{[0]}, \theta, x^{[0]}))\,.$$

Доказательство. Согласно части 1) замечания 4 и замечанию 2 существуют [0]-последовательности $\mathcal{S}_6^{[0]}$-множеств $\{\{H_n^m\}_n^{[0]}\}_m^{[0]}$ и (монотонных) [0]-функций $\{[\theta, \{H_n^m\}_n^{[0]}]\}_m^{[0]}$, обладающие описанными там свойствами.

Пусть m НЧ. Мы построим [0]-функцию $\mathcal{F}_m$ такую, что

$\forall x^{[0]}(\mathcal{F}_m(x^{[0]}) = \sum_{n=0}^{\infty} max(min(x^{[0]} - Э_л(H_n^m), Э_n(H_n^m) - x^{[0]}), 0))$.

Тогда $\mathcal{F}_m$ удовлетворяет условию Липшица. Согласно теореме 1 из [8] существуют возрастающие на $0 \Delta 1$ [0]-функции $\mathcal{G}_{m,0}$ и $\mathcal{G}_{m,1}$ такие, что $\forall i\,(0 \le i \le 1 \supset \mathcal{G}_{m,i}(0) = 0\ \&$ $\&\ \mathcal{G}_{m,i}(1) = 1)\ \&\ \forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset (\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}_{m,0}, x^{[0]}) \supset$ $\supset D_{кл}([\Theta, \{H_n^m\}_n^{[0]}], x^{[0]}))\ \&\ (\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}_{m,1}, x^{[0]}) \supset D_{кл}(\mathcal{F}_m, x^{[0]})))$.

Мы определим $\mathcal{G}_m \rightleftharpoons \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{G}_{m,0} + \mathcal{G}_{m,1})$.

Пусть $x^{[0]}$ [0]-КДЧ, $0 < x^{[0]} < 1\ \&\ \neg \exists n\,(x^{[0]} \in H_n^m)\ \&$ $\&\ \neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}_m, x^{[0]})$. **Тогда** $!\,\hat{\Theta}(x^{[0]})\ \&$ $\&\ D_{кл}(0, \mathcal{F}_m, x^{[0]})$ и существует [0]-ПЧ $\eta^{[0]}$ такое, что $D_{кл}(\eta^{[0]}, [\Theta, \{H_n^m\}_n^{[0]}], x^{[0]})$. Ввиду этого и монотонности объекта Θ легко показать, что выполнено $D_{кл}(\eta^{[0]}, \Theta, x^{[0]})$.

С помощью леммы 1 можно построить возрастающую на $0 \Delta 1$ [0]-функцию $\bar{\mathcal{G}}$, для которой выполнено $\bar{\mathcal{G}}(0) = 0\ \&$ $\&\ \bar{\mathcal{G}}(1) = 1\ \&\ \forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1\ \&\ \forall m \neg\neg \exists n\,(x^{[0]} \in H_n^m) \supset D_{кл}(+\infty, \bar{\mathcal{G}}, x^{[0]}))$.

Для завершения доказательства достаточно определить

$$\mathcal{G} \rightleftharpoons \left(\frac{1}{2} \cdot \bar{\mathcal{G}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}} \cdot \mathcal{G}_m\right) .$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть Θ объект типа $\mathcal{Y}$, обладающий свойством $\mathcal{E}$, а $\mathcal{F}$ возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция, $\Delta(\mathcal{F}, 0 \Delta 1) < 1$. Тогда не может не существовать [0]-КДЧ $x^{[0]}$ такое, что $x^{[0]} \in 0 \nabla 1\ \&\ \bar{D}[\mathcal{F}](x^{[0]}) < 1$ и Θ выполняет альтернативу Данжуа в точке $x^{[0]}$.

Обозначение. Пусть Θ , $\Theta \rightleftharpoons [\{F_n\}_n^{[0]}, \mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1]$, объект типа $\mathcal{Y}$, $\{Q_m\}_m^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов, $\mathcal{E}_0(\{Q_m\}_m^{[0]})$, K [0]-сегмент, и i , j и k НЧ.

