Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Siegfried Hahn

Ein Störungssatz für positive Eigenwerte kondensierender mengenwertiger Abbildungen in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 20 (1979), No. 3, 417--430

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105940`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20,3 (1979)

EIN STÖRUNGSSATZ FUR POSITIVE EIGENWERTE KONDENSIERENDER MENGENWERTIGER ABBILDUNGEN IN LOKALKONVEXEN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

Siegfried HAHN

Inhalt: In Fortsetzung der CMUC-Arbeit [2] wird eine topologische Störungsaussage zu einem Eigenwertsatz aus [4] für kondensierende mengenwertige Abbildungen bewiesen, die auch für den Spezialfall punktwertiger kompakter Abbildungen das entsprechende Resultat in [2] verschärft. Auf der Grundlage des bekannten Fixpunktsatzes von Brouwer-Kakutani erfolgt der Beweis unter Verwendung eines Homotopieerweiterungssatzes des Verfassers.

Schlüsselwörter: Eigenwerte, Störungstheorie für nichtlineare Operatoren, kondensierende und kompakte mengenwertige Abbildungen, approximationswesentliche Abbildungen, Homotopieerweiterungenssatz.

AMS: 47H10

---

1. Begriffe und Bezeichnungen. Alle betrachteten topologischen Räume seien in dieser Arbeit separiert, alle topologischen Vektorräume reell und separiert. Für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes bezeichnen die Symbole $\bar{A}$ bzw. ∂A die Abschliessung bzw. den Rand von A. Ist B eine Teilmenge eines Vektorraumes, so sei $co(B)$ die konvexe Hülle von B. Sei K eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraumes E. Dann bezeichnen wir stets mit $\mathfrak{K}(K)$ das System aller kompakten, konvexen Teilmengen von K. Eine Abbildung F von einer Teilmenge $X \subset E$ in $\mathfrak{K}(K)$ heisst

__nach__ __oben__ __halbstetig__ wenn für jedes x aus X folgendes gilt: Zu jeder offenen Teilmenge G von K mit $F(x) \subset G$ existiert eine Nullumgebung U aus E mit $F((X \cap (U+x)) \subset G$. Die Abbildung $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ heisse <u>kompakt</u>, wenn sie nach oben halbstetig und $F(X)$ relativ kompakt ist.

Sei $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen eines lokalkonvexen Raumes E, $(A, \leqq)$ eine halbgeordnete Menge und $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(1) Mit M gehört auch $co(M)$ zu $\mathcal{C}$ und es gilt $\psi(M) = \psi(co(M))$

(2) Mit M gehört auch jede Teilmenge $N \subset M$ zu $\mathcal{C}$ und es gilt $\psi(N) \leqq \psi(M)$.

(3) Für jedes x aus E und M aus $\mathcal{C}$ gehört $M \cup \{x\}$ zu $\mathcal{C}$ und es gilt $\psi(M \cup \{x\}) = \psi(M)$.

(4) Für a,b aus A existiert stets das Supremum $\sup(a,b)$ in A, mit M und N gehört auch $M \cup N$ zu $\mathcal{C}$ und es gilt $\psi(M \cup N) = \sup(\psi(M), \psi(N))$.

Dann nennen wir die Abbildung ψ <u>Nichtkompaktheitsmass</u> in E. Eine nähere Untersuchung von Nichtkompaktheitsmassen wird z.B. in [12] vorgenommen.

Sei E ein lokalkonvexer Raum, M eine Teilmenge von E und K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E. Weiter sei ψ ein Nichtkompaktheitsmass in E und $F: M \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ eine nach oben halbstetige Abbildung. F heisst <u>(ψ)-kondensierend</u>, wenn aus der Beziehung $\psi(N) \leqq \psi(F(N))$ $(N \subset M)$ die relative Kompaktheit von N folgt. Wir verweisen z.B. auf die exzellente Arbeit [1], die sich ausführlich mit kondensierenden mengenwertigen Abbildungen beschäftigt und wichtige Beispiele enthält.

