Osvald Demuth

Über ein konstruktives Analogon eines Satzes von K. M. Garg über Ableitungszahlen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 3, 457--472

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106012`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
21,3 (1980)

О КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ К.М. ГАРГА О ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЛАХ

О. ДЕМУТ (O.DEMUTH)

Содержание: Для [0]-равномерно непрерывных конструктивных [0]-функций и области арифметических действительных чисел доказаны конструктивные аналоги теорем А. Данжуа и К. М. Гарга о производных числах.

Ключевые слова: Арифметическое действительное число, [0]-конструктивная функция действительной переменной, псевдодифференцируемость.

Classification: Primary 03F65, 26A24
Secondary 26A16

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [3] и [4], в частности понятиями $[n]$-конструктивного действительного числа ($[n]$-КДЧ), $[n]$-псевдочисла ($[n]$-ПЧ), арифметического действительного числа (АДЧ), [0]-конструктивной функции действительной переменной ([0]-КФДП), [0]-функции, понятиями и обозначенями, связанными с псевдодифференцируемостью, и понятиями Π_1-числа и Π_2-числа из [6].

Буквы k, l, m, n, p, q, s и t служат переменными для натуральных чисел (НЧ), т.е. неотрицательных целых чисел, i и j - переменными для целых чисел, a, b, c и d - переменными для рациональных чисел (РЧ), для всякого НЧ n - $x^{[n]}$, $y^{[n]}$ и $z^{[n]}$ - с индексами или без них - переменными для

$[m]$-КДЧ, $\xi^{[m]}$ и $\eta^{[m]}$ - с индексами или без них - переменными для $[m]$-ПЧ, а X и Y - с индексами или без них - переменными для АДЧ. Для любого НЧ m мы посредством $\mathcal{D}^{[m]}$ (соотв. $\Pi^{[m]}$) обозначаем множество всех $[m]$-КДЧ (соотв. $[m]$-ПЧ), а $^*\mathcal{D}^{[m]}$ обозначает $\mathcal{D}^{[m]}$ расширенное на $-\infty$ и $+\infty$.

Мы напомним, что а) слово P называется АДЧ, если $\exists m (P \in \mathcal{D}^{[m]})$.

б) согласно 5.5 из [3] $\forall m \xi^{[m]} \exists x^{[m+1]} (x^{[m+1]} = \xi^{[m]}) \& \forall m x^{[m+1]} \exists \xi^{[m]} (\xi^{[m]} = x^{[m+1]})$,

в) всюду определенную [0]-КФДП, т.е. [0]-оператор типа $(\mathcal{D}^{[0]} \to \mathcal{D}^{[0]})$, $\mathcal{F}$ мы называем [0]-функцией, если

$\forall x^{[0]} ((x^{[0]} \leq 0 \supset \mathcal{F}(x^{[0]}) = \mathcal{F}(0)) \& (1 \leq x^{[0]} \supset \mathcal{F}(x^{[0]}) = \mathcal{F}(1)))$.

При использовании терминологии из [3] и [4] следует иметь в виду, что конструктивные действительные числа и [0]-КДЧ, псевдочисла и [0]-ПЧ, функции и [0]-функции и т.д. отличаются только способом "кодирования", а конструктивные понятия - равномерная непрерывность, сходимость и т.д. - эквивалентны соответствующим "[0]-понятиям". В связи с этим мы будем (в отличие от [6]) говорить о $[0]$-Π_1-числах и $[0]$-Π_2-числах и посредством $\Pi_1^{[0]}$ (соотв. $\Pi_2^{[0]}$) мы обозначим множество всех $[0]$-Π_1Ч (соотв. $[0]$-Π_2Ч).

<u>Замечание 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ всюду определенная [0]-КФДП. Тогда

1) если $\mathcal{F}$ псевдоравномерно непрерывна, то

а) согласно замечанию 5.4 из [3] существует [0]-отображение $\mathcal{O}p[\mathcal{F}]$, являющееся для всякого НЧ m оператором типов $(\mathcal{D}^{[m]} \longrightarrow \mathcal{D}^{[m]})$ и $(\Pi^{[m]} \longrightarrow \Pi^{[m]})$, причем выполнено

$\forall x^{[0]} (\mathcal{O}p [\mathcal{F}] (x^{[0]}) = \mathcal{F} (x^{[0]}))$;

б) ввиду теоремы 2.8 и леммы 5.5 из [3] и леммы 1.3 из [4] существуют $\emptyset^{(\omega)}$-отображения $\underline{D}[\mathcal{F}]$, $\overline{D}[\mathcal{F}]$, $\underline{D}^{-}[\mathcal{F}]$, $\overline{D}^{-}[\mathcal{F}]$, $\underline{D}^{+}[\mathcal{F}]$ и $\overline{D}^{+}[\mathcal{F}]$, являющиеся для всякого НЧ n операторами типов $(D^{[n]} \longrightarrow *D^{[n+2]})$ и $(\Pi^{[n]} \longrightarrow *D^{[n+3]})$ такими, что для любого слова P, $(P \in D^{[n]} \vee P \in \Pi^{[n]})$, $\underline{D}[\mathcal{F}](P)$ (соотв. $\overline{D}[\mathcal{F}](P)$, соотв. $\underline{D}^{-}[\mathcal{F}](P)$, соотв. $\overline{D}^{-}[\mathcal{F}](P)$, соотв. $\underline{D}^{+}[\mathcal{F}](P)$, соотв. $\overline{D}^{+}[\mathcal{F}](P)$) является значением нижней (соотв. верхней, соотв. левой нижней, соотв. левой верхней, соотв. правой нижней, соотв. правой верхней) псевдопроизводной [0]-КФДП $\mathcal{F}$ в точке P;

