Mihail G. Tkachenko

О бикомпактах, представимых в виде объединения счётного числа левых подпространств. II.

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 20 (1979), No. 2, 381--395

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105936`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20,2 (1979)

О БИКОМПАКТАХ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ СЧЕТНОГО ЧИСЛА ЛЕВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ - II

М.Г. ТКАЧЕНКО

Abstract: Let X be a regular countably compact space and γ be a countable family consisting of left subspaces of X such that $X = \cup\gamma$. Then X is a scattered compact and sequential.

Key words: Left and right (scattered) spaces, sequential and c-sequential spaces.

AMS: 54A25, 54D30

Статья является продолжением одноименной статьи, опубликованной в этом номере этого журнала. Там приведены необходимые определения и обозначения. Нумерация лемм, теорем и т.п. продолжается.

Теорема 3. Счетно-компактное пространство, представимое в виде объединения счетного числа левых подпространств, является бикомпактом.

Доказательство. Пусть X - счетно-компактное пространство и $\{M_i : i \in \omega\}$ - семейство левых подпространств в X такое, что $X = \bigcup_{i \in \omega} M_i$. Без потери общности можно считать, что $M_i \cap M_j = \Lambda$ при $i \neq j$. Для каждого $i \in \omega$ зафиксируем левое вполне упорядочение $<_i$ на M_i.

Предположим, что X – не бикомпакт. Ввиду счетной компактности пространства X существуют регулярный кардинал $\tau > \aleph_0$ и убывающая последовательность непустых замкнутых в X множеств $\{F_\alpha : \alpha < \tau\}$ с пустым пересечением. Положим $A_0 = \{i \in \omega : \forall \alpha < \tau (F_\alpha \cap M_i \neq \Lambda)\}$. Очевидно, $A_0 \neq \Lambda$. Действительно, в противном случае для каждого $i \in \omega$ существует ординал $\alpha(i) < \tau$ такой, что $F_{\alpha(i)} \cap M_i = \Lambda$. Так как $cf(\tau) = \tau > \aleph_0$, существует ординал $\alpha < \tau$ такой, что $\alpha > sup\{\alpha(i) : i \in \omega\}$, и тогда $F_\alpha \cap M_i = \Lambda$ для каждого $i \in \omega$, то есть $F_\alpha = \Lambda$. Полученное противоречие означает, что $A_0 \neq \Lambda$. Положим $\beta_0 = max\{\alpha(i) : i < i_0\}$, где $i_0 = min\, A_0$. Тогда $F_{\beta_0} \cap M_i = \Lambda$ для каждого $i < i_0$. Теперь положим $Q_0 = \{p \in M_{i_0} : \forall \alpha < \tau (F_\alpha \cap [M_{i_0}(p)] \neq \Lambda)\}$, где для каждого $i \in \omega$ и любых $R \subset M_i$ и $p \in M_i$ через $R(p)$ обозначается множество $\{x \in R : x <_i p\}$. Если $Q_0 = \Lambda$, то мы полагаем $N_0 = M_{i_0}$. Если же $Q_0 \neq \Lambda$, то полагаем $p_0 = min\, Q_0$ (минимум берется относительно вполне упорядочения $<_{i_0}$), $N_0 = M_{i_0}(p_0)$ и $<<_0 = <_{i_0} | N_0$. Очевидно, $cf(N_0, <<_0) \geq \omega$. Мы утверждаем, что существует ординал $\alpha < \tau$ такой, что $F_\alpha \cap N_0 = \Lambda$.

Предположим противное. Рассмотрим два случая.

а) $cf(N_0, <<_0) = \omega$. Пусть T_0 – счетное множество, лежащее в N_0 и конфинальное в N_0. По определению множества N_0, для каждой точки $p \in T_0$ существует ординал $\alpha(p) < \tau$ такой, что $F_{\alpha(p)} \cap [N_0(p)] = \Lambda$. Поскольку же $cf(\tau) > \omega$, существует ординал $\gamma_0 < \tau$ такой, что $\gamma_0 > \sup_{p \in T_0} \alpha(p)$ и тогда $F_{\gamma_0} \cap N_0 = \Lambda$. Следовательно, имеет место случай

в) $\lambda \overset{def}{=} cf(N_0, <<_0) > \omega$. Пусть $\mu = min\{\lambda, \tau\}$.