Тогда $\mathcal{T}(\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}, K, i, j, k)$ значит: $\exists pq(\mathfrak{I}_m(Q_p) = \mathfrak{I}_\lambda(K)\ \&$
$\&\ \mathfrak{I}_\lambda(Q_q) = \mathfrak{I}_m(K))\ \&\ 0 \le i \le 1\ \&\ 0 \le j \le 1\ \&\ |K| < 2^{-k}\ \&\ \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in K\ \&$
$\&\ \neg\exists m(x^{[0]} \in (Q_m)^0) \supset \exists z^{[0]} P(z^{[0]}, \{F_n\}_n^{[0]}, x^{[0]})\ \&\ \forall y^{[0]}(0 < (-1)^i \cdot$
$\cdot (y^{[0]} - x^{[0]}) < 2^{-k}\ \&\ !\hat{\Theta}(y^{[0]}) \supset (-1)^j \cdot \frac{\hat{\Theta}(y^{[0]}) - \hat{\Theta}(x^{[0]})}{y^{[0]} - x^{[0]}} \le 2^k))$.

<u>Лемма 5</u>. Пусть Θ объект типа $\mathcal{F}$, $\{Q_m\}_m^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-сегментов, K $[0]$-сегмент и i, j и k НЧ такие, что $(\Theta \rightleftharpoons [\{F_m\}_m^{[0]}, y_0, y_1])\ \&\ \mathcal{C}_0(\{Q_m\}_m^{[0]})\ \&$ $\&\ \mathcal{T}(\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}, K, i, j, k)$. Тогда существует возрастающая на $0 \vartriangle 1$ $[0]$-функция G такая, что
$G(0) = 0\ \&\ G(1) = 1\ \&\ \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in K\ \&\ \neg\exists m(x^{[0]} \in Q_m)\ \&$
$\&\ \neg D_{K\lambda}(+\infty, G, x^{[0]}) \supset \exists \eta^{[0]}(D_{K\lambda}(\eta^{[0]}, [\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}], x^{[0]})\ \&\ (i = j \supset$
$\supset \underline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) = \overline{D}^+[\Theta](x^{[0]}) = \eta^{[0]})\ \&\ (\neg(i = j) \supset \overline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) =$
$= \underline{D}^+[\Theta](x^{[0]}) = \eta^{[0]})))$.

Доказательство. Пусть, например, $i = j = 0$. Тогда $[0]$-функция $\mathcal{F}$ такая, что
$\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \vartriangle 1 \supset \mathcal{F}(x^{[0]}) =$
$[\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}](max(min(x^{[0]}, \mathfrak{I}_m(K)), \mathfrak{I}_\lambda(K))) - 2^k \cdot x^{[0]})$
является невозрастающей и, следовательно, $[0]$-равномерно непрерывной. Ввиду этого легко построить невозрастающий объект типа $\mathcal{F}$ Θ_1 такой, что $\forall x^{[0]}(!\hat{\Theta}_1(x^{[0]}) \supset$
$\supset((\neg(x^{[0]} \in K) \vee \neg\exists m(x^{[0]} \in (Q_m)^0)) \supset \hat{\Theta}_1(x^{[0]}) = \mathcal{F}(x^{[0]}))\ \&$
$\&\ \forall m(x^{[0]} \in K\ \&\ x^{[0]} \in (Q_m)^0 \supset \hat{\Theta}_1(x^{[0]}) = \mathcal{F}(\mathfrak{I}_\lambda(Q_m))))$.
Мы используем теорему 1 и построим, исходя от Θ_1, возрастающую на $0 \vartriangle 1$ $[0]$-функцию G, обладающую описанными там свойствами.

Пусть v $[0]$-КДЧ, $v \in K\ \&\ \neg\exists m(v \in Q_m)\ \&\ \neg D_{K\lambda}(+\infty, G, v)$. Тогда $!\hat{\Theta}_1(v)\ \&\ \hat{\Theta}_1(v) = \mathcal{F}(v) = \hat{\Theta}(v) - 2^k \cdot v$ и существует $[0]$-ПЧ ξ такое, что $D_{K\lambda}(\xi, \Theta_1, v)$. Следовательно, имеет место

$D_{K\lambda}(\xi, \mathcal{F}, v)$ и $D_{K\lambda}(\xi + 2^k, [\Theta, \{Q_m\}_m^{[0]}], v)$. Отсюда мы сразу получаем $\underline{D}^-[\Theta](v) \leq \xi + 2^k \leq \overline{D}^+[\Theta](v)$.