2) если $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывна, то

а) $\mathcal{F}$ псевдоравномерно непрерывна,

б) существуют [0]-отображения $\langle I, \mathcal{F} \rangle$, $\langle S, \mathcal{F} \rangle$ и $\langle \sigma, \mathcal{F} \rangle$ такие, что для любого [0]-сегмента $\mathcal{Q}$ они применимы к $\mathcal{Q}$ и $\langle I, \mathcal{F} \rangle (\mathcal{Q})$ (соотв. $\langle S, \mathcal{F} \rangle (\mathcal{Q})$) – [0]-КДЧ, являющееся инфимумом (соотв. супремумом) множества

$\wedge y^{[0]} (\neg\neg \exists x^{[0]} (x^{[0]} \in \mathcal{Q} \,\&\, \mathcal{F}(x^{[0]}) = y^{[0]}))$, а

$\langle \sigma, \mathcal{F} \rangle (\mathcal{Q}) \rightleftharpoons \langle I, \mathcal{F} \rangle (\mathcal{Q}) \vartriangle \langle S, \mathcal{F} \rangle (\mathcal{Q})$;

3) если $x^{[n]}$ и $y^{[n]}$ [n]-КДЧ и $v \vartriangle w$ [0]-сегмент, то

а) $L^{[n]}(y^{[n]}, \mathcal{F}, x^{[n]})$ обозначает: $y^{[n]}$ является [n]-пределом [0]-КФДП $\mathcal{F}$ в точке $x^{[n]}$ (см. [4], стр. 84);

б) $\Delta(\mathcal{F}, v \vartriangle w) \rightleftharpoons (\mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(v))$.

Мы заметим, что любая монотонная [0]-функция является [0]-равномерно непрерывной.

Обозначения. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция и $\{H_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-сегментов. Тогда

1) ~~мы~~ посредством $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n^{[0]})$ обозначим: сегменты H_n, $0 \le n$, не перекрываются, $|H_n| \xrightarrow[n\to\infty]{[0]} 0$ и $\neg\exists n\,(0 \in (H_n)^0 \vee 1 \in (H_n)^0)$;

2) если $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n^{[0]})$, то согласно замечанию 1.3 из [4] $[\mathcal{F}, \{H_n\}_n^{[0]}]$ [0]-функция, которая линейна на всяком сегменте H_k, $0 \le k$, и выполняет
$\forall x^{[0]}(\neg\exists k\,(x^{[0]} \in (H_k)^0) \supset [\mathcal{F}, \{H_n\}_n^{[0]}](x^{[0]}) = \mathcal{F}(x^{[0]}))$.

Согласно доказательству теоремы 3 из [8] верно следующее утверждение.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Тогда существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathcal{G}$ такая, что

(1) $\mathcal{G}(0) = 0 \,\&\, \mathcal{G}(1) = 1 \,\&\, D^+_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, 0) \,\&\, D^-_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, 1)$

и для всякого АДЧ X, $0 < X < 1 \,\&\, \neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, X)$, верно

(2) $\neg\neg(D_{кл}(\mathcal{F}, X) \vee \underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, X) \,\&\, \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, X))$.

Следующие две теоремы являются конструктивными аналогами теорем А. Данжуа ([1], стр. 271) и К.М. Гарга [2].

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Тогда существует возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция $\mathcal{G}$ такая, что (1) и для всякого АДЧ X, $0 < X < 1 \,\&$ $\&\, \neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, X)$, не может не иметь место одна из следующих четырех возможностей:

а) выполнено

(3) $\underline{D}^-[\mathcal{F}](X) = \overline{D}^-[\mathcal{F}](X) = \underline{D}^+[\mathcal{F}](X) = \overline{D}^+[\mathcal{F}](X)$

и

(4) $-\infty < \underline{D}^-[\mathcal{F}](X) < +\infty$;

б) выполнено

(5) $\underline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X) = +\infty \,\&\, \overline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = \underline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X)$

и

(6) $-\infty < \underline{D}^{+}[\mathfrak{F}] < +\infty$;

в) выполнено

(7) $\overline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = +\infty \,\&\, \underline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X) = -\infty \,\&\, \underline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = \overline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X)$

и(4);

г) выполнено

(8) $\underline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = \underline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = \overline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X) = +\infty$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП $\mathcal{G}$ такая, что $0 \leq \mathcal{G} \leq 1$ и для любого АДЧ X, $\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, \mathcal{O}p[\mathfrak{F}](X))$, выполнено $\neg(\underline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = 0 \vee \overline{D}^{-}[\mathfrak{F}](X) = 0 \vee \underline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X) = 0 \vee \overline{D}^{+}[\mathfrak{F}](X) = 0)$ и не может не иметь место или (3) или (5) или (7) или (8).

Замечание 2. Для любых всюду определенной псевдоравномерно непрерывной [0]-КФДП $\mathfrak{F}$ и АДЧ X

1) а) $^{*}D_{кл}(\mathfrak{F}, X)$ эквивалентно (3) [4];

б) $D_{кл}(\mathfrak{F}, X)$ эквивалентно конъюнкции (3) и (4) [4];

2) мы посредством $A(\mathfrak{F}, X)$ обозначим (2), посредством $^{*}B_1(\mathfrak{F}, X)$ - (5), посредством $B_1(\mathfrak{F}, X)$ конъюнкцию (5) и (6), посредством $^{*}B_2(\mathfrak{F}, X)$ - (7), посредством $B_2(\mathfrak{F}, X)$ конъюнкцию (7) и (4), а посредством $U(\mathfrak{F}, X)$ - (8); если $U(\mathfrak{F}, X)$, то X называется узловой точкой [0]-КФДП $\mathfrak{F}$.