Очевидно, $cf(\mu) = \mu > \aleph_0$. Выберем точку $x_0 \in N_0$ произвольно. Пусть $\alpha < \mu$ и последовательности $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, $\{y_\beta : \beta < \alpha, \beta \neq 0\}$ и $\{\gamma_\beta : \beta < \alpha, \beta \neq 0\}$ уже определены, причем для каждого $\beta < \alpha$, $x_\beta, y_\beta \in N_0$ и $\gamma_\beta < \tau$. Поскольку $\alpha < \mu \leq \lambda$, существует точка $y_\alpha \in N_0$ такая, что $x_\beta <<_0 y_\alpha$ для каждого $\beta < \alpha$. Из определения множества N_0 вытекает существование ординала $\gamma < \tau$ такого, что $F_\gamma \cap [N_0(y_\alpha)] = \Lambda$. Так как $\alpha < \mu \leq \tau$, существует ординал $\gamma_\alpha < \tau$ такой, что $\gamma_\alpha > max\{\gamma, \sup_{\beta < \alpha} \gamma_\beta\}$. Теперь мы выбираем точку x_β из множества $N_0 \cap F_{\gamma_\alpha} \neq \Lambda$. Тем самым построение по рекурсии вдоль μ закончено и последовательности $L = \{x_\alpha : \alpha < \mu\}$, $\{y_\alpha : \alpha < \mu, \alpha \neq 0\}$ и $\{\gamma_\alpha : \alpha < \mu, \alpha \neq 0\}$ определены. По построению, для каждого $\alpha < \mu$ имеем: $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \subset N_0(y_\alpha)$, $\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \mu\} \subset F_{\gamma_\alpha}$ и $F_{\gamma_\alpha} \cap [N_0(y_\alpha)] = \Lambda$. Следовательно, L является свободной последовательностью несчетной длины. Однако, существование такой последовательности противоречит замечанию, сделанному в конце [1].

Таким образом, анализ случаев (а) и (в) показывает, что существует ординал $\alpha < \tau$ такой, что $F_\alpha \cap N_0 = \Lambda$. Пусть β_0' - минимальный такой ординал. Теперь мы полагаем $\alpha_0 = max\{\beta_0, \beta_0'\}$ и тогда получаем:

(*) $F_{\alpha_0} \cap M_i = \Lambda$ при $i < i_0$ и $F_{\alpha_0} \cap [N_0] \cap M_{i_0} = \Lambda$, ибо $[N_0] \cap M_{i_0} = N_0$ в силу определения множества N_0 и левости вполне упорядочения $<_{i_0}$. Наконец, положим $C_0 = \{F_\alpha(0) : \alpha < \tau\}$, где $F_\alpha(0) = F_\alpha \cap [N_0]$ для каждого $\alpha < \tau$. Из (*) следует, что $F_\alpha(0) \cap M_i = \Lambda$ при $i \leq i_0$. Первый шаг рекурсивного построения полностью описан. Пусть теперь $n \in \omega$. Предположим, что убывающая последовательность $C_n = \{F_\alpha(n) : \alpha < \tau\}$, состоящая из замкнутых в X множеств и имеющая пустое пересечение, а также множества $N_n \subset M_{i_n}$, $A_n \subset \omega$, ординал $\alpha_n < \tau$ и $i_n \in \omega$ уже определены. Положим $A_{n+1} = \{i \in A_n : \forall\alpha < \tau (F_\alpha(n) \cap \cap [N_n] \cap M_i \neq \Lambda)\}$. Как и прежде, $A_{n+1} \neq \Lambda$. Полагаем $i_{n+1} = \min A_{n+1}$. По определению числа i_{n+1}, для каждого $i < i_{n+1}$ существует ординал $\alpha(i) < \tau$ такой, что $F_{\alpha(i)}(n) \cap \cap [N_n] \cap M_i = \Lambda$. Положим $\beta_{n+1} = \max\{\alpha(i) : i < i_{n+1}\}$. Тогда $F_{\beta_{n+1}}(n) \cap [N_n] \cap M_i = \Lambda$ для каждого $i < i_{n+1}$. Теперь определяем $R_{n+1} = M_{i_{n+1}} \cap [N_n]$ и $Q_{n+1} = \{p \in R_{n+1} : \forall\alpha < \tau (F_\alpha(n) \cap [R_{n+1}(p)] \neq \Lambda)\}$. Если $Q_{n+1} = \Lambda$, то мы полагаем $N_{n+1} = R_{n+1}$, а если $Q_{n+1} \neq \Lambda$, то полагаем $p_{n+1} = \min Q_{n+1}$ (минимум берется относительно вполне упорядочения $<_{i_{n+1}}$) и $N_{n+1} = R_{n+1}(p_{n+1})$. Как и при первом шаге построения, доказываем существование ординала $\beta'_{n+1} < \tau$ такого, что $F_{\beta'_{n+1}} \cap N_{n+1} = \Lambda$. Затем полагаем $\alpha_{n+1} = \max\{\beta_{n+1}, \beta'_{n+1}\}$ и получаем:

(**) $F_{\alpha_{n+1}}(n) \cap M_i = \Lambda$ при $i < i_{n+1}$ и $F_{\alpha_{n+1}}(n) \cap [N_{n+1}] \cap M_{i_{n+1}} = \Lambda$,

ибо $[N_{n+1}] \cap M_{i_{n+1}} = N_{n+1}$ в силу определения множества N_{n+1} и левости вполне упорядочения $<_{i_{n+1}}$. Теперь полагаем $C_{n+1} = \{F_\alpha(n+1) : \alpha < \tau\}$, где $F_\alpha(n+1) = F_\alpha(n) \cap [N_{n+1}]$ для каждого $\alpha < \tau$. Из (**) следует, что $F_{\alpha_{n+1}}(n+1) \cap M_i = \Lambda$ при $i \leq i_{n+1}$. Таким образом, построение вдоль ω закончено.

Пусть ординал $\alpha < \tau$ и $\alpha > \sup_{i \in \omega} \alpha_i$. Положим $F_\alpha(\omega) = \bigcap_{n \in \omega} F(n)$. Тогда $F_\alpha(\omega) \neq \Lambda$, ибо пространство X счетно-компактное. Однако, из построения следует, что $F_{\alpha_n}(n) \cap M_i = \Lambda$ для каждого $i \leq i_n$ и поэтому $F_\alpha(\omega) \cap M_i = \Lambda$ для каждого $i \in \omega$, то есть $F_\alpha(\omega) = \Lambda$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Совершенно аналогично доказывается естественный аналог предыдущей теоремы для произвольного кардинала $\tau > \aleph_0$.

Лемма 3. Пусть бикомпакт X является объединением семейства $\{M_i : i \in \omega\}$ своих левых подпространств. Тогда X c-секвенциален.

Доказательство. Нам достаточно доказать, что любая неизолированная в X точка p является $\varkappa$-точкой, то есть существует последовательность из $X \setminus \{p\}$, сходящаяся к точке p.

Если такая последовательность не существует, то подпространство $X-\{p\}$ счетно компактное и, по предположению, является объединением семейства $\{M_i-\{p\} : i \in \omega\}$ своих левых подпространств. Из теоремы 3 следует, что $X-\{p\}$ является бикомпактом и значит, p - изолированная точка в X.

Теорема 4. Пусть X - бикомпакт и $\{M_i : i \in \omega\}$ - семейство левых подпространств в X такое, что $X = \cup\{M_i : i \in \omega\}$. Тогда X разрежен.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $M_i \cap M_j = \Lambda$ при $i \neq j$. Для каждого $i \in \omega$ зафиксируем левое вполне упорядочение $<_i$ на M_i

Предположим, что X не разрежен. Тогда существуют два замкнутых в X непересекающихся множества $F(0)$ и $F(1)$ без изолированных точек. Пусть $\ell \in \{0,1\}$. Мы полагаем $A(\ell) = \{i \in \omega :$ $: M_i \cap F(\ell)$ не разрежено$\}$.