С другой стороны, $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in K \& !\hat{\Theta}(x^{[0]}) \supset (\neg \exists m (x^{[0]} \in (Q_m)^0) \supset \hat{\Theta}(x^{[0]}) - 2^k \cdot x^{[0]} = \mathcal{F}(x^{[0]})) \& \forall m (x^{[0]} \in (Q_m)^0 \supset \hat{\Theta}(x^{[0]}) - 2^k \cdot x^{[0]} \leq \mathcal{F}(\partial_\lambda(Q_m))))$ и, следовательно, $\overline{D}^+[\Theta](v) - 2^k \leq \overline{D}^+[\Theta_1](v) = \xi = \underline{D}^-[\Theta_1](v) \leq \underline{D}^-[\Theta](v) - 2^k$.

Доказательство теоремы 2. Ввиду замечания 1 из [7] мы можем предположить, что Θ задано в виде $[\{F_n\}_n^{[0]}, y_0, y_1]$.

Мы допустим, что для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$ такого, что $x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \& \overline{D}[\mathcal{F}](x^{[0]}) < 1 \& !\Theta(x^{[0]})$, Θ не выполняет альтернативу Данжуа в точке $x^{[0]}$.

Согласно предположениям теоремы существуют НЧ ℓ, [0]-КДЧ v_0, $S_\sigma^{[0]}$-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $2^{-\ell}$ и система последовательностей р.п. множеств рациональных интервалов $\{\{\mathfrak{M}_k^{i,j}\}_k\}_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 1}}$ такие, что $\Delta(\mathcal{F}, 0 \triangle 1) + 2^{-\ell} < v_0 < 1 \& \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \& \neg(x^{[0]} \in \mathcal{G}) \supset \exists z^{[0]} P(z^{[0]}, \{F_m\}_m, x^{[0]}) \& E(\Theta, \{\{\mathfrak{M}_k^{i,j}\}_k\}_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 1}}, x^{[0]}))$. (См. замечание 4 и лемму 1.)

Пусть $\mathcal{F}_0 \rightleftharpoons (\mathcal{F} + \nu_1 \langle \mathcal{G} \rangle)$. Тогда $\mathcal{F}_0$ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция и $\Delta(\mathcal{F}_0, 0 \triangle 1) < v_0 < 1$. Мы используем лемму 2 и построим, исходя от $\mathcal{F}_0$ и v_0, [0]-последовательность [0]-сегментов $\{P_{0,n}\}_n^{[0]}$, обладающую описанными там свойствами. Тогда для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$, $x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists n (x^{[0]} \in (P_{0,n})^0)$, верно

$$\overline{D}[\mathcal{F}](x^{[0]}) < v_0 < 1 \& \neg(x^{[0]} \in \mathcal{G}) \tag{3}$$

и, следовательно, $!\hat{\Theta}(x^{[0]})$, Θ не выполняет альтернативу Данжуа в точке $x^{[0]}$ - в частности, выполнено $\neg\neg(-\infty < \underline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) \vee -\infty < \underline{D}^+[\Theta](x^{[0]}) \vee \overline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) <$

$<+\infty \vee \overline{D}^{+}[\Theta](x^{[0]})<+\infty)$ - и тогда

$$\neg\forall ijk(0\le i\le 1 \& 0\le j\le 1 \supset \exists S(S\in \mathfrak{M}_k^{i,j} \& x^{[0]}\in S)).$$

Согласно лемме 3 не могут не существовать [0]-сегмент K_0 и НЧ i_0, j_0 и k_0 такие, что

$$\exists pq(\partial_n(P_{0,p})=\partial_\lambda(K_0)\& \partial_\lambda(P_{0,q})=\partial_n(K_0))\& 0\le i_0\le 1\& 0\le$$
$$\le j_0\le 1\& |K_0|<2^{-k_0}\&\forall x^{[0]}(x^{[0]}\in K_0 \& \neg\exists m(x^{[0]}\in (P_{0,m})^0)\supset$$
$$\supset\exists z^{[0]}P(z^{[0]},\{F_n\}_m^{[0]},x^{[0]})\&\neg\exists S(S\in\mathfrak{M}_{k_0}^{i_0,j_0}\& x^{[0]}\in S))$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{T}(\Theta,\{P_{0,n}\}_m^{[0]},K_0,i_0,j_0,k_0)\ . \tag{4}$$

Пусть K_0 [0]-сегмент и i_0, j_0 и k_0 НЧ, для которых выполнено (4). Мы можем без ограничения общности предположить, что $i_0=j_0=0$.