Замечание 3. 1) Существует [0]-$П_1$Ч ξ_0 такое, что для любой всюду определенной [0]-КФДП $\mathcal{G}$ выполнено $0 < \xi_0 < 1 \,\&$

$\& \neg \mathcal{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, \xi_0)$ и $\forall \xi^{[0]}(\xi^{[0]} \in \Pi_2^{[0]} \supset \neg \mathcal{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, \xi^{[0]}))$ (см. лемму 2 из [7]).

2) Свойства множеств типов $\wedge x^{[0]}(\mathcal{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, x^{[0]}))$ и $\wedge X(\mathcal{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, X))$, где $\mathcal{G}$ [0]-функция, описаны в [8] и в теореме 1.2 из [4].

Обозначения. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, $a \Delta b$ рациональный сегмент и x [0]-КДЧ. Тогда мы посредством h_x и $\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle$ обозначим [0]-функции такие, что $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \Delta 1 \supset h_x(x^{[0]}) = x \cdot x^{[0]})$ & $\forall x^{[0]}((x^{[0]} < b \supset \mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle (x^{[0]}) = \langle I, \mathcal{F} \rangle (max(a, x^{[0]}) \Delta b))$ & $(b \leq x^{[0]} \supset \mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle (x^{[0]}) = \mathcal{F}(b)))$
($\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle$ является неубывающей).

<u>Замечание 4</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, $a \Delta b$ рациональный сегмент, c РЧ и X АДЧ такие, что

$$a < X < b \;\&\; \forall d\left(X < d \leq b \supset 0 < c < \frac{\Delta(\mathcal{O}p[\mathcal{F}], X \Delta d)}{|X \Delta d|}\right).$$

Тогда легко доказать, что выполнено $\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) = \mathcal{O}p[\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle](X) \;\&\; 0 < c \leq \underline{D}^+[\mathcal{F}](X) = \underline{D}^+[\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle](X) \leq \overline{D}^+[\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle](X) \leq \overline{D}^+[\mathcal{F}](X) \;\&\; max(\underline{D}^-[\mathcal{F}](X), 0) \leq \underline{D}^-[\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle](X) \leq \overline{D}^-[\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle](X) = max(\overline{D}^-[\mathcal{F}](X), 0)$.

Следовательно, верно $\neg\neg(c \leq \overline{D}^-[\mathcal{F}](X) = \underline{D}^+[\mathcal{F}](X) < +\infty \;\&\; \mathcal{D}_{кл}(\underline{D}^+[\mathcal{F}](X), \mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle, X) \vee \neg \mathcal{D}_{кл}(\mathcal{F}, X) \;\&\; \neg A(\mathcal{J}\langle \mathcal{F}, a \Delta b \rangle, X))$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Тогда существует последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций $\{\mathcal{F}_m\}_m$ такая, что для любого АДЧ X из $0 \nabla 1$ выполнено

$$\neg(\mathcal{D}_{кл}(\mathcal{F}, X) \vee B_1(\mathcal{F}, X) \vee B_2(\mathcal{F}, X) \vee U(\mathcal{F}, X)) \supset$$

$\supset \neg\neg \exists m (\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) = \mathcal{O}p[\mathcal{F}_m](X) \,\&\, \neg A(\mathcal{F}_m, X) \,\&\, ({}^*\mathcal{D}_{кл}(\mathcal{F}, X) \vee$
${}^*\mathcal{B}_1(\mathcal{F}, X) \vee {}^*\mathcal{B}_2(\mathcal{F}, X) \vee \neg\, {}^*\mathcal{D}_{кл}(\mathcal{F}_m, X)))$
и $\forall Y (\neg\neg(\underline{D}^-[\mathcal{F}](X) = Y \vee \overline{D}^-[\mathcal{F}](X) = Y \vee \underline{D}^+[\mathcal{F}](X) = Y \vee$
$\overline{D}^+[\mathcal{F}](X) = Y) \supset \neg\neg \exists m (\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) = \mathcal{O}p[\mathcal{F}_m](X) \,\&$
$(\mathcal{D}_{кл}(Y, \mathcal{F}_m, X) \vee \neg A(\mathcal{F}_m, X) \,\&\, \neg\, {}^*\mathcal{D}_{кл}(\mathcal{F}_m, X))))$.

Доказательство. Мы построим $[0]$-функцию $\mathcal{G}$ такую, что $\forall x^{[0]} (\mathcal{G}(x^{[0]}) = -\mathcal{F}(1 - x^{[0]}))$, и последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0]$-функций $\{\mathcal{F}_m\}_m$, которая содержит $[0]$-функцию $\mathcal{F}$ и для всяких рационального сегмента $a \triangle b$, $a \triangle b \subseteq 0 \triangle 1$, и НЧ m $[0]$-функции

$$\mathcal{I}\langle \mathcal{F} + h_m, a \triangle b \rangle - h_m ,$$
$$-\mathcal{I}\langle -\mathcal{F} + h_m, a \triangle b \rangle + h_m ,$$
$$-\mathcal{I}\langle \mathcal{G} + h_m, a \triangle b \rangle (1 - x^{[0]}) + h_m (1 - x^{[0]}) \quad \text{и}$$
$$\mathcal{I}\langle -\mathcal{G} + h_m, a \triangle b \rangle (1 - x^{[0]}) - h_m (1 - x^{[0]}) .$$