По лемме 1, $A(\ell) \neq \Lambda$. Положим $i(\ell) = \min A(\ell)$. Для каждого $k \in \omega$ через D_k обозначим дискретное двоеточие $\{0,1\}$ а через π^j_k обозначим естественную проекцию произведения $\prod_{k=0}^{j} D_k$ на сомножитель D_k.

Пусть $i = j + 1$ и для всех $\ell \in \prod_{k=0}^{j} D_k$ уже определены замкнутые в X множества $F(\ell)$ и индексы $i(\ell) \in \omega$, причем $F(\ell') \cap F(\ell'') = \Lambda$ для любых $\ell', \ell'' \in \prod_{k=0}^{j} D_k$ таких, что $\pi_j^j(\ell') \neq \pi_j^j(\ell'')$ и в $F(\ell)$ нет изолированных точек для каждого $\ell \in \prod_{k=0}^{j} D_k$.

Для каждого $\ell \in \prod_{k=0}^{j} D_k$ положим $K_\ell = M_{i(\ell)} \cap F(\ell)$ и через $N(\ell)$ обозначим множество $\{x \in K_\ell : [K_\ell(x)]$ - не разрежено$\}$, где для каждого $x \in K_\ell$ через $K_\ell(x)$ обозначено множество $\{y \in K_\ell : y <_{i(\ell)} x\}$.

Рассмотрим два случая.

1) $N(\ell) = \Lambda$. Тогда мы положим $L_\ell = K_\ell$ и $\Phi_\ell = [K_\ell]$.

2) $N(\ell) \neq \Lambda$. Тогда мы полагаем $x = \min N(\ell)$ (минимум берется относительно вполне упорядочения $<_{i(\ell)}$), $L_\ell = K_\ell(x)$ и $\Phi_\ell = [L_\ell]$.

Итак, в обоих случаях замкнутое подмножество Φ_ℓ пространства X определено, причем подпространство Φ_ℓ не является разреженным, а для каждой точки $y \in L_\ell$ пространство $[L_\ell(y)]$ разрежено.

Мы утверждаем, что $cf(L_\ell, <<_{i(\ell)}) \leq \omega$, где $<<_{i(\ell)}$ - ограничение порядка $<_{i(\ell)}$ на множестве L_ℓ.

Действительно, по теореме 2, $t(X) \leq \aleph_0$. Следовательно, если $cf(L_\ell, <<_{i(\ell)}) > \omega$, то $\Phi_\ell = [L_\ell] = \cup\{[L_\ell(y)] : y \in L_\ell\}$, где пространство $[L_\ell(y)]$ разрежено для каждой точки $y \in L_\ell$. Используя теорему 1, мы заключаем, что бикомпакт Φ_ℓ разрежен. Полученное противоречие означает, что $cf(L_\ell, <<_{i(\ell)}) \leq \omega$. Следовательно, пространство L_ℓ является объединением счетного числа разреженных подпространств.

Поскольку пространство Φ_ℓ не разрежено, в нем существуют два замкнутых непересекающихся множества $F(\ell,0)$ и $F(\ell,1)$ без изолированных точек.

Пусть $q \in \{0,1\}$. Положим $A(\ell,q)=\{i \in \omega : i(\ell) < i,\ M_i \cap F(\ell,q)$ не разрежено$\}$. Мы утверждаем, что $A(\ell,q) \neq \Lambda$ при $q \in \{0,1\}$. Действительно, из построения следует, что если $i \leq i(\ell)$ и $i \neq i(\vartheta_m^j(\ell))$ для каждого $m \leq j$ (где $\vartheta_m^j : \prod_{k=0}^{j} D_k \longrightarrow \prod_{k=0}^{j} D_k$ - естественная проекция), то $M_i \cap F(\ell,q)$ - разрежено, ибо $F(\ell,q) \subset F(\vartheta_m^j(\ell))$ для каждого $m \leq j$. Если же $i = i(\vartheta_m^j(\ell))$ при некотором $m \leq j$, то в силу включения $F(\ell,q) \subset \Phi_{\vartheta_m^j(\ell)}$ и равенства $\Phi_{\vartheta_m^j(\ell)} \cap M_{i(\vartheta_m^j(\ell))} = L_{\vartheta_m^j(\ell)}$ (что следует из определения множества $\Phi_{\vartheta_m^j(\ell)}$ и левости вполне упорядочения $<_{i(\vartheta_m^j(\ell))}$) мы получаем: $F(\ell,q) \cap M_{i(\vartheta_m^j(\ell))} \subset L_{\vartheta_m^j(\ell)}$. Однако, нами уже установлено, что множество $L_{\vartheta_m^j(\ell)}$ является объединением счетного числа разреженных подпространств. Поскольку же бикомпакт $\Phi_{(\ell,q)}$ не разрежен, из леммы 1 вытекает, что пространство $\Phi_{(\ell,q)}$ не может являться объединением счетного числа разреженных подпространств.