2. <u>Approximationswesentliche kompakte Abbildungen</u>

Definition: Es seien E ein topologischer Vektorraum, K eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E, X und Y nichtleere, abgeschlossene Teilmengen von K mit $X \subset Y$ sowie $F:X \longrightarrow \mathcal{R}(K)$ eine kompakte Abbildung mit $x \notin F(x)(x \in X)$. F heisse approximationsunwesentlich bezüglich $(Y, \mathcal{R}(K))$, wenn zu jeder Nullumgebung V aus E ein endlichdimensionaler Teilraum E_V von E mit $Y \cap E_V \neq \emptyset$ und eine kompakte Abbildung F_V: $:X \longrightarrow \mathcal{R}(K \cap E_V)$ derart existieren, dass folgendes gilt:

(i) $F_V(x) \subset F(x) + V \quad (x \in X)$

(ii) $F_V|X \cap E_V$ hat eine kompakte Erweiterung $F_V:Y \cap E_V \rightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{R}(K \cap E_V)$ mit $y \notin F_V(y) \quad (y \in Y)$.

Falls F nicht approximationsunwesentlich ist, so nennen wir F approximationswesentlich bezüglich $(Y, \mathcal{R}(K))$.

Bekanntlich ist in einem lokalkonvexen Raum die Bedingung (i) für eine kompakte Abbildung F stets erfüllbar. Die Definition wurde für punktwertartige Abbildungen und K=E erstmals in [3] gegeben. In der vorliegenden allgemeinen Fassung führten wir sie in [5] ein.

Bemerkung 1 ([5], Seite 38): Es seien E ein lokalkonvexer Raum un X,Y,K,F wie in der Definition erklärt. Hat F eine kompakte Erweiterung $F:Y \longrightarrow \mathcal{R}(K)$ mit $y \notin F(y) \quad (y \in Y)$, so ist F approximationsunwesentlich bezüglich $(Y, \mathcal{R}(K))$.

Auf elementare Weise lässt sich folgender Homotopieerweiterungssatz beweisen (für K=E und punktwertige Abbildungen siehe [6] für den allgemeinen Fall [5]):

Satz 1: Es seien E ein topologischer Vektorraum, K eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E, X und Y nichtleere, abgeschlossene Teilmengen von K mit $X \subset Y$ sowie

$F:X \longrightarrow \mathcal{R}(K)$ und $G:X \longrightarrow \mathcal{R}(K)$ kompakte Abbildungen mit $x \notin F(x)$, $x \notin G(x)$ $(x \in X)$. Es existiere eine kompakte Abbildung $H:X \times [0,1] \rightarrow \mathcal{R}(K)$ mit $H(x,0)=F(x)$, $H(x,1)=G(x)$, $x \notin H(x,t)$ $(x \in X, t \in [0,1])$. Sei G approximationswesentlich bezüglich $(Y, \mathcal{R}(K))$. Dann ist auch F approximationswesentlich bezüglich $(Y, \mathcal{R}(K))$.

Der Beweis dieses Satzes verwendet einfache Approximationsargumente und stützt sich auf den klassischen Erweiterungssatz von Tietze, ohne jedoch den grundlegenden und oft verwendeten Erweiterungssatz von Dugundji für unendlichdimensionale Banachräume zu benutzen. Ferner bemerken wir, dass Satz 1 ohne den Begriff des Abbildungsgrades hergeleitet wird. Als einfache Folgerung von Satz 1 lässt sich die nächste Aussage beweisen.

Bemerkung 2 (siehe [5], S. 49): Es seien E ein lokalkonvexer Raum, X,Y,K wie in Satz 1 erklärt sowie $G:X \longrightarrow \mathcal{R}(K)$ approximationsunwesentlich bezüglich $(Y, \mathcal{R}(K))$. Es existiere ein endlichdimensionaler linearer Teilraum E_1 von E mit $G(X) \subset E_1$. Dann gibt es einen endlichdimensionalen linearen Teilraum E_0 von E derart, dass $X \cap E_0 = \emptyset$ gilt und $G|X \cap E_0$ eine kompakte Erweiterung $G:Y \cap E_0 \longrightarrow \mathcal{R}(K \cap E_0)$ mit $y \notin G(y)$ $(y \in Y \cap E_0)$ besitzt.