Пусть X АДЧ такое, что $0 < X < 1 \,\&\, \neg\, \mathcal{U}(\mathcal{F}, X)$. Тогда $\neg\neg(-\infty < \underline{D}^+[\mathcal{F}](X) \vee \overline{D}^+[\mathcal{F}](X) < +\infty \vee -\infty < \underline{D}^-[\mathcal{F}](X) \vee$
$\overline{D}^-[\mathcal{F}](X) < +\infty)$. Ввиду этого, что $\underline{D}^+[-\mathcal{F}](X) = -\overline{D}^+[\mathcal{F}](X) \,\&$
$\& \, \underline{D}^+[\mathcal{G}](1 - X) = \underline{D}^-[\mathcal{F}](X) \,\&\, \underline{D}^+[-\mathcal{G}](1 - X) = -\overline{D}^-[\mathcal{F}](X)$,

требуемое легко доказать с помощью замечания 4 и леммы 1.4 из [4].

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathcal{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция, а $\{\mathcal{F}_m\}_m$ построенная согласно лемме 1 последовательность $[0]$-функций. Мы используем теорему 1 и для всякого НЧ m построим, исходя от $\mathcal{F}_m$, $[0]$-функцию $\mathcal{G}_m$, обладающую описанными там свойствами. Существует $[0]$-функция $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{G} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \mathcal{G}_m$. Легко убедиться в том, что $\mathcal{G}$ обладает требуемыми свойствами.

Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, а q НЧ. Тогда существуют [0]-последовательность [0]-сегментов $\{H_m^q\}_m^{[0]}$, [0]-последовательность систем рациональных сегментов $\{\{a_i^m \Delta b_i^m\}_{i=0}^{s_m}\}_m^{[0]}$ и возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция $\mathcal{G}_q$ такие, что $\mathcal{H}(\{H_m^q\}_m^{[0]})$ &
$\& \forall m (H_m^q \subseteq 0 \Delta 1 \supset (H_m^q \subseteq \bigcup_{i=0}^{s_m} a_i^m \Delta b_i^m) \& \forall i (0 \leq i \leq s_m \supset$
$\supset \Delta(\mathcal{F}, a_i^m \Delta b_i^m) < -2^q \cdot |a_i^m \Delta b_i^m|)) \& \mathcal{G}_q(0) = 0 \&$
$\& \forall a b (a < b \& \neg \exists m (a \Delta b \subseteq (H_m^q)^0) \supset \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) \leq \Delta(\mathcal{G}_q, a \Delta b))$.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция. Тогда существует возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция $\mathcal{H}$ такая, что $\mathcal{H}(0) = 0 \& \mathcal{H}(1) = 1 \& \forall X ((\neg A(\mathcal{F}, X) \&$
$\& \neg {}^*D_{кл}(\mathcal{F}, X) \vee D_{кл}(0, \mathcal{F}, X)) \supset D_{кл}(0, \mathcal{F} * \mathcal{H}^{-1}, \mathcal{O}p[\mathcal{H}](X)))$.

(Мы напомним, что $\mathcal{H}^{-1}$ обратная к $\mathcal{H}$ [0]-функция и $\mathcal{F} * \mathcal{H}^{-1}$ суперпозиция $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}^{-1}$.)

Доказательство. Мы используем лемму 2 и для всякого НЧ q построим для $\mathcal{F}$ (соотв. для $-\mathcal{F}$) [0]-последовательность [0]-сегментов $\{H_m^q\}_m^{[0]}$ (соотв. $\{\overline{H}_m^q\}_m^{[0]}$) и [0]-функцию $\mathcal{G}_q$ (соотв. $\overline{\mathcal{G}}_q$), обладающие описанными там свойствами. Согласно теореме 1 мы построим, исходя от $\mathcal{F}$, [0]-функцию $\mathcal{G}$, удовлетворяющую перечисленным там условиям. Мы определим

$$\mathcal{H}_0 \rightleftharpoons (h_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \mathcal{G} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q+4}} \cdot (\frac{1}{\Delta(\mathcal{G}_q, 0 \Delta 1)} \cdot \mathcal{G}_q + \frac{1}{\Delta(\overline{\mathcal{G}}_q, 0 \Delta 1)} \cdot \overline{\mathcal{G}}_q)).$$

Тогда $\mathcal{H}_0$ возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция и $\mathcal{H}_0(0) = 0 \&$ $\mathcal{H}_0(1) = 1$. Мы опять используем теорему 1 и построим, исходя от $\mathcal{F} * (\mathcal{H}_0)^{-1}$, [0]-функцию $\overline{\mathcal{G}}$, обладающую описанными там свойствами, и определим $\mathcal{H}_1 \rightleftharpoons (h_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathcal{G}})$ .. $\mathcal{H} \rightleftharpoons (\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_0)$.

Тогда $\mathcal{H}$ возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция,

$\mathcal{H}(0)=0 \& \mathcal{H}(1)=1 \& \forall i (0 \le i \le 1 \supset D^{+}_{кл}(+\infty, \mathcal{H}_i, 0) \& D^{-}_{кл}(+\infty, \mathcal{H}_i, 1))$,

$(\mathcal{H}_0)^{-1}, (\mathcal{H}_1)^{-1}$ и $\mathcal{H}^{-1}$ удовлетворяют условию Липшица и, таким образом, $\forall X (D_{кл}(0, \mathcal{F}, X) \supset D_{кл}(0, \mathcal{F} * \mathcal{H}^{-1}, \mathcal{O}p[\mathcal{H}](X)))$.