Следовательно, $A(\ell,q) \neq \Lambda$ при $q \in \{0,1\}$. Полагаем, наконец, $i(\ell,q)=\min A(\ell,q)$. Тем самым построение по рекурсии вдоль ω закончено.

Для каждого $k \in \omega$ положим $Q_k = \bigcup\{F(m) : m \in \prod_{i=0}^{k} D_i\}$ и $F=\bigcap\{Q_k : k \in \omega\}$. Очевидно, F замкнуто в X. Сейчас мы определим непрерывное отображение бикомпакта F на канторово совершенное множество $D^\omega = \prod_{i \in \omega} D_i$. Для этого через g_k обозначим естественную проекцию из D^ω на $\prod_{i=0}^{k} D_i$

и для каждой точки $p \in D^\omega$ через F_p обозначим множество $\cap\{F(g_k(p)) : k \in \omega\}$. Теперь для каждой точки $x \in F$ мы полагаем $f(x) = p$ тогда и только тогда, когда $x \in F_p$.

Тривиальная проверка непрерывности отображения f и того, что f определено на всем F (а потому $f(F) = D^\omega$), опускается.

Заметим, теперь что бикомпакт F является объединением счетного числа своих разреженных подпространств. Действительно, мы уже отмечали, что пересечение множества $F(\ell, q)$ и M_i является объединением не более чем счетного числа разреженных подпространств из X при $i \leq i(\ell)$ (здесь $\ell \in \prod_{k=0}^{j} D_k$). Однако, $j \leq i(\ell)$ для любой точки $\ell \in \prod_{k=0}^{j} D_k$, поэтому множество $Q_{j+1} \cap M_i$ также является объединением счетного числа своих разреженных подпространств при каждом $i \leq j$. Поскольку же $F \subset Q_{j+1}$ при каждом $j \in \omega$ и $F = \cup\{F \cap M_j : j \in \omega\}$, то и бикомпакт F представим в виде объединения счетного числа своих разреженных подпространств. По лемме 1, бикомпакт F разрежен. Однако, непрерывный образ разреженного бикомпакта также разрежен. Таким образом, бикомпакт D^ω является непрерывным образом разреженного бикомпакта F и поэтому канторово совершенное множество должно быть разреженным. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Вопрос 3. Существует ли разреженное счетно компактное пространство X, которое непрерывно отображается на D^ω ? А если $t(X) \leq \aleph_0$?

Теорема 5. Пусть X - бикомпакт и $\{M_i : i \in \omega\}$ -семейство левых подпространств в X такое, что $X = \cup\{M_i : i \in \omega\}$. Тогда X секвенциален.

Доказательство. Из леммы 3 и теоремы 4 следует, что X - разреженный c-секвенциальный бикомпакт. Согласно результату Шапировского (см. п. 4 в начале [1]), бикомпакт X секвенциален.

Вопрос 4. Пусть τ - бесконечный кардинал, X - бикомпакт и $\{M_\alpha : \alpha < \tau\}$ - семейство левых подпространств в X такое, что $X = \cup\{M_\alpha : \alpha < \tau\}$.

Верно ли, что найдется точка $p \in X$ такая, что $\pi\chi(p, X) < \tau$?

Ответ положителен в случае $\tau = \aleph_0$ (теорема 4), а также, если $\tau^{\aleph_0} < 2^\tau$. Покажем это.