Grundlegend für die Anwendung von Satz 1 auf Fixpunkt und Eigenwertaussagen ist das folgende aus dem Fixpunktsatz von Brouwer-Kakutani entstehende Resultat.

Satz 2: Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $o \in K$. Weiter sei $a \in K \setminus \partial W$ und $G(x) = \{a\}$

$(x \in \partial W \cap K)$. G ist bezüglich $(W \cap K, \mathcal{R}(K))$ genau dann approximationswesentlich, wenn $a \in W$ gilt.

Beweis: Sei $a \notin W$. Wir setzen $G(y) = \{a\}$ $(y \in W \cap K)$. Es gilt $y \notin G(y)$ $(y \in W \cap K)$. Nach Bemerkung 1 ist damit G approximationsunwesentlich bezüglich $(W \cap K, \mathcal{R}(K))$. Sei $a \in W$. Angenommen, G ist approximationsunwesentlich bezüglich $(W \cap K, \mathcal{R}(K))$. Nach Bemerkung 2 existiert dann ein endlichdimensionaler linearer Teilraum E_0 von E mit $\partial W \cap K \cap E_0 = \emptyset$ derart, dass $G \setminus \partial W \cap K \cap E_0$ eine kompakte Erweiterung $\tilde{G}: W \cap K \cap E_0 \to \mathcal{R}(K \cap E_0)$ mit $y \notin G(y)$ $(y \in W \cap K \cap E_0)$ hat. Wir setzen

$$T(x) = \begin{cases} \tilde{G}(x) & \text{für } x \in E \cap K \cap E_0 \\ \{a\} & \text{für } x \in (K \cap E_0) \setminus W \end{cases}$$

Offenbar ist T eine kompakte Abbildung von $K \cap E_0$ in $\mathcal{R}(K \cap E_0)$. Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer-Kakutani [8] existiert ein $x_0 \in K \cap E_0$ mit $x_0 \in T(x_0)$. Wegen der Fixpunktfreiheit von G muss $x_0 = a$ gelten, also auch $a = x_0 \notin W$. Dies widerspricht der Voraussetzung $a \in W$.

3. <u>Störungsaussagen</u>. Eine wichtige Fragestellung der Funktionalanalysis, vor allem unter Berücksichtigung ihrer Anwendungen, ist das Problem der Stabilität der Lösungen von Operatorgleichungen bei "kleinen" Störungen des betrachteten Operators. Während im linearen Fall bekanntlich hierzu abgerundete Ergebnisse vorliegen, sind für nichtlineare Operatorengleichungen bisher nur relativ wenige Einzelaussagen bekannt (siehe die diesbezüglichen Literaturangaben in [11], [21]). Ein äusserst geringer Anteil dieser Aussagen bezieht sich dabei auf die in den letzten 10 Jahren sehr intensiv untersuchten kondensierenden Abbildungen (s. z.B. [7]). Wir

beweisen in diesem Abschnitt eine Störungsaussage für kondensierende Abbildungen, die keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen fordert, sondern von rein topologischer Natur ist. Derartige Störungssätze bewies der Verfasser in [2] für kompakte Abbildungen in allgemeinen topologischen Vektorräumen. In [11] zeigte Riedrich, dass in vollständigen, metrisierbaren, lokalkonvexen Räumen gewisse Ergebnisse aus [2] unter schwächeren Voraussetzungen gültig bleiben. Wir zeigen hier, dass diese schwächeren Voraussetzungen auch die Gültigkeit der Störungsaussagen in allgemeinen (nicht notwendig metrisierbaren, vollständigen, lokalkonvexen) topologischen Vektorräumen sichern und sogar für mengenwertige kondensierende Abbildungen die entsprechenden Aussagen liefern.