Согласно свойствам $\{P_{0,m}\}_m^{[0]}$ существуют возрастающая на $0\vartriangle 1$ [0]-функция $\overline{\mathfrak{F}}_0$, РЧ a_0 и [0]-КДЧ v_1 такие, что

$$0<a_0\&\Delta(\overline{\mathfrak{F}}_0,0\vartriangle 1)+a_0<v_1<1\&\forall x^{[0]}(x^{[0]}\in 0\triangledown 1\&$$
$$\&(\neg(x^{[0]}\in(K_0)^0)\vee\exists m(x^{[0]}\in P_{0,m}))\supset \underline{D}[\overline{\mathfrak{F}}_0](x^{[0]})>1)\ . \tag{5}$$

Ввиду этого, (4) и леммы 5 существует возрастающая на $0\vartriangle 1$ [0]-функция $\mathcal{G}_0$ такая, что $\mathcal{G}_0(0)=0\&\mathcal{G}_0(1)=1$ и для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$,

$$x^{[0]}\in 0\triangledown 1\&\underline{D}[\overline{\mathfrak{F}}_0](x^{[0]})\le 1\&\neg D_{K\lambda}(+\infty,\mathcal{G}_0,x^{[0]})\ , \tag{6}$$

верно

$$\exists\eta^{[0]}(D_{K\lambda}(\eta^{[0]},[\Theta,\{P_{0,n}\}_m^{[0]}],x^{[0]})\&\underline{D}^-[\Theta](x^{[0]})=$$
$$\overline{D}^+[\Theta](x^{[0]})=\eta^{[0]})\ . \tag{7}$$

Однако, ввиду (5) для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из (6) также следует (3) и тогда согласно нашему допущению выполнено $\neg\neg(-\infty < \underline{D}^+[\Theta](x^{[0]}) \vee \overline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) < +\infty)$ и, следовательно,

(8) $\neg\forall i j k((i=0\,\&\,j=1 \vee i=1\,\&\,j=0)\supset \exists S(S\in \mathfrak{M}_k^{i,j}\,\&\,x^{[0]}\in S))$.

Мы определим $\mathcal{F}_1 \rightleftharpoons (\overline{\mathcal{F}}_0 + a_0\cdot \mathcal{G}_0)$ и согласно лемме 2 построим, исходя от $\mathcal{F}_1$ и v_1, [0]-последовательность [0]-сегментов $\{P_{1,n}\}_n^{[0]}$, обладающую описанными там свойствами. Тогда для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$, $x^{[0]}\in 0\triangledown 1\,\&\,\neg\exists n(x^{[0]}\in$ $\in (P_{1,n})^0)$, верно (6) и, следовательно, (8) и ввиду (5) и $\neg\exists n(x^{[0]}\in P_{0,n})$. Таким образом,

(9) $\forall m\exists n(P_{0,m}\subseteq P_{1,n})\,\&\,[\Theta,\{P_{1,n}\}_n^{[0]}] = [[\Theta,\{P_{0,n}\}_n^{[0]}],\{P_{1,n}\}_n^{[0]}]$.

Согласно лемме 3 не могут не существовать [0]-сегмент K_1 и НЧ i_1, j_1 и k_1 такие, что

(10) $(i_1=0\,\&\,j_1=1\vee i_1=1\,\&\,j_1=0)\,\&\,\mathcal{T}(\Theta,\{P_{1,n}\}_n^{[0]}, K_1, i_1, j_1, k_1)$.