Предположим, что $\pi\chi(p, X) \geq \tau$ для каждой точки $p \in X$. Тогда существует непрерывное отображение f бикомпакта X на Тихоновский куб I^τ (см. [2], теорема 21). Поскольку отображение f совершенно, существует замкнутое в X множество F такое, что $f(F) = I^\tau$ и $g = f \mid F$ - неприводимо.

Из неприводимости отображения g следует, что $c(F) = c(I^\tau) = \aleph_0$. Из теоремы 2 следует, что $t(X) \leq \tau$, поэтому $t(F) \leq \tau$. Таким образом, $w(F) \leq t(F)^{c(F)} \leq \tau^{\aleph_0}$ (см. [3], следствие 5). Однако, $w(M) \geq |M|$ для любого левого пространства M, поэтому $|F \cap M_\alpha| \leq \tau^{\aleph_0}$ для каждого $\alpha < \tau$ и, следовательно, $|F| \leq \tau \cdot \tau^{\aleph_0} = \tau^{\aleph_0}$. Но $2^\tau = |I^\tau| \leq |F|$, причем мы предположили, что $\tau^{\aleph_0} < 2^\tau$. Полученное противоречие означает, что найдется точка $p \in X$ такая, что $\pi\chi(p, X) < \tau$.

В заключение охарактеризуем левые подпространства ординальных пространств.

Определение 4. Множество $M \subset \omega_1$ называется стационарным в ω_1, если $M \cap F \neq \Lambda$ для любого замкнутого конфинального в ω_1 (с порядковой топологией) множества F.

<u>Предложение</u>. Пусть ω_1 наделено порядковой топологией и $M \subset \omega_1$. Тогда M является левым подпространством в ω_1, тогда и только тогда, когда M не стационарно в ω_1.

Доказательство.

1. Пусть M является левым подпространством в ω_1. Зафиксируем левое вполне упорядочение $<<$ на M и для каждого $x \in M$ через $M(x)$ обозначим множество $\{y \in M: y << x\}$. Тогда $M(x)$ замкнуто в M для каждого $x \in M$.

Через N обозначим минимальный левый луч в M, мощность которого равна ω_1. Тогда N конфинально в ω_1.

Отметим, что $cf(N, \prec\!\prec) = \omega_1$, где $\prec\!\prec$ - сужение упорядочения $<<$ на множестве N.

Пусть $\alpha_0 < \omega_1$. Тогда существует $x_0 \in N$ такой, что $\alpha_0 \cap N \subset N(x_0)$. Пусть $\beta < \omega_1$ и для каждого $\gamma < \beta$ ординалы α_γ и x_γ уже определены. Если β - предельный ординал, мы полагаем $\alpha_\beta = sup\{\alpha_\gamma: \gamma < \beta\}$ и $x_\beta = min\{x \in N: x_\gamma \prec\!\prec x$ для каждого $\gamma < \beta\}$. Пусть $\beta = \gamma + 1$. Тогда существует $\alpha_\beta \in \omega_1$ такой, что $N(x_\gamma) \subset \alpha_\beta$, $x_\gamma < \alpha_\beta$ и существует $x_\beta \in N$ такой, что $\alpha_\beta \cap N \subset N(x_\beta)$, $\alpha_\beta < x_\beta$.

Итак, множества $\{\alpha_\beta: \beta < \omega_1\}$ и $\{x_\beta: \beta < \omega_1\}$ построены. Из построения следует замкнутость и конфинальность множества $\{\alpha_\beta: \beta \in \omega_1\}$ в ω_1. Более того, выполняются следующие условия:

(i) $\alpha_\beta \cap N = N(x_\beta)$ для любого предельного $\beta < \omega_1$;

(ii) $\{x_\gamma: \gamma < \beta\}$ конфинально в α_β для каждого предельного ординала $\beta < \omega_1$.

Пусть β - предельный ординал, $\beta < \omega_1$. Так как $x_\gamma << x_\beta$ при $\gamma < \beta$, то из (i) следует, что $\{x_\gamma : \gamma < \beta\} \subset N(x_\beta) = \alpha_\beta \cap N$. Но $\{x_\gamma : \gamma < \beta\}$ конфинально в α_β ввиду (ii), поэтому $\alpha_\beta \in [\{x_\gamma : \gamma < \beta\}]_{\omega_1} \subset$ $\subset [N(x_\beta)]_{\omega_1}$. Однако, $<<$ является левым вполне упорядочением на N, поэтому $\alpha_\beta \notin {}^\bullet N$ для каждого предельного $\beta \in \omega_1$. Тем более, $\alpha_\beta \notin M$, ибо N является левым лучом в M и $\alpha_\beta \in [N]_{\omega_1}$.