Der Verfasser bewies in [4] die folgende Existenzaussage für Eigenwerte kondensierender mengenwertiger Abbildungen in allgemeinen (nicht notwendig metrisierbaren) lokalkonvexen Räumen (in [4] formulierten wir das Resultat für die unter unseren Voraussetzungen geringfügig allgemeinere Klasse der "konzentrierenden Abbildungen").

<u>Satz 3:</u> Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $o \in K$ und $\partial W \cap K \neq \emptyset$. Weiter sei $F: \partial W \cap K \to$ $\to \mathcal{R}(K)$ eine bezüglich eines Nichtkompaktheitsmasses ψ kondensierende Abbildung. Es existiere ein $y_0 \in K \setminus W$ derart, dass $x \notin tF(x)+(1-t)y_0$ $(x \in \partial W \cap K, t \in [0,1])$ gilt. Dann gibt es ein $x_0 \in \partial W \cap K$ und ein $t_0 \in (0,1)$, so dass $x_0 \in t_0 F(x_0)$ gilt.

Als Hauptergebnis unserer Note beweisen wir nun einen zu obigem Existenzsatz gehörigen Störungssatz.

Theorem: Es seien alle Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Die somit lösbare Gleichung $x \in tF(x)$ $(x \in \partial W \cap K)$, $t \in (0,1))$ habe genau eine Lösung (x_0, t_0). Das Nichtkompaktheitsmass ψ besitze einen total geordneten Wertebereich. Sei U eine beliebige Nullumgebung aus E und ε eine beliebige positive Zahl. Dann existiert eine Nullumgebung V aus E, so dass jede kondensierende Abbildung $G: \partial W \cap K \longrightarrow \mathcal{R}(K)$ mit

$$(*) \qquad G(x) \subset F(x) + V \quad (x \in (\partial W \cap K) \cap (x_0 + U))$$

ein $x_1 \in \partial W \cap K$, und ein $t_1 \in (0,1)$ besitzt, für die $x_1 \in t_1 G(x_1)$ und $x_1 \in x_0 + U$ sowie $|t_1 - t_0| \leq \varepsilon$ gilt.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir U als abgeschlossen und $2\varepsilon < \min(t_0, 1-t_0)$ voraussetzen. Dann gilt $0 < t_0 - \varepsilon < t_0 + \varepsilon < 1$. Sei

$$Y = \{x \in \partial W \cap K,\ x \in x_0 + U\} \times \{t \in [0,1],\ |t-t_0| \leq \varepsilon\}.$$

X bezeichne den Rand von Y im topologischen Raum $(\partial W \cap K) \times [0,1]$. Es gilt nach Voraussetzung $x \in tF(x)$ $(x \in \partial W \cap K$, $t \in [0,1])$ genau dann, wenn $x = x_0$ und $t = t_0$ ist. Wegen der Abgeschlossenheit von X und der Relation $(x_0, t_0) \notin X$ existiert eine sternförmige Nullumgebung V (es gilt also $[0,1]\, V \subset V$) aus E mit $(x - tF(x)) \cap V = \emptyset$ $((x,t) \in X)$. Sei nun $G: \partial W \cap K \longrightarrow \mathcal{R}(K)$ eine kondensierende Abbildung mit der Eigenschaft $(*)$. Wir setzen

$$Y_0 = \{(x,t) \in Y,\ x \in stF(x) + (1-s)tG(x) \text{ für ein } s \in [0,1]\}.$$