Пусть X АДЧ, $\neg A(\mathcal{F}, X) \& \neg {}^{*}D_{кл}(\mathcal{F}, X)$. Тогда $X \in 0 \Delta 1 \&$ $\underline{D}[\mathcal{F}](X) < \overline{D}[\mathcal{F}](X) \& \neg\neg(-\infty < \underline{D}[\mathcal{F}](X) \vee \overline{D}[\mathcal{F}](X) < +\infty)$

и, следовательно, $0 < X < 1 \supset D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, X)$.

Пусть, например, $-\infty < \underline{D}[\mathcal{F}](X)$. Тогда

(9) $\underline{D}[\mathcal{F} * (\mathcal{H}_0)^{-1}](\mathcal{O}p[\mathcal{H}_0](X)) = 0$

и не может не существовать НЧ q такое, что $\forall a b (a < X < b \supset \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) \le \Delta(\mathcal{G}_q, a \Delta b))$ и, следовательно,

(10) $\overline{D}[\mathcal{F} * (\mathcal{H}_0)^{-1}](\mathcal{O}p[\mathcal{H}_0](X)) < +\infty$.

Если $D_{кл}(\mathcal{F} * (\mathcal{H}_0)^{-1}, \mathcal{O}p[\mathcal{H}_0](X))$, то - очевидно - $D_{кл}(0, \mathcal{F} * (\mathcal{H}_0)^{-1}, \mathcal{O}p[\mathcal{H}_0](X))$ и, следовательно,

(11) $D_{кл}(0, \mathcal{F} * \mathcal{H}^{-1}, \mathcal{O}p[\mathcal{H}](X))$.

Пусть $\neg D_{кл}(\mathcal{F} * (\mathcal{H}_0)^{-1}, \mathcal{O}p[\mathcal{H}_0](X))$. Тогда $0 < X < 1 \supset D_{кл}(+\infty, \overline{\mathcal{G}}, \mathcal{O}p[\mathcal{H}_0](X))$ и, таким образом, ввиду (9) и (10) и свойств [0]-функции $\mathcal{H}_1$ имеет место (11).

Ввиду того, что (11) эквивалентно своему двойному отрицанию, доказательство закончено.

Ввиду леммы 1 и теоремы 4 для того, чтобы установить верность теоремы 3, достаточно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП $\mathcal{G}$ такая, что $0 \le \mathcal{G} \le 1 \& \forall n\, x^{[n]}(D_{кл}(0, \mathcal{F}, x^{[n]}) \supset \exists y^{[n]}(L^{[n]}(y^{[n]}, \mathcal{F}, x^{[n]}) \& D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, y^{[n]})))$.

Теорема 6. (Ср. [5], стр. 424.) Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, для которой не может не существовать НЧ p такое, что

$$(12)\quad 1 \le p \,\&\, \forall x^{[0]} y^{[0]} (|\mathcal{F}(x^{[0]}) - \mathcal{F}(y^{[0]})| \le p \cdot |x^{[0]} - y^{[0]}|) .$$

Тогда существуют [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{z_k\}_k^{[0]}$ и возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП $\mathcal{G}$, для которых выполнено $\mathfrak{X}(\mathcal{F}, \{z_k\}_k^{[0]})$ ([5]), $0 \le \mathcal{G} \le 1 \,\&\, \forall k\, \mathrm{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{G}, z_k)$ и для любого АДЧ Y такого, что множество $\wedge X(\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) = Y)$ является инфинитным, верно $\mathrm{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{G}, Y)$.

Доказательство. Мы можем без ограничения общности предположить, что $\mathcal{F}(0) = 0 \,\&\, \mathcal{F}(1) = 1 \,\&\, 0 \le \mathcal{F} \le 1$. Мы используем лемму 2 из [5] и построим [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{z_k\}_k^{[0]}$ такую, что $\mathfrak{X}(\mathcal{F}, \{z_k\}_k^{[0]})$, т.е. $\forall a b (\exists k (\mathcal{F}(a) = z_k) \,\&\, (a < b \supset \exists k l (\langle \mathrm{I}, \mathcal{F}\rangle (a \triangle b) = z_k \,\&\, \langle \mathrm{S}, \mathcal{F}\rangle (a \triangle b) = z_l)))$.

а) Пусть $\mathrm{P} \rightleftharpoons l \,\square\, y_1 \triangle y_2$, где l НЧ и y_1 и y_2 [0]-КДЧ такие, что $0 < y_1 < y_2 < 1 \,\&\, \neg \exists k (y_1 = z_k \vee y_2 = z_k) \,\&\, \forall x^{[0]} y^{[0]} (|x^{[0]} - y^{[0]}| \le 2^{-l} \supset |\mathcal{F}(x^{[0]}) - \mathcal{F}(y^{[0]})| < \frac{1}{2} \cdot \min(y_1, 1 - y_2))$.

Тогда существуют рекурсивное множество НЧ $\mathcal{N}_\mathrm{P}$, возрастающая система НЧ $\{i_j\}_{j=0}^{2s+1}$ и РЧ $\sigma[\mathrm{P}]$ такие, что $\forall i (i \in \mathcal{N}_\mathrm{P} \equiv (1 \le i \le 2^l \,\&\, \neg (\langle \sigma, \mathcal{F}\rangle (\frac{i-1}{2^l} \triangle \frac{i}{2^l}) \cap y_1 \triangle y_2 = \emptyset)) \equiv \exists j (1 \le j \le s \,\&\, i_{2j-1} < i \le i_{2j})) \,\&\, i_0 = 0 \,\&\, i_{2s+1} = 2^l \,\&\, \sigma[\mathrm{P}] = \sum_{j=1}^{s} |\frac{i_{2j-1}}{2^l} \triangle \frac{i_{2j}}{2^l}|$.