Положим $F = \{\alpha_\beta : \beta < \omega_1,\ \beta$ - предельный ординал$\}$. Тогда F замкнуто и конфинально в ω_1, причем $F \cap M = \Lambda$.

Следовательно, M не стационарно в ω_1.

2. Пусть M не стационарно в ω_1. Тогда существует замкнутое конфинальное в ω_1 множество F такое, что $M \cap F =$ $= \Lambda$. Перенумеруем ординалы из F в порядке их возрастания: $F = \{\alpha_\beta : \beta \in \omega_1 \setminus \{0\}\}$. Тогда $V = \omega_1 \setminus F = [0, \alpha_1) \cup \bigcup\{(\alpha_\beta, \alpha_{\beta+1}) :$ $\beta \in \omega_1 \setminus \{0\}\}$, где для любых $p, q \in \omega_1$ через (p, q) обозначается множество $\{\alpha \in \omega_1 : p < \alpha < q\}$. Сейчас мы укажем левое вполне упорядочение на $V \supset M$. Для этого обозначим $I_\beta = (\alpha_\beta, \alpha_{\beta+1})$ при $\beta \in \omega_1 \setminus \{0\}$ и $I_0 = [0, \alpha_1)$. При каждом $\beta < \omega_1$ через $<_\beta$ обозначим вполне упорядочение на I_β такое, что $(I_\beta, <_\beta)$ порядкого изоморфно кардиналу $|I_\beta| \leq \omega_1$.

Пусть $x, y \in V$ и $x \neq y$. Тогда $x \in I_{\beta'}$ и $y \in I_{\beta''}$, где $\beta', \beta'' \in \omega_1$. Если $\beta' = \beta'' = \beta$, то мы полагаем $x << y$ тогда и только тогда, когда $x <_\beta y$. Если $\beta' < \beta''$, то мы полагаем $x << y$; и $y << x$, если $\beta'' < \beta'$.

Таким образом, линейный порядок $<<$ определен на всем множестве $V \supset M$. Тривиальная проверка того, что $<<$ является левым вполне упорядочением на V , опускается. Доказательство закончено.

Замечание 3. Совершенно аналогично предыдущее предложение формулируется для случая произвольного регулярного кардинала $\tau > \aleph_0$ и неограниченного множества M .

Теорема 6. Пусть хаусдорфово пространство X является объединением конечного числа левых локально бикомпактных подпространств. Тогда X - левое пространство.

Доказательство. Индукция по числу слагаемых. При одном слагаемом утверждение теоремы очевидно. Пусть утверждение теоремы уже доказано для всех хаусдорфовых пространств, являющихся объединением не более чем n левых локально бикомпактных подпространств. Докажем теорему для $n+1$ слагаемых.

Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} D_i$, где D_i - левое локально бикомпактное подпространство в X для каждого $i \leq n+1$. Положим $D_i^* = [D_i] \setminus D_i$. Так как X - хаусдорфово, а D_i - локально бикомпактно, то D_i открыто в $[D_i]$, поэтому D_i^* замкнуто в X для каждого $i \leq n+1$. Но $D_i^* \cap D_i = \Lambda$, следовательно, D_i^* является объединением семейства $\{D_i^* \cap D_j : j \neq i\}$ своих левых локально бикомпактных подпространств. В этом семействе не более n различных элементов, поэтому из индуктивного предположения следует, что D_i^* - левое пространство для каждого $i \leq n+1$. Но тогда и $[D_i]$ является левым пространством для каждого $i \leq n+1$. Действительно, пусть $<_i$ - левое вполне упорядочение на D_i^* и $\ll_i$ - левое вполне упорыдочение на D_i . Определим теперь порядок $\prec_i$ на $[D_i]$ следующим образом: $\prec_i | D_i^* = <_i$,

$\prec_i | D_i = \ll_i$ и $x \prec_i y$ для любых $x, y \in [D_i]$ таких, что $x \in D_i^*$ и $y \in D_i$. Тогда, очевидно, $\prec_i$ - левое вполне упорядочение на $[D_i] = D_i \cup D_i^*$, поэтому $[D_i]$ - левое пространство для каждого $i \leq n+1$.