Es gilt $X \cap Y_0 = \emptyset$, denn im anderen Fall existiert ein $(x,t) \in X$ und ein $s \in [0,1]$ mit $x \in stF(x) + (1-s)tG(x) \subset stF(x) + (1-s)t(F(x) + V) \subset tF(x) + V$ im Widerspruch zur Wahl von V. Weil die Abbildungen F und G nach oben halbstetig sind, erkennt man leicht die Abgeschlossenheit von Y_0 (in Y). Wir zeigen, dass Y_0 sogar kompakt ist. Dazu sei $A = \{x \in \partial W \cap K, x \in [0,1] sF(x)+[0,1](1-s)G(x)$ für ein $s \in [0,1]\}$. Es gilt $A \subset co([0,1]F(A) \cup \cup [0,1]G(A)) \subset co(co(F(A) \cup \{o\}) \cup co(G(A) \cup \{o\}))$. Aus den Eigenschaften (1),(2) und (3) in der Definition des Nichtkompaktheitsmasses ψ folgt $\psi(A) = \sup(\psi(F(A)), \psi(G(A)))$. Weil der Wertebereich von ψ total geordnet ist, gilt $\psi(A) \leqq \leqq \psi(F(A))$ oder $\psi(A) \leqq \psi(G(A))$. In beiden Fällen folgt die relative Kompaktheit von A, denn F und G sind (ψ)-kondensierend. Damit ist $\bar{A} \times [0,1]$ eine kompakte Teilmenge des Raumes $(\partial W \cap K) \times [0,1]$. Wegen $Y_0 \subset A \times [0,1]$ ist dann auch Y_0 kompakt in $(\partial W \cap K) \times [0,1]$ und damit auch in Y. Der topologische Raum Y ist als Teilraum eines vollständig regulären topologischen Raumes selbst vollständig regulär. X ist eine abgeschlossene und Y_0 eine kompakte Teilmenge von Y mit $X \cap Y_0 = \emptyset$. Daher existiert eine stetige Abbildung $f: Y \times [0,1]$ mit $f(x,t) = 0$ $((x,t) \in Y_0)$ und $f(x,t) = 1$ $((x,t) \in X)$. Es sei

$$H(x,t) = \begin{cases} tF(x) & ((x,t) \in (\partial W \cap K) \times [0,1]) \setminus Y \\ f(x,t)tF(x)+(1-f(x,t))tG(x) & ((x,t) \in Y) \end{cases}.$$

Wegen $f(x,t) = 1$ für $(x,t) \in X$ ist $H: (\partial W \cap K) \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(K)$ nach oben halbstetig.

Weiter gilt für jede Teilmenge M von $\partial W \cap K$ die Relation

$$H(M \times [0,1]) \subset co([0,1]F(M) \cup [0,1]G(M) \subset co(co(F(M) \cup \{o\}) \cup \cup co(G(M) \cup \{o\})).$$

Aus den Eigenschaften von ψ folgt $\psi(H(M \times [0,1]) = = \sup(\psi(F(M), \psi(G(M)))$. Für jedes nichtkompakte M ergibt sich daraus die Beziehung $\psi(H(M \times [0,1])) < \psi(M)$, weil F und G bezüglich ψ kondensierend sind. Eine bekannte Eigenschaft kondensierender Abbildungen sichert dann die Existenz einer abgeschlossenen, konvexen Teilmenge S von E mit $o \in S$, $y_0 \in S$, $\partial W \cap K \cap S = \emptyset$, $H((\partial W \cap K \cap S) \times [0,1]) \subset S$, so dass $H((\partial W \cap K \cap S) \times [0,1])$ relativ kompakt ist (siehe zum Beispiel [5], S.9), Wir bezeichnen mit F_0 und G_0 die Einschränkung von F bzw. G auf $\partial W \cap K \cap S$ sowie mit H_0 die Einschränkung von H auf $(\partial W \cap K \cap S) \times [0,1]$. Sei $T(x) = \{o\} (x \in \partial W \cap K \cap S)$. F_0, T_0 und H_0 sind kompakte Abbildungen von $\partial W \cap K \cap S$ bzw. $(\partial W \cap K \cap S) \times$ $\times [0,1]$ in $\mathcal{R}(K \cap S)$. Wir nehmen an, dass $x \notin H(x,t)$ gilt. Da $K \cap S$ abgeschlossen und konvex ist, lässt sich Satz 1 anwenden. Nach Satz 2 ist T approximationswesentlich bezüglich $(W \cap K \cap S, \mathcal{R}(K \cap S))$. Wegen Satz 1 gilt das dann auch für F_0. Sei y_0 ein nach Voraussetzung existierendes Element aus $K \setminus W$ mit $x \notin tf(x) + (1-t)y_0$ $(x \in \partial W \cap K,\ t \in [0,1])$ und $L(x,t) =$ $= t_0F(x)+(1-t)y_0$ $(x \in \partial W \cap K \cap S, t \in [0,1])$. L ist eine kompakte Abbildung von $(\partial W \cap K \cap S) \times [0,1]$ in $\mathcal{R}(K \cap S)$, da y_0 zu S gehörte. Wegen $x \notin L(x,t)$ $(x \in \partial W \cap K \cap S, t \in [0,1])$, $y_0 \in (K \cap S) \setminus W$ und Satz 2 folgt aus Satz 1, dass F_0 approximationsunwesentlich bezüglich $(W \cap K \cap S, \mathcal{R}(K \cap S))$ ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass es ein $x_1 \in \partial W \cap K \cap S$ und ein $t_1 \in [0,1]$ gibt, so dass $x_1 \in H(x_1,t_1)$ gilt. Nach Voraussetzung ist $x \notin tF(x)$ für $(x,t) \notin Y$. Folglich muss (x_1,t_1) zu Y gehören. Wegen $f(x_1,t_1) =$ $= s_1 \in [0,1]$ gilt sogar $(x_1,t_1) \in Y_0$ und damit $f(x_1,t_1)=0$. Daraus folgt $x_1 \in t_1G(x_1)$. Mit $(x_1,t_1) \in Y$ gilt $x_1 \in x_0+U$ sowie $|t_1-t_0| \leq \varepsilon$. Damit ist das Theorem bewiesen.