Пусть t НЧ и $\{c_m \triangle d_m\}_{m=1}^{t}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов такая, что $\forall m (1 \le m \le t \supset y_1 \triangle y_2 \subseteq \langle \sigma, \mathcal{F}\rangle (c_m \triangle d_m))$. Тогда $\forall m (1 \le m \le t \supset \exists j (1 \le j \le s \,\&\, y_1 \triangle y_2 \subseteq \langle \sigma, \mathcal{F}\rangle (c_m \triangle d_m \cap \frac{i_{2j-1}}{2^l} \triangle \frac{i_{2j}}{2^l}))$

и, следовательно, если для НЧ p верно (12), то $\frac{t}{p}\cdot|y_1\vartriangle y_2|\leq\sigma[P]$.

б) Пусть q НЧ. Тогда существуют [0]-последовательность дизъюнктных [0]-сегментов $\{H_n^q\}_n^{[0]}$ и [0]-КДЧ v_q такие, что

(13) $$\partial_\lambda(H_0^q)=0\ \&\ \partial_n(H_1^q)=1\ \&\ \forall n(H_n^q\subseteq 0\vartriangle 1)\ \&\ \forall k(0<x_k<1\supset \exists n(x_k\in(H_n^q)^0))\ \&\ v_q<2^{-q}\ \&\ (\sum_{n=0}^{m}|H_n^q|\xrightarrow[m\to\infty]{[0]}v_q).$$

Мы построим [0]-последовательности НЧ $\{m_\ell\}_\ell^{[0]}$, $\{\sigma_{1,n}\}_n^{[0]}$ и $\{\sigma_{2,n}\}_n^{[0]}$ и [0]-сегментов $\{L_{0,n}\}_n^{[0]}$, $\{L_{1,n}\}_n^{[0]}$ и $\{L_{2,n}\}_n^{[0]}$ такие, что $\forall \ell x^{[0]}y^{[0]}((|x^{[0]}-y^{[0]}|\leq 2^{-m_\ell}\supset$ $\supset|\mathcal{F}(x^{[0]})-\mathcal{F}(y^{[0]})|<2^{-\ell-1}\cdot\min\limits_{0\leq n\leq \ell+1}|H_n^q|)\ \&\ m_\ell<m_{\ell+1})\ \&\ \forall n(H_{n+2}^q\subseteq$ $\subseteq L_{0,n}\ \&\ \neg\exists m(m\leq n+1\ \&\ H_m^q\subseteq L_{0,n})\ \&\ \sigma_{1,n}\leq n+1\ \&\ \sigma_{2,n}\leq n+1\ \&$ $\&\ \partial_m(H_{\sigma_{1,n}}^q)=\partial_\lambda(L_{0,n})\ \&\ \partial_m(L_{0,n})=\partial_\lambda(H_{\sigma_{2,n}}^q)\ \&\ (L_{1,n}\equiv\partial_\lambda(L_{0,n})\vartriangle$ $\vartriangle\partial_\lambda(H_{n+2}^q))\ \&\ (L_{2,n}\equiv\partial_n(H_{n+2}^q)\vartriangle\partial_n(L_{0,n})))$.

Существуют [0]-последовательности РЧ $\{a_{1,n}\}_n^{[0]}$ и $\{a_{2,n}\}_n^{[0]}$ такие, что

$$a_{1,0}=0\ \&\ a_{2,1}=1\ \&\ a_{2,0}=\frac{1}{2}\cdot(1-\sigma[m_0\,\square\,L_{0,0}])\ \&\ a_{1,1}=1-a_{2,0}\ \&$$
$$\forall n i(1\leq i\leq 2\supset a_{i,n+2}=a_{3-i,\sigma_{i,n}}+(-1)^{3-i}\cdot\sigma[m_{n+1}\,\square\,L_{i,n}]).$$

Тогда $\forall \ell k(a_{1,\ell}<a_{2,\ell}\ \&\ (\partial_m(H_k^q)<\partial_\lambda(H_\ell^q)\supset a_{2,k}<a_{1,\ell}))$.

Следовательно, согласно замечанию 4 из [9] можно построить $\{F_n\}_n\in L_1$ такое, что θ, $\theta\rightleftharpoons[\{F_n\}_n, 0, 1]$, возрастающий объект типа φ и для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $0\vartriangle 1$ (см. [3], стр. 58) верно

$$\forall\ell(x^{[0]}\in H_\ell^q\supset Val(a_{1,\ell}+\frac{x^{[0]}-\partial_\lambda(H_\ell^q)}{|H_\ell^q|}\cdot(a_{2,\ell}-a_{1,\ell}),\theta,x^{[0]}))\ .$$

Можно доказать, что существует возрастающая на $0\vartriangle 1$ [0]-функция $\mathcal{G}_q$ такая, что

$\mathcal{G}_q(0)=0\,\&\,\mathcal{G}_q(1)=1\,\&\,\forall Y(0<Y<1\,\&\,\neg D_{кл}(+\infty,\mathcal{G}_q,Y)\supset$
$\neg\neg\exists m\forall x_0^{[0]}x_1^{[0]}y_0^{[0]}y_1^{[0]}(x_0^{[0]}<Y<x_1^{[0]}\,\&\,\forall i(0\le i\le 1\supset$
$\supset Val(y_i^{[0]},\theta,x_i^{[0]}))\supset 0<y_1^{[0]}-y_0^{[0]}<m\cdot(x_1^{[0]}-x_0^{[0]})))$.