Определим теперь левое вполне упорядочение $<$ на X. Положим $T_1 = [D_1]$ и $T_i = [D_i] \setminus \bigcup \{[D_j] : j < i\}$ для каждого i такого, что $1 < i \leq n+1$. Тогда $T_i \subset [D_i]$ для каждого $i \leq n+1$, причем $T_{i'} \cap T_{i''} = \Lambda$ при $i' \neq i''$ и $X = \bigcup_{i \leq n+1} T_i$. Положим $\prec\prec_i = \prec_i | T_i$. Тогда $\prec\prec_i$ является левым вполне упорядочением на T_i при каждом $i \leq n+1$.

Полагаем $< | T_i = \prec\prec_i$ для каждого $i \leq n+1$ и $x < y$, если $x \in T_{i'}$, $y \in T_{i''}$ и $i' < i''$. Очевидно, $<$ есть вполне упорядочение на X. Проверим то свойство этого вполне упорядочения, что каждый левый луч в X замкнут.

Пусть $x \in X$ и $X_x = \{y \in X : y < x\}$. Тогда существует $i^* \leq n+1$ такое, что $x \in T_{i^*}$, поэтому $X_x = \bigcup\{[D_j] : j \leq i^*\} \setminus \{y \in T_{i^*} : x \leq y\}$. Но множество $\{y \in T_{i^*} : x \leq y\}$ совпадает с множеством $\{x\} \cup \{y \in T_{i^*} : x \prec\prec_{i^*} y\}$, ибо $<$ совпадает с $\prec\prec_{i^*}$ на T_{i^*}. Однако, множество $\{x\} \cup \{y \in T_{i^*} : x \prec\prec_{i^*} y\}$ открыто в $\bigcup_{j \leq i^*} [D_j]$, ибо T_{i^*} открыто в $\bigcup_{j \leq i^*} [D_j]$ и $\{y \in T_{i^*} : x \prec\prec_{i^*} y\} \cup \{x\}$ открыто в T_{i^*}. Таким образом, X_x замкнуто в $\bigcup\{[D_j] : j \leq i^*\}$, $\bigcup_{j \leq i^*} [D_j]$ замкнуто в X, поэтому X_x замкнуто в X.

Теорема доказана.

Мы говорим, что M - дискретное подпространство в X, если M с индуцированной из X топологией является дискретным пространством.

Очевидно, любое дискретное пространство локально бикомпактно и является левым, поэтому получаем

Следствие. Если хаусдорфово пространство X является объединением конечного числа дискретных подпространств, то X - левое пространство.

Это следствие является ответом на вопрос, поставленный А.В. Архангельским для случая, когда X - бикомпакт.

Вопрос 5. Пусть бикомпакт X является объединением счетного числа дискретных подпространств. Верно ли, что тогда X - левый?

Основные результаты этой работы могут оказаться следствием отрицательного решения следующего вопроса:

Вопрос 6. Существует ли пример не левого бикомпакта, представимого в виде объединения счетного числа левых подпространств?

Вопрос 7. Существует ли не левое регулярное пространство, представимое в виде объединения двух (конечного, счетного числа) левых подпространств?

Автор признателен своему научному руководителю профессору Архангельскому А.В. за внимание к этой работе.

Литература

[1] М.Г. ТКАЧЕНКО: О бикомпактах, представимых в виде объединения счетного числа левых подпространств I, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979), 361-379.

[2] В.Э. ШАПИРОВСКИЙ: Special Types of Embeddings in Tychonoff Cubes. Subspaces of Σ-products and Cardinal Invariants, to appear.

[3] В.Э. ШАПИРОВСКИЙ: Канонические множества и характер. Плотность и вес в бикомпактах, Докл. Акад. Наук СССР 218(1974), 58-61.

Московский Государственный Университет

Москва В-234

С С С Р

(Oblatum 12.2. 1979)