Пусть K_1 [0]-сегмент и i_1, j_1 и k_1 НЧ, для которых выполнено (10). Согласно свойствам $\{P_{1,n}\}_n^{[0]}$ существуют возрастающая на $0\triangle 1$ [0]-функция $\overline{\mathcal{F}}_1$ и РЧ a_1 такие, что

$$(11)\quad \begin{aligned} &0<a_1\,\&\,\Delta(\overline{\mathcal{F}}_1,0\triangle 1)+a_1<1\,\&\,\forall x^{[0]}(x^{[0]}\in 0\triangledown 1\,\&\,(\neg(x^{[0]}\in\\ &\in (K_1)^0)\vee\exists n(x^{[0]}\in P_{1,n}))\supset \underline{D}[\overline{\mathcal{F}}_1](x^{[0]})>1).\end{aligned}$$

Ввиду этого, (10) и леммы 5 существует возрастающая на $0\triangle 1$ [0]-функция $\mathcal{G}_1$ такая, что $\mathcal{G}_1(0)=0\,\&\,\mathcal{G}_1(1)=1$ и для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$,

(12) $x^{[0]}\in 0\triangledown 1\,\&\,\underline{D}[\overline{\mathcal{F}}_1](x^{[0]})\leq 1\,\&\,\neg D_{K\Lambda}(+\infty,\mathcal{G}_1,x^{[0]})$,

верно

$$(13)\quad \begin{aligned}&\exists\eta^{[0]}(D_{K\Lambda}(\eta^{[0]},[\Theta,\{P_{1,n}\}_n^{[0]}],x^{[0]})\,\&\,\overline{D}^-[\Theta](x^{[0]}) =\\ &\underline{D}^+[\Theta](x^{[0]}) = \eta^{[0]}).\end{aligned}$$

1) Пусть $x^{[0]}$ [0]-КДЧ такое, что (12). Тогда верно (13) и ввиду (11) выполнено $\neg \exists n (x^{[0]} \in P_{1,n})$ и, следовательно, (6). Из (6) следует (7) и согласно (5) верно $\neg \exists n (x^{[0]} \in P_{0,n})$. Таким образом, мы получаем (3) и ввиду (9) имеет место $\forall \eta^{[0]} (D_{кл} (\eta^{[0]}, [\Theta, \{P_{0,n}\}_n^{[0]}], x^{[0]}) \supset D_{кл} (\eta^{[0]}, [\Theta, \{P_{1,n}\}_n^{[0]}], x^{[0]}))$.

На основании этого, (7) и (13) верно

(14) $$\exists \eta^{[0]} D_{кл} (\eta^{[0]}, \Theta, x^{[0]}) .$$

Из (3) следует

(15) $$\overline{D} [\mathcal{F}] (x^{[0]}) < 1 \,\&\, ! \hat{\Theta} (x^{[0]}) .$$

2) Мы определим $\mathcal{F}_2 \rightleftharpoons (\overline{\mathcal{F}}_1 + a_1 \cdot \mathcal{G}_1)$. Тогда $\mathcal{F}_2$ возрастающая на $0 \vartriangle 1$ [0]-функция и $\Delta (\mathcal{F}_2, 0 \vartriangle 1) < 1$. Легко построить [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangledown 1$, для которого выполнено $\underline{D} [\mathcal{F}_2] (x^{[0]}) < 1$ и, следовательно, (12) и тогда ввиду 1) верно (14) и (15).

Мы получили противоречие и теорема доказана.

Ввиду теоремы 2, следствия леммы 4 и замечания 3 верно следующее утверждение.

<u>Теорема 3</u>. Пусть Θ объект типа $\mathcal{Y}$. Если Θ обладает свойством $\mathcal{E}$ (в частности, если Θ [0]-функция), то внутренняя мера множества всех [0]-КДЧ из $0 \triangledown 1$, в которых Θ не выполняет альтернативу Данжуа, равна нулю.

Методом, использованным в доказательстве теоремы 2, можно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 4</u>. Пусть Θ объект типа $\mathcal{Y}$, обладающий свойством $\mathcal{E}$, а $\mathcal{F}$ возрастающая на $0 \vartriangle 1$ [0]-функция такая, что $\Delta(\mathcal{F}, 0 \vartriangle 1) < 1 \,\&\, \forall x^{[0]} (x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \overline{D} [\mathcal{F}] (x^{[0]}) < 1 \,\&$

$\& ! \hat{\Theta}(x^{[0]}) \supset \neg\neg(-\infty < \underline{D}[\Theta](x^{[0]}) \vee \overline{D}[\Theta](x^{[0]}) < +\infty))$.