в) Мы построим возрастающую всюду определенную [0]-равномерно непрерывную [0]-КФДП $\overline{\mathcal{G}}$, для которой выполнено

(14) $0\le\overline{\mathcal{G}}\le 1\,\&\,\forall Y(\forall q\neg\neg\exists m(Y\in H_m^q)\supset D_{кл}(+\infty,\overline{\mathcal{G}},Y))$.

Ввиду а) и б) для завершения доказательства достаточно определить $\mathcal{G}\rightleftharpoons(\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathcal{G}}+\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{2^{q+2}}\cdot\mathcal{G}_q)$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ монотонная [0]-функция. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП $\mathcal{G}$ такая, что
$0\le\mathcal{G}\le 1\,\&\,\forall X(D_{кл}(0,\mathcal{F},X)\supset D_{кл}(+\infty,\mathcal{G},\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)))$.

<u>Доказательство</u>. Мы можем без ограничения общности предположить, что $\mathcal{F}$ неубывающая [0]-функция и $\mathcal{F}(0)=0\,\&\,\mathcal{F}(1)=$ $=1\,\&\,0\le\mathcal{F}\le 1$. Мы построим [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{x_k\}_k^{[0]}$, для которой верно $\mathcal{Z}(\mathcal{F},\{x_k\}_k^{[0]})$ (лемма 2 из [5]).

а) Пусть q НЧ. Тогда легко построить [0]-последовательности дизъюнктных [0]-сегментов $\{H_m^q\}_m^{[0]}$ и $\{L_m^q\}_m^{[0]}$ и [0]-КДЧ v_q такие, что (13) и $\partial_л(L_0^q)=0\,\&\,\partial_m(L_1^q)=$ $=1\,\&\,\forall n(\mathcal{F}(\partial_m(L_m^q))=\partial_m(H_m^q)\,\&\,\mathcal{F}(\partial_л(L_m^q))=\partial_л(H_m^q))$.
Следовательно, $\forall n(L_n^q\subseteq 0\Delta 1)\,\&\,\forall a(0<a<1\supset\exists m(a\in(L_m^q)^0))$ и, таким образом, $\overline{\mathcal{K}}(\{L_n^q\}_n^{[0]})$. Ясно, что $[\mathcal{F},\{L_n^q\}_m^{[0]}]$ возрастающая на $0\Delta 1$ [0]-функция и $\forall X(0<X<1\,\&\,\neg\exists m(X\in$ $\in L_n^q)\,\&\,D_{кл}(0,\mathcal{F},X)\supset D_{кл}(+\infty,[\mathcal{F},\{L_n^q\}_m^{[0]}]^{-1},\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)))$.

б) Легко построить возрастающую всюду определенную

[0]-равномерно непрерывную [0]-КФДП $\overline{\mathcal{G}}$ такую, что (14).
Для завершения доказательства достаточно определить

$$\mathcal{G} \rightleftharpoons \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathcal{G}} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q+2}}\cdot[\mathcal{F},\{L_n^q\}_n^{[0]}]^{-1}\right).$$

<u>Лемма 4</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП $\overline{\mathcal{G}}$ такая, что
$0 \leq \overline{\mathcal{G}} \leq 1 \,\&\, \forall X (D_{кл}(0,\mathcal{F},X) \supset D_{кл}(+\infty,\overline{\mathcal{G}},\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)))$.

<u>Доказательство</u>. Мы используем теорему 6 и построим, исходя от $\mathcal{F}$, [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{x_k\}_k^{[0]}$ и [0]-КФДП $\mathcal{G}$, обладающие описанными там свойствами. Существует последовательность монотонных [0]-функций $\{\mathcal{F}_k\}_k$, которая для любого рационального сегмента $a \vartriangle b$, $a \vartriangle b \subseteq 0 \vartriangle 1$, содержит [0]-функции $\mathcal{I}\langle\mathcal{F}, a \vartriangle b\rangle$ и $-\mathcal{I}\langle-\mathcal{F}, a\vartriangle b\rangle$. Согласно лемме 3 существует последовательность возрастающих всюду определенных [0]-равномерно непрерывных [0]-КФДП $\{\mathcal{G}_k\}_k$ такая, что

$\forall k (0 \leq \mathcal{G}_k \leq 1 \,\&\, \forall X (D_{кл}(0,\mathcal{F}_k,X) \supset D_{кл}(+\infty,\mathcal{G}_k,\mathcal{O}p[\mathcal{F}_k](X))))$.

Мы построим всюду определенную [0]-КФДЧ $\overline{\mathcal{G}}$ такую, что $\overline{\mathcal{G}} = \left(\frac{1}{2}\cdot\mathcal{G} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}}\cdot\mathcal{G}_k\right)$. Тогда $0 \leq \overline{\mathcal{G}} \leq 1$ и $\overline{\mathcal{G}}$ является возрастающей и [0]-равномерно непрерывной.

Пусть для АДЧ X верно $D_{кл}(0,\mathcal{F},X)$.

Если $D_{кл}(+\infty,\mathcal{G},\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X))$, то

(15) $$D_{кл}(+\infty,\overline{\mathcal{G}},\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)).$$

Пусть $\neg D_{кл}(+\infty,\mathcal{G},\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X))$. Тогда $0 < X < 1 \,\&\, \neg\exists l (\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) = x_l)$ и не может не существовать рациональный сегмент $a \vartriangle b$, для которого выполнено

$0 \leq a < X < b \leq 1 \,\&\, \forall Y (Y \in a \vartriangle b \,\&\, \mathcal{O}p[\mathcal{F}](Y) =$

$= \mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) \supset Y = X) \& 0 < (\mathcal{F}(b) - \mathcal{O}p[\mathcal{F}](X)) \cdot (\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) - \mathcal{F}(a))$. Следовательно, $\neg\neg\exists k(\mathcal{O}p[\mathcal{F}_k](X) = \mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) \& D_{кл}(0, \mathcal{F}_k, X))$ и тогда (15).