Sei der lokalkonvexe Raum E quasivollständig, der Wertebereich von ψ ein Kegel eines Vektorraumes (mit der Spitze im Nullelement o) und $\psi(M) = o$ genau dann, wenn M präkompakt ist (was für die gebräuchlichsten Nichtkompaktheitsmasse erfüllt ist). Dann kann man auf die Voraussetzung des Theorems, dass der Wertebereich von ψ total geordnet is, verzichten, falls F und G für ein $k<1$ zwei (ψ,k)-kondensierende Abbildungen sind ($\psi(F(M)\leqq k\,\psi(M)$, $(G(M)\leqq k\,\psi(M)$ für $M\subset\partial W\cap K$). Speziell gilt das Theorem für kompakte Abbildungen, denn solche sind zum Beispiel bezüglich des einfachen Nichtkompaktheitsmasses ψ, definiert durch $\psi(M)=0$, falls $M\subset E$ präkompakt is und $\psi(M)=1$, falls M nicht präkompakt ist, (ψ)-kondensierend. Dieser Spezialfall des Theorems ist also eine Ubertragung des bereits erwähnten Satzes von Riedrich [11] auf mengenwertige Abbildungen in nicht notwendig metrisierbaren lokalkonvexen Räumen. Für punktwertige kompakte Abbildungen ist unser Theorem sogar für noch allgemeinere topologische Vektorräume gültig, nämlich für sogenannte zulässige Räume (s. z.B. [2]), denn Satz 2 gilt für derartige Abbildungen in zulässigen Räumen. Damit kann also die Voraussetzung des Störungssatzes 3 unserer Arbeit [2] durch die Forderung $(*)$ des Theorems (formuliert für punktwertige Abbildungen) abgeschwächt werden. Weiterhin folgt für kompakte Abbildungen aus dem Theorem leicht folgende allgemeine Störungsaussage zu einem bekannten Existenzsatz von Krasnoselski. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an zwei Begriffe. Eine nichtleere, konvexe Teilmenge K eines Vektorraumes E heisst <u>Kegel</u> in E, wenn $K\neq\{o\}$ gilt und aus $x\in K\setminus\{o\}$ stets $tx\in K$ $(t\geqq 0)$ folgt, nicht aber $-x\in K$ gilt. Eine Teilmenge $R\subset E$ heisst <u>radial beschränkt</u>, wenn der Durchschnitt von R mit jeder Geraden durch $o\in E$ in einer Strecke enthalten ist.