Тогда не может не существовать возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathcal{F}_1$, для которой выполнено
$\Delta(\mathcal{F}_1, 0 \triangle 1) < 1 \& \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangledown 1 \& \underline{D}[\mathcal{F}_1](x^{[0]}) < 1 \supset$
$\supset \overline{D}[\mathcal{F}](x^{[0]}) < 1 \& ! \hat{\Theta}(x^{[0]}) \& \exists \eta^{[0]} D_{КЛ}(\eta^{[0]}, \Theta, x^{[0]}))$.

<u>Пример 2</u>. Существует [0]-функция $\mathcal{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ (см. [3], стр. 63) такая, что $a_{КЛ}(\mathcal{F})$ (см. [6]) и
$\forall x^{[0]}(-\infty < \underline{D}[\mathcal{F}](x^{[0]}) \leq \overline{D}[\mathcal{F}](x^{[0]}) < +\infty) \&$
$\neg \forall a b(0 \leq a < b \leq 1 \supset \exists x^{[0]}(x^{[0]} \in a \triangle b \& D_{КЛ}(\mathcal{F}, x^{[0]})))$.

Ввиду этого примера ясно, что двойное отрицание, которое находится в утверждениях теорем 2 и 4, нельзя опустить.

<u>Пример 3</u>. Существует [0]-последовательность [0]-функций [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ $\{\ _m\}^{[0]}_m$ такая, что
$\forall m(a_{КЛ}(\mathcal{F}_m) \& \forall x^{[0]}(-\infty < \underline{D}[\mathcal{F}_m](x^{[0]}) \leq \overline{D}[\mathcal{F}_m](x^{[0]}) < +\infty)) \&$
$\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \supset \exists m \neg D_{КЛ}(\mathcal{F}_m, x^{[0]}))$.

Пользуясь методом приоритета, можно построить следующий пример.

<u>Пример 4</u>. Существуют объект типа $\not{f}$ Θ , где $\Theta \rightleftharpoons [\{F_n\}^{[0]}_n, 0, 0]$, и [0]-оператор типа $(D^{[0]} \longrightarrow \Pi^{[0]})$ φ такие, что

а) $\{F_n\}^{[0]}_n \in {}^{\pi}L^{[0]}_1$ (см. [3]), Θ (соотв. φ) является объектом (соотв. оператором) [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$, φ принадлежит первому классу Бэра (см. [5]) и $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \& ! \hat{\Theta}(x^{[0]}) \supset \hat{\Theta}(x^{[0]}) = \varphi(x^{[0]}))$;

б) для всякого иррационального [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0 \triangle 1$ выполнено $! \hat{\Theta}(x^{[0]}) \& \hat{\Theta}(x^{[0]}) = \varphi(x^{[0]}) = 0 \& -1 \leq \underline{D}[\Theta](x^{[0]}) =$

$= \underline{D}[\varphi](x^{[0]}) < \overline{D}[\varphi](x^{[0]}) = \overline{D}[\Theta](x^{[0]}) \leq 1$.

Итак, в теоремах 2 - 4 нельзя опустить предположение, что объект Θ обладает свойством $\mathcal{E}$. О том, что эти теоремы нельзя перенести на случай операторов типа $(D^{[0]} \longrightarrow \Pi^{[0]})$, свидетельствует следующий пример.

<u>Пример 5</u>. Существует [0]-оператор типа $(D^{[0]} \longrightarrow \Pi^{[0]})$ φ, принадлежащий первому классу Бэра [5] и удовлетворяющий условию Липшица, для которого выполнено
$\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset -1 < \underline{D}[\varphi](x^{[0]}) < \overline{D}[\varphi](x^{[0]}) < 1)$.

Литература

[1] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова 67(1962), 295-361.

[2] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae, Math. et Physica 19 (1978), 15-60.

[3] ДЕМУТ О.: Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной, Acta Univ. Carolinae, Math. et Physica 19(1978), 61-96.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 463-492.

[5] ДЕМУТ О.: Об одном конструктивном аналоге функций n-го класса Бэра , Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 231-245.

[6] ДЕМУТ О.: О конструктивных аналогах обобщенно абсолютно непрерывных функций и функций обобщенной ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 19(1978), 471-487.

[7] ДЕМУТ О., ПОЛИВКА Й.: О представимости линейных функционалов в пространстве шифров равномерно непрерывных на сегменте $0 \Delta 1$ конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 20 (1979), 765-780.

[8] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы К.М. Гарга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 457-472.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Malostran. nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 21.2. 1980)