Ввиду того, что (15) эквивалентно своему двойному отрицанию, доказательство закончено.

Доказательство теоремы 5. 1) Пусть n НЧ и $x^{[n]}$ $[n]$-КДЧ такие, что $D_{кл}(0, \mathcal{F}, x^{[n]})$. Тогда согласно лемме 1.11 из [4] верно $\exists y^{[n]} L^{[n]}(y^{[n]}, \mathcal{F}, x^{[n]})$. Для любой [0]-последовательности [0]-сегментов $\{H_m\}_m^{[0]}$ такой, что $\mathcal{H}(\{H_m\}_m^{[0]}) \& \neg\exists m(x^{[n]} \in H_m)$, очевидно выполнено $D_{кл}(0, [\mathcal{F}, \{H_m\}_m^{[0]}], x^{[n]}) \& \exists y^{[n]}(L^{[n]}(y^{[n]}, [\mathcal{F}, \{H_m\}_m^{[0]}], x^{[n]}) \& L^{[n]}(y^{[n]}, \mathcal{F}, x^{[n]}))$.

2) Ввиду леммы 4 из [7] и 1) существует последовательность [0]-функций, удовлетворяющих условию Липшица, $\{\mathcal{F}_m\}_m$ такая, что $\forall n x^{[n]}(D_{кл}(0, \mathcal{F}, x^{[n]}) \supset \neg\neg\exists m(L^{[n]}(\mathcal{O}p[\mathcal{F}_m](x^{[n]}), \mathcal{F}, x^{[n]}) \& D_{кл}(0, \mathcal{F}_m, x^{[n]})))$.

Для любого НЧ m мы используем лемму 4 и построим, исходя от $\mathcal{F}_m$, [0]-КФДП $\mathcal{G}_m$, обладающую описанными там свойствами. Для завершения доказательства достаточно построить всюду определенную [0]-КФДП $\mathcal{G}$ такую, что
$$\mathcal{G} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \mathcal{G}_m .$$

Замечание 5. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция, а ξ и η [0]-ПЧ такие, что $\xi \in \Pi_1^{[0]} \& \mathcal{O}p[\mathcal{F}](\xi) \in \Pi_2^{[0]} \& \eta \in \Pi_2^{[0]} \& \mathcal{O}p[\mathcal{F}](\eta) \in \Pi_1^{[0]}$. Тогда согласно лемме 2 из [7], лемме 1, теоремам 1 - 4 и замечанию 3

а) $\underline{D}^-[\mathcal{F}](\xi)$, $\overline{D}^-[\mathcal{F}](\xi)$, $\underline{D}^+[\mathcal{F}](\xi)$ и $\overline{D}^+[\mathcal{F}](\xi)$ бесконечны и $\neg\neg(D_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee D_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee {}^*B_1(\mathcal{F}, \xi) \vee {}^*B_2(\mathcal{F}, \xi) \vee U(\mathcal{F}, \xi))$,

б) $\neg\neg(\mathcal{D}_{кл}(0,\mathcal{F},\eta) \vee \mathcal{B}_1(\mathcal{F},\eta) \,\&\, \underline{D}^+[\mathcal{F}](\eta) =$
$= 0 \vee \mathcal{B}_2(\mathcal{F},\eta) \,\&\, \underline{D}^-[\mathcal{F}](\eta) = 0 \vee \mathcal{U}(\mathcal{F},\eta))$.

Пример. Существует псевдоравномерно непрерывная [0]-функция $\mathcal{F}$ [0]-слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ (см. [4], стр. 63) такая, что

$$\mathcal{F}(0) = 0 \,\&\, \mathcal{F}(1) = 1 \,\&\, 0 \leq \mathcal{F} \leq 1 \,\&\, \forall y^{[0]}(0 < y^{[0]} < 1 \supset$$
$$\neg\neg\exists x^{[0]}(\mathcal{F}(x^{[0]}) = y^{[0]} \,\&\, 0 < \underline{D}^-[\mathcal{F}](x^{[0]}) < \underline{D}^+[\mathcal{F}](x^{[0]}) <$$
$$\overline{D}^-[\mathcal{F}](x^{[0]}) < \overline{D}^+[\mathcal{F}](x^{[0]}) < +\infty))\,.$$

Л и т е р а т у р а

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] GARG K.M.: An analogue of Denjoy's theorem, Ganita 12 (1961), 9-14.

[3] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978), 15-60.

[4] ДЕМУТ О.: Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной, Acta Univ. Carolinae - Mathem. et Physica 19(1978), 61-96.

[5] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), Comment. Math. Univ. Carolinae 14 (1973), 421-439.

[6] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[7] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[8] ДЕМУТ О.: О псевдодифференцируемости равномерно непрерывных конструктивных функций на конструктивных действительных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 19(1978), 319-333.

[9] ДЕМУТ О., ПОЛИВКА Й.: О представимости линейных функционалов в пространстве шифров равномерно непрерывных на сегменте $0 \vartriangle 1$ конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979), 765-780.

Matematicko-fyzikální fakulta

Universita Karlova

Malostran. nám. 25, Praha 1

Československo

(Oblatum 28.1. 1980)