Satz 4: **Es seien E ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K ein abgeschlossener Kegel aus E und $F: \partial W \cap K \longrightarrow \mathcal{K}(K)$ eine kompakte Abbildung mit $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$. Eine der folgenden Bedingungen seien erfüllt.**

(i) W ist sternförmig und $W \cap K$ radial beschränkt.

(ii) $W \cap K$ ist beschränkt.

Sei U eine beliebige Nullumgebung aus E und ε eine beliebige positive Zahl. Die Gleichung $x \in sF(x)$ $(x \in \partial W \cap K, s > 0)$ habe genau eine Lösung (x_0, s_0). Dann existiert eine Nullumgebung V aus E derart, dass für jede kompakte Abbildung $G: \partial W \cap K \longrightarrow \mathcal{K}(K)$ mit $G(x) \subset F(x)+V$ $(x \in (\partial W \cap K) \cap (x_0+U))$ ein $x_1 \in \partial W \cap K$ und ein $s_1 > 0$ existiert, so dass $x_1 \in s_1 G(x_1)$, $x_1 - x_0 \in U$ sowie $|s_1 - s_0| \leq \varepsilon$ gilt.

Beweis: Da K ein Kegel und $F(\partial W \cap K)$ relativ kompakt ist, folgt $o \notin co\, \overline{F(\partial W \cap K)}$ aus $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$ (s. z.B. [11], S. 20). Sei $C = \overline{co(F(\partial W \cap K))}$ und m das Minkowskifunktional von W $(m(x) = \inf \{a > 0, x \in aW\})$. Im Fall (i) gilt $m(z) > 0$ $(z \in C \subset K)$ und m ist nach unten halbstetig (s. [9]). Weil C kompakt ist, existiert eine Zahl $a > 0$ mit $m(z) \geq a$ $(z \in C)$. Wegen $m(x) \leq 1$ $(x \in W)$ gilt $(\frac{2}{a}C) \cap (W \cap K) = \emptyset$. Im Fall (ii) folgt sofort aus $o \notin C$ und der Beschränktheit von $W \cap K$ die Relation $kC \cap (W \cap K) = \emptyset$ für hinreichend grosses reelles k. In beiden Fällen finden wir also eine Zahl $r > s_0$ derart, dass $co(rF(\partial W \cap K) \cap (W \cap K) = \emptyset$ erfüllt ist. Sei $F_r = rF$ und $y_0 \in co(F_r(\partial W \cap K))$. Dann gilt $x \notin tF_r(x) + (1-t)y_0$ $(x \in \partial W \cap K,\ t \in [0,1])$. Die Gleichung $x \in tF_r(x)$ $(x \in \partial W \cap K, t \in (0,1))$ hat genau eine Lösung (x_0, t_0) mit $t_0 = \frac{s_0}{r}$. Deshalb lässt sich auf F_r unser Theorem für den Spezialfall kompakter Abbildungen anwenden. Danach existiert eine Nullumgebung V_r, so dass zu jeder kompakten Abbildung $G_r: \partial W \cap K \longrightarrow \mathcal{K}(K)$ mit $G_r(x) \subset F_r(x)+V_r (x \in (\partial W \cap K) \cap (x_0 + \mathcal{U}))$ ein $t_1 \in (0,1)$ und ein $x_1 \in \partial W \cap K$ zu finden ist, für die $x_1 \in t_1 G_r(x_1)$, $x_1 - x_0 \in \mathcal{U}$ und $|t_1 - t_0| \leq \frac{\varepsilon}{r}$ gilt. Sei $V = \frac{V_r}{r}$ und $G: \partial W \cap K \longrightarrow \mathcal{K}(K)$ eine kompakte Abbildung mit $G(x) \subset F(x)+V (x \in \partial W \cap K) \cap (x_0 + \mathcal{U}))$. Mit Einführung der Abbildung $G_r = rG$ folgt also die Existenz eines $x_1 \in \partial W \cap K$ und eines $t_1 \in (0,1)$ mit $x_1 \in (rt_1)G(x_1)$, $x_1 - x_0 \in \mathcal{U}$ und $|rt_1 - rt_0| \leq \varepsilon$. Mit $s_1 = rt_1$ folgt wegen $s_0 = rt_0$ die Behauptung von Satz 4.

Für punktwertige kompakte Abbildungen in vollständigen metrisierbaren lokalkonvexen Räumen stammt Satz 4 von Riedrich [11]. Im Fall der hier betrachteten Raumklasse verschärft Satz 4 auch für punktwertige Abbildungen die Störungssätze 4 und 5 unserer Arbeit [2], die jedoch für die allgemeinere Raumklasse der zulässigen Räume gelten. Die Existenz von Eigenwerten ist auf Grund sehr allgemeiner Eigenwertsätze unter den Voraussetzungen von Satz 4 über E,W,K und F gesichert (s. [5],[11]).

Wir geben abschliessend eine weitere, sehr einfache Folgerung aus unserem Theorem an, die nichtnotwendig kompakte Abbildungen zulässt.

Satz 5: Es seien E ein Banachraum, W die Einheitskugel von E, $F_1: \partial W \longrightarrow E$ eine kompakte, $F_2: \partial W \longrightarrow E$ eine (streng) kontrahierende Abbildung und $F = F_1 + F_2$. Es sei $F(\partial W) \cap W = \emptyset$ und es existiere ein $y_0 \in E \setminus W$ derart, dass $F(\partial W)$ sternförmig bezüglich y_0 ist. Die (dann lösbare) Gleichung $F(x) = kx$ $(x \in \partial W,\ k > 1)$ habe genau eine Lösung (x_0, k_0). Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für jede Abbildung

$G: \partial W \to E$ der Form $G=G_1+G_2$ (G_1 kompakt, G_2 kontrahierend) mit $\| G(x)-F(x) \| \leq \delta$ ein $x_1 \in \partial W$ und ein $k_1 > 1$ zu finden ist, für die $G(x_1)=k_1 x_1$ sowie $|k_0-k_1| \leq \varepsilon$ und $\| x_0-x_1 \| \leq \varepsilon$ gilt.

L i t e r a t u r

[1] DANEŠ J.: On densifying and related mappings and their application in nonlinear functional analysis. In: Theory of nonlinear operators. Proceedings of a summer school 1972 Neuendorf, GDR, 15-56(1974).

[2] HAHN S.: Uber die Stabilität von Lösungen nichtlinearer Operatorengleichungen in nicht notwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 421-440.

[3] HAHN S.: Ein Homotopieerweiterungssatz für kompakte Vektorfelder in topologischen Vektorräumen, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 807-811.

[4] HAHN S.: Gebietsinvarianzsatz und Eigenwertaussagen für konzentrierende Abbildungen, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 697-713.

[5] HAHN S.: Zur Theorie nichtlinearer Operatorengleichungen in topologischen Vektorräumen, B - Dissertation TU Dresden 1978.

[6] HAHN S.: Zur Theorie kompakter Vektorfelder in topologischen Vektorräumen, Math. Nachr. (1979),

[7] HALE J.K.: Continuous dependence of fixed points of condensing maps, Jour. Math. Anal. and Appl. 46(1974), 338-349.

[8] KAKUTANI S.: A generalisation of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J. 8(1941), 457-459.

[9] KLEE V.: Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces, Math. Ann. 141(1960), 281-285.

[10] KRASNOSELSKI M.A., P.P. ZABREIKO: Geometrische Methoden der nichtlinearen Analysis (russ.), Moskau 1975.

[11] RIEDRICH T.: Vorlesungen über nichtlineare Operatorengleichungen, Teubner-Texte, Teubner-Verlag Leipzig 1976.

[12] SADOWSKI B.N.: Uber Nichtkompaktheitsmasse und verdichtende Operatoren (russ.), Probl. matem. analiza složn. sistem 2(1968), 89-119.

Technische Universität Dresden

Sektion Mathematik

Mommsenstr. 13, 8027 Dresden

D D R

(Oblatum 14.2. 